МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1977

УДК 532.546

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Л. М. КОТЛЯР, Э. В. СКВОРЦОВ

(*Казань*)

В нелинейной постановке исследуется плоская стационарная фильтрация жидкости по закону с переменным начальным градиентом. Для некоторых зависимостей начального градиента от координат точки области получены точные аналитические решения ряда задач.

Рассматривается плоская стационарная фильтрация жидкости в однородном и изотропном пласте по следующему закону с начальным градиентом [1]:

$$\mathbf{v}=0, \quad |\nabla p|<\tau; \quad \mathbf{v}=-(k/\mu)\nabla p, \quad |\nabla p|\geqslant\tau \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость фильтрации, $v=|\mathbf{v}|$, ∇p — градиент давления, k — коэффициент проницаемости, μ — вязкость, τ — начальный градиент. Существует ряд работ, в которых получены решения широкого класса задач фильтрации жидкости по закону (0.1) в случае, когда $\tau=\text{const}$ (см., например, [1–4]). Рассматриваемый закон позволяет решать задачи о расчете целиков вязкопластичной жидкости при фильтрации жидкости по закону Дарси. Такой подход предложен в [5].

Известно, что начальный градиент, вообще говоря, зависит от координаты точки. Это может быть обусловлено, например, изменением реологических свойств нефти в зоне контакта ее с водой. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачи фильтрации с переменным начальным градиентом.

Из (0.1) следует, что в областях, где $|\nabla p|<\tau$, возникают застойные зоны, на границах которых $v=(k/\mu)\tau$. По известной аналогии между фильтрацией жидкости по закону (0.1) и потенциальным струйным течением жидкости границе застойной зоны соответствует свободная граница. Пусть v_0 и τ_0 — значения модуля скорости и начального градиента в некоторой характерной точке свободной границы. При заданном законе изменения начального градиента $\tau/\tau_0=f(x, y)$ задача о фильтрации по закону (0.1) сводится к определению течения идеальной жидкости со свободной границей, на которой должно выполняться нелинейное условие $v/v_0=f(x, y)$. Решение такой задачи в точной постановке вызывает большие трудности. Так, в частности, когда рассматривается течение весомой жидкости, аналогом указанного условия является уравнение Бернулли. Как известно, в этом случае точные решения нелинейных задач получены только для некоторых искусственных течений [6, 7]. В многочисленных работах, посвященных решению задач струйного течения тяжелой жидкости, используются различные приближенные методы [8–11].

Рассмотрим два закона изменения начального градиента: а) $\tau/\tau_0=e^{\nu x}$, б) $\tau/\tau_0=\gamma r^n$, где γ, n — постоянные, x — абсцисса точки области, r — радиус-вектор точки. Зависимость а) физически может реализоваться в случае, когда водонефтяной контакт параллелен оси ординат, зависимость б) — в случае, когда он имеет вид окружности с центром в начале координат. Отметим, что условия на свободной границе в виде $v/v_0=e^{\gamma x}$, $v/v_0=\gamma r^n$ были использованы в [8] для получения приближенных решений некоторых задач струйного течения тяжелой жидкости.

1. О решении задач для экспоненциального закона изменения начального градиента. При решении задач фильтрации по закону (0.1) в случае а) в потоке на любой прямой x=const, пересекающей свободную границу Г (границу застойной зоны), модуль скорости должен принимать минимальное значение на Г. Рассмотрим аналитическую функцию

$$\Phi=\frac{dX}{dz}=-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial y}+i\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y},\qquad X=\ln\frac{v_0\,dz}{dW}$$

Здесь W — комплексный потенциал течения, θ — угол наклона вектора скорости к оси x. Если на любой прямой x=const, пересекающей Г, имеется не более одной точки, в которой $\operatorname{Im}\Phi=0$, то, очевидно, модуль скорости принимает минимальное значение на Г.

Линии уровня гармонической функции $(1/v)(\partial v/\partial y)=0$ начинаются и заканчиваются на границе области. На твердых прямолинейных границах θ=const, и они являются линиями уровня $\operatorname{Im}\Phi=0$. При наличии на таких стенках источника и стока между ними на стенке найдется точка, в которой $(\partial^2\theta/\partial x\partial y)=0$, и, следовательно, из этой точки выходит линия уровня $(1/v)(\partial v/\partial y)=0$.

Что касается линии Г, то на ней $v=v_0e^{\gamma x}$ и $(1/v)(\partial v/\partial y)=0$, если $dx/dy=0$. Таким образом, линии уровня $(1/v)(\partial v/\partial y)=0$ выходят из точек на Г, где $\theta=\pm\pi/2$. Если таких точек не больше двух, то линии уровня либо соединяют их, либо кончаются на твердой стенке. При этом закон фильтрации (0.1) справедлив во всей области течения.

Покажем, что в случае а) можно получить точное решение некоторого класса задач плоской стационарной фильтрации по закону (0.1). Рассмотрим потенциальное течение жидкости в области, ограниченной одной или двумя прямолинейными стенками и одной или двумя свободными границами. Введем вспомогательное комплексное переменное u, изменяющееся в некоторой канонической области G, и будем искать функцию $z(u)$, отображающую конформно область G на область течения $z=x+iy$. Введем функцию

$$P(u)=-X(u)+\gamma z \tag{1.1}$$

Очевидно, на свободных границах $\operatorname{Re}P(u)=0$. Пусть прямолинейные стенки параллельны оси x. Тогда на них $\operatorname{Im}P(u)=\theta+\gamma y$=const. По данным граничным условиям можно найти функцию $P(u)$ в области G. Построив функцию dW/du по особенностям, из (1.1) получим

$$e^{\gamma z}\,dz=\frac{1}{v_0}\exp[P(u)]\frac{dW}{du}\,du=F(u)\,du \tag{1.2}$$

откуда

$$z(u)=\frac{1}{\gamma}\ln\left[1+\int_{u_0}^{u}F(u)\,du\right],\qquad z(u_0)=0 \tag{1.3}$$

При $\gamma\to0$ из (1.3) следует решение задачи для случая $\tau/\tau_0=1$.

Пример 1. Рассмотрим задачу фильтрации от источника с расходом $2q$, расположенного в точке A, к стоку с расходом $-2q$, расположенному в точке B. В силу симметрии достаточно рассмотреть верхнюю половину области. Очевидно, что на границе Г имеются две точки, в которых $\theta = \pm\pi/2$, и закон фильтрации справедлив во всей области течения. Пусть C и D – точки касания границы Г с осью x и в точке D $v=v_0$. В качестве области G вспомогательного переменного u выберем первый квадрант, где точкам D, A, B соответствуют $u=0$; a; 1, точке C — бесконечно удаленная точка. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\frac{dW}{du}=\frac{(1-a^2)q}{\pi}\frac{u}{(u^2-a^2)(1-u^2)},\qquad P(u)=\ln\frac{(a-u)(u-1)}{(a+u)(u+1)}\tag{1.4}$$

Согласно формулам (1.2) – (1.4)

$$z(u)=\frac{1}{\gamma}\ln\left\{1+Q\frac{1+a}{1-a}\left[\frac{1+a}{1-a}\ln\frac{u+a}{a(1+u)}-\frac{u}{u+a}-\frac{u}{u+1}\right]\right\}\tag{1.5}$$

где $Q=\gamma q/(\pi v_0)$. Из (1.5) найдем параметр γl ($2l$ – расстояние между источником и стоком)

$$\begin{gathered}\gamma l={}^1/_2\ln\varepsilon\\ \varepsilon=\left[1+\delta\left(\frac{1+a}{1-a}\ln\frac{1+a}{2a}-\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2}\right)\right]\times\\ \times\left[1+\delta\left(\frac{1+a}{1-a}\ln\frac{2}{1+a}-\frac{1}{2}-\frac{a}{1+a}\right)\right]^{-1},\qquad \delta=Q\frac{1+a}{1-a}\end{gathered}\tag{1.6}$$

Безразмерные координаты границы застойной зоны Г вычисляются по формулам

$$\frac{z}{2l}=\frac{1}{\ln\varepsilon}\left[\ln\sqrt{f_1^2(\eta)+f_2^2(\eta)}+i\,\mathrm{arctg}\frac{f_2(\eta)}{f_1(\eta)}\right]\tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}f_1(\eta)=1+\delta\left[\frac{1+a}{1-a}\ln\left(\frac{1+a}{2a}\sqrt{\frac{\eta^2+a^2}{\eta^2+1}}\right)+\frac{a^2-\eta^2}{2(a^2+\eta^2)}+\frac{a-\eta^2}{(1+a)(1+\eta^2)}\right]\\ f_2(\eta)=\delta\left[\frac{1+a}{1-a}\mathrm{arctg}\frac{\eta(1-a)}{a+\eta^2}-\frac{a\eta}{a^2+\eta^2}-\frac{\eta}{1+\eta^2}\right]\end{gathered}\tag{1.8}$$

При $\gamma\to0$ из формул (1.5) – (1.8) следует решение задачи для случая $\tau/\tau_0=1$ [1]. На фиг. 1 в безразмерных координатах $X=x/2l$, $Y=y/2l$ изображены (кривые *1–4*) границы застойных зон для случая $a=0.75$, $Q=-9$, 0, 20, 100 (начало координат для наглядности совмещено с источником). Им соответствуют значения $\gamma l=-0.1648$, 0, 0.1054, 0.1782.

Пример 2. Рассмотрим фильтрацию к системе источников с расходом $2q$, расположенных на прямой на равных расстояниях $2h$ один от другого, и к аналогичной системе стоков с расходом $-2q$, расположенных на прямой, параллельной первой. Расстояние между прямыми $2l$. Элемент течения изображен на фиг. 2, *а*. Пусть в потоке имеет место соотношение *а*) и в точке F $v=v_0$. Легко видеть, что закон фильтрации (0.1) справедлив во всей области течения. В качестве области G переменного u выберем прямоугольник с вершинами $F(0, 0)$, $C({}^1/_2, 0)$, $D({}^1/_2, i\tau/2)$, $E(0, i\tau/2)$, где точкам A и B соответствуют значения $u=a$ и b. Производная комплексного потенциала легко строится [11]

$$\frac{dW}{du}=\frac{q\alpha}{\pi}\frac{\vartheta_1(2u)}{\vartheta_1(u-a)\vartheta_1(u+a)\vartheta_1(u-b)\vartheta_1(u+b)}\tag{1.9}$$

где $\alpha=\vartheta_1'\vartheta_1(a-b)\vartheta_1(a+b)$, $\vartheta_1(u)$ – тета-функция для периодов 1, τ. По граничным условиям

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}\,P(\xi)=0,\quad b\leqslant\xi\leqslant{}^1/_2\\ \mathrm{Im}\,P(\xi)=\pi,\quad a\leqslant\xi\leqslant b;\qquad \mathrm{Im}\,P(\xi)=2\pi,\quad 0\leqslant\xi<b\\ \mathrm{Im}\,P(\xi+i\tau/2)=\pi+\gamma h,\quad 0\leqslant\xi\leqslant{}^1/_2.\\ \mathrm{Re}\,P(i\eta)=\mathrm{Re}\,P({}^1/_2+i\eta)=0,\quad 0\leqslant\eta\leqslant\tau/2\end{gathered}$$

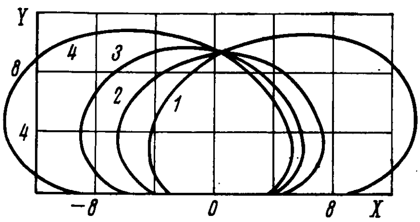
строится функция $P(i\eta)$

$$P(u)=\ln\{[\vartheta_1(u-a)\vartheta_1(u-b)][\vartheta_1(u+a)\vartheta_1(u+b)]^{-1}\}\tag{1.10}$$

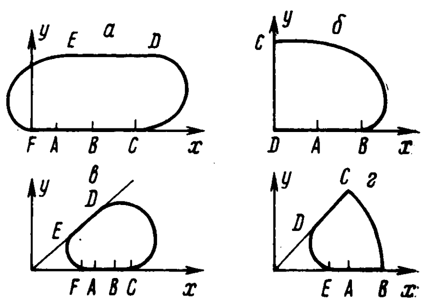
где $a+b={}^1/_2+\gamma h/(2\pi)$. Решение задачи дается формулами (1.2), (1.3), (1.9), (1.10). На фиг. 3 изображены границы застойных зон в координатах $X=x/l$, $Y=y/l$. Соответствующие параметры даны ниже:

N	a	b	τ	γl	Q	γh
1	0.1	0.3	0.5	−0.5256	0.7793	−0.6283
2	0.1	0.3	1.0	−0.3561	0.4995	−0.6283
3	0.1	0.2	0.5	−0.5349	2.0290	−1.2572
4	0.1	0.2	1.0	−0.3719	1.4000	−1.2572

Выше исследовались задачи, в которых твердые стенки параллельны оси x. Рассмотрим теперь общий случай задачи, когда твердые стенки имеют вид полигона. Будем считать, что в потоке имеются две свободные границы, заканчивающиеся на твердых стенках. Ввиду аналогии филь-



Фиг. 1



Фиг. 2

трации по закону (0.1) с течением идеальной весомой жидкости, при исследовании задачи можно использовать результаты [11]. В качестве области вспомогательного переменного $u=\xi+i\eta$ выберем прямоугольник G $(0<\xi<{}^1/_2,\ 0<\eta<\tau/2)$. Функцию Жуковского $\mathrm{X}(u)=\ln(v_0dz/dW)=s+i\theta$, где $s=\ln(v_0/v)$, будем искать в виде $\mathrm{X}(u)=\mathrm{X}_0(u)+f(u)$, причем $\mathrm{X}_0(u)$ — функция Жуковского для течения идеальной жидкости по рассматриваемой схеме в случае, когда на свободных границах $v=v_0$; $f(u)=\lambda+i\nu$ — неизвестная аналитическая в G_u и непрерывная в $\overline{G}_u$ функция.

Функции $\mathrm{X}_0(u)$ и $F(u)=|\varphi_0|dW/du$ (φ_0 — постоянная, имеющая размерность потенциала скорости) легко строятся по особенностям. При выбранном законе фильтрации в случае а) условия на свободных границах в дифференциальной форме запишутся в виде

$$e^{-s}ds/d\xi=-(\gamma/v_0)(d\varphi/d\xi)\cos\theta$$

где φ — потенциал скорости. Для определения функции $f(u)$ имеем аналогично [11] краевую задачу

$$e^{-\lambda_k}\lambda_k'=-\delta\rho_k\cos(T_k+\nu_k)$$

$$\mathrm{Im}\,f(i\eta)=\mathrm{Im}\,f({}^1/_2+i\eta)=0,\ \eta\in[0,\tau/2],\ \mathrm{Re}\,f({}^1/_2)=0 \tag{1.11}$$

$$\delta=\frac{\gamma|\varphi_0|}{v_0},\qquad \lambda_k+i\nu_k=f\left(\xi+ki\frac{\tau}{2}\right),\qquad \lambda_k'=\frac{d\lambda_k}{d\xi}$$

$$\rho_k=F(\xi+ik\tau/2),\ T_k=\mathrm{Im}\,\mathrm{X}_0(\xi+ik\tau/2),\ k=0,1$$

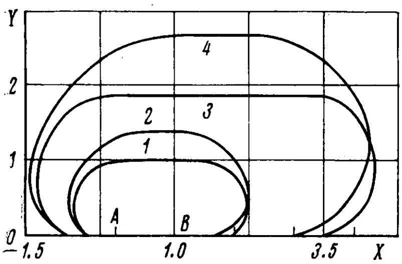
Краевая задача (1.11) сводится к одному операторному уравнению $\zeta=A\zeta$, где $\zeta\in B=\{\zeta=(\nu_0,\nu_1,\nu_2);\ \nu_0,\nu_1\in C,\ \nu_2\in E\}$, C — пространство функций, непрерывных в интервале $[0,{}^1/_2]$, E — пространство вещественных чисел, $\nu_2=\mathrm{Re}\,f({}^1/_2+i\tau/2)$, A — нелинейный оператор. Не останавливаясь на подробностях, отметим, что аналогично [11] доказываются теоремы об однозначной разрешимости операторного уравнения и соответствующей краевой задачи (1.11) при достаточно малых значениях δ, причем параметр δ играет роль числа Фруда в [11].

2. О решении задач для радиального закона изменения начального градиента. При решении задач фильтрации по закону (0.1) б), когда на свободных границах Г $v/v_0=\gamma r^n$, в потоке на любой окружности $r=\text{const}$, пересекающей Г, величина v должна принимать минимальное значение на Г.

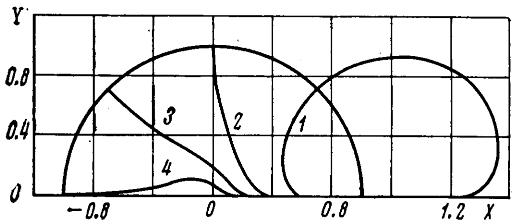
Рассмотрим аналитическую функцию

$$T=\frac{d\text{X}}{d(\ln z)}=\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+i\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial\alpha},\qquad z=re^{i\alpha}$$

Если на указанной окружности имеется не более одной точки, в которой $\operatorname{Im} T=0$, то на Г модуль скорости принимает минимальное значение.



Фиг. 3



Фиг. 4

Так как на Г $v=\gamma r^n$, то $(1/v)\partial v/\partial\alpha=0$, если $dr/d\alpha=0$. Следовательно, линии уровня $(1/v)\partial v/\partial\alpha=0$ выходят из точек на Г, где $\theta-\alpha=\pm\pi/2$. Если на Г таких точек не больше двух, то линии уровня либо соединяют их, либо кончаются на твердой стенке. При этом закон фильтрации (0.1) справедлив во всей области течения.

Покажем, что в случае б) можно получить точные решения некоторого класса задач плоской стационарной фильтрации по закону (0.1). Рассмотрим потенциальное течение жидкости в области, ограниченной прямолинейными стенками и одной или двумя свободными границами. Введем функцию $S(u)$ вспомогательного переменного u, изменяющегося в канонической области G

(2.1) $$S(u)=\text{X}(u)+\ln(\gamma z^n)=\ln(\gamma v_0 r^n/v)+i(\theta+n\alpha)$$

На свободных границах $\operatorname{Re} S(u)=0$. Пусть на прямолинейных стенках $\alpha=\text{const}$. Тогда на них $\operatorname{Im} S(u)=\theta+n\alpha=\text{const}$. Эти условия позволяют построить функцию $S(u)$ в области G. Найдя dW/du, введем функцию $F(u)=[\exp S(u)/(\gamma v_0)]dW/du$. Тогда $z^n dz=F(u)du$. Отсюда

(2.2) $$z=\left[(n+1)\int\limits_{u_0}^{u}F(u)\,du\right]^{1/(n+1)},\qquad n\neq-1$$

(2.3) $$z=\exp\int\limits_{u_0}F(u)\,du,\qquad n=-1$$

причем при $n<0$ начало координат должно находиться вне области течения.

Пример 1. Получим решение задачи, постановка которой дана в примере 1 п. 1. Выберем начало координат в середине расстояния между источником и стоком (на фиг. 2, *б* изображена правая половина области, источник расположен в точке A). Легко видеть, что закон фильтрации выполняется во всей области течения. Пусть u изменяется в полукруге $|u|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} u\geqslant 0$, причем точкам B, C, D, A области течения соответствуют значения $u=1, -1, 0, a$. Тогда

$$\frac{dW}{du}=\frac{q(1+a)}{\pi\sqrt{a}}\frac{u-1}{(u-a)(u-1/a)\sqrt{u}} \tag{2.4}$$

По граничным условиям

$$\operatorname{Re} S(e^{i\sigma})=0,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant\pi;\qquad \operatorname{Im} S(u)=0,\quad a<u\leqslant 1$$

$$\operatorname{Im} S(u)=\pi,\quad 0<u\leqslant a;\qquad \operatorname{Im} S(u)=\pi(1+n/2),\quad -1\leqslant u\leqslant 0$$

легко построить функцию $S(u)$

$$S(u)=\ln\,[u^{n/2}(u-a)/(1-ua)] \tag{2.5}$$

Решение задачи дается формулами (2.2) – (2.5). В частности, при $n=1$

$$\frac{z}{l}=\left\{\frac{\ln(1-au)-au(1-a)/(au-1)}{\ln(1-a^2)+a^2(1+a)}\right\}^{1/2}$$

Координаты границы застойной зоны имеют вид

$$\frac{z(e^{i\sigma})}{l}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1}{1-a^2}-\frac{a^2}{1+a^2}\right)^{-1/2}[\sqrt{\rho(\sigma)+m(\sigma)}+i\sqrt{\rho(\sigma)-m(\sigma)}]$$

$$\rho=\sqrt{m^2(\sigma)+t^2(\sigma)},\qquad m(\sigma)=(a-\cos\sigma)\frac{a(1-a)}{f(\sigma)}-\frac{1}{2}\ln f(\sigma)$$

$$t(\sigma)=\operatorname{arctg}\frac{a\sin\sigma}{1-a\cos\sigma}-a(1-a)\frac{\sin\sigma}{f(\sigma)},\quad f(\sigma)=1-2a\cos\sigma+a^2,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant\pi$$

Безразмерные физические параметры задачи выражаются через параметр a (v_0 – модуль скорости в точке B)

$$\frac{q}{\pi v_0 l}=\frac{a}{2}(1+a)^{-1/2}\{[(1+a)\ln(1-a^2)+a^2][\ln(1-a)+a]\}^{-1/2}$$

$$\frac{\gamma q}{\pi v_0}=\sqrt{a}\left\{2(1+a)\left[\ln\frac{1}{1-a}-a\right]\right\}^{-1}$$

Пример 2. Рассмотрим фильтрацию к системе источников с расходом $2q$ и к системе стоков с расходом $-2q$, расположенных соответственно на окружностях радиусов R_1 и R_2 на равных расстояниях один от другого. Элемент течения изображен на фиг. 2, *в*, точки A и B соответствуют источнику и стоку. Легко видеть, что закон фильтрации справедлив во всей области течения. Пусть в точке C $v=v_0$. Введем область вспомогательного переменного u, описанную в примере 2 п. 1, когда функция dW/du запишется в виде (1.9), а $S(u)$ совпадает с функцией $P(u)$ в формуле (1.10). При этом $a+b=[\pi+\alpha_0(n+1)]/(2\pi)$, где α_0 – угол между прямыми OC и OD. Решение задачи дается формулами (1.9), (1.10), (2.2), (2.3).

Рассмотрим потенциальное течение жидкости в области, ограниченной одной или двумя пересекающимися в начале координат прямолинейными стенками, свободной границей и линией постоянного потенциала $\varphi=\text{const}$, имеющей форму окружности с центром в начале координат. Пусть $\tau/\tau_0=\gamma/r$. Введем вспомогательное переменное u, изменяющееся в полукруге $|u|\leqslant 1$, $\operatorname{Im} u\geqslant 0$, и функцию $S(u)$, определяемую формулой (2.1) при $n=-1$. Тогда на свободной границе $\operatorname{Re} S(u)=0$, на прямолинейных стенках и на линии $\varphi=\text{const}$ $\operatorname{Im} S(u)=\text{const}$, что позволяет построить функцию $S(u)$ и, следовательно, решить задачу.

Отметим, что функции dW/du и $S(u)$ аналитически продолжимы на весь круг и при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ определяют течение в области, полученной инверсией рассматриваемой области относительно дуги окружности $\varphi=\text{const}$. Это позволяет свести проверку справедливости закона фильтрации (0.1) к рассуждениям, изложенным в начале п. 2.

Пример. Рассмотрим фильтрацию к системе стоков расхода $2q$, расположенных на окружности радиуса r_0 на равных расстояниях один от другого, в области с контуром питания $\varphi=\text{const}$ в виде окружности радиуса R. Элемент течения показан на фиг. 1, *в*, угол COB равен α_0. Пусть в точке E $v=v_0$. Будем считать, что в области изменения u точки E, A, B, C, D имеют соответственно координаты -1, $-a$, 0, c, 1. Нетрудно видеть, что

$$\frac{dW}{du}=\frac{Nqi}{\pi}\,\frac{1-u^2}{(u+a)(1+ua)\sqrt{u(c-u)(1-cu)}}$$

$$N=\sqrt{\frac{(a+c)(1+ac)}{ac}},\qquad S(u)=\ln\frac{u+a}{1+ua}$$

Из условия на свободной границе $\operatorname{Im} dX/d(\ln z)=0$ следует, что при $u=e^{i\sigma}$ $\operatorname{Im}[z(du/dz)(ds/du)]=0$, откуда $\cos\sigma=-2a/(1+a^2)$. Так как $0\leqslant\sigma\leqslant\pi$, то это уравнение имеет единственный корень и выбранный закон фильтрации справедлив во всей области течения. По формуле (2.3) получим

$$\frac{z}{R}=\exp\left[\frac{iNq}{\pi v_0\gamma}\int_0^u\frac{(1-t^2)\,dt}{(1+at)^2\sqrt{t(c-t)(1-ct)}}\right]\tag{2.6}$$

Отсюда, задавая параметры a, c, α_0, легко найти безразмерную абсциссу стока r_0/R, расход $Q_0=q/(\pi v_0\gamma)$ и координаты границы застойной зоны.

Отметим, что в случае $c=1$ (точки D и C сливаются) и $\tau=\text{const}$ решение данной задачи получено в [3] методом последовательных приближений. Из (2.6) при $c=1$ найдем

$$Z=X+iY=\frac{z}{R}=\exp\left\{-Q_0\frac{1+a}{a}\left[\frac{1+a}{a}\ln\frac{1+i\sqrt{au}}{1-i\sqrt{au}}-i\frac{\sqrt{a}(1-a)\sqrt{u}}{1+au}\right]\right\}$$

$$Q_0=\ln\frac{r_0}{R}\left[\frac{(1+a)^2}{2a}\ln\frac{1+a}{1-a}-1\right]^{-1}$$

Из условия $Q_0\leqslant\pi$, выполняющегося в точке C, вытекает, что

$$|Q_0|\leqslant\pi a[(1+a)^2\operatorname{arctg}\sqrt{a}-\sqrt{a}(1-a)]^{-1}=Q_*$$

Таким образом, для каждого значения r_0/R существует значение Q_*, такое, что при $Q_0\leqslant Q_*$ течение осуществляется по рассматриваемой схеме. При $Q_0>Q_*$ течение осуществляется по схеме, изображенной на фиг. 2, *г*. Координаты границы DE отыскиваются по формуле

$$Z(e^{i\sigma})=\exp\left\{-Q_0\frac{1+a}{a}\left[\frac{1+a}{2}\ln\frac{\sqrt{f(\sigma)}}{1+2\sqrt{a}\sin\sigma/2+a}+\frac{\sqrt{a}(1-a)^2\sin\sigma/2}{f(\sigma)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,i\frac{1+a}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{a}\cos\sigma/2}{1-a}-i\frac{\sqrt{a}(1-a^2)\cos\sigma/2}{f(\sigma)}\right]\right\}$$

$$f(\sigma)=1+2a\cos\sigma+a^2,\qquad 0\leqslant\sigma\leqslant\pi$$

На фиг. 4 изображены границы застойных зон *1–5*, соответствующие следующим значениям: $a=0.25$, $Q_0=kQ_*/4$, $k=1$, 2, 3, 4, -1. Абсцисса стока имеет значения 0.7153, 0.5116, 0.3660, 0.2618, 1.3980.

Авторы благодарят Р. С. Хамитову за помощь при проведении вычислений.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
2. *Алишаев М. Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1968.
3. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* О фильтрации вязкопластичной жидкости к стоку в криволинейном пласте. Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 5.
4. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* Струйные течения с двумя участками криволинейной твердой границы. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 12. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1975.
5. *Девликамов В. В., Хабибуллин З. А., Кабиров М. М.* Аномальные нефти. М., «Недра», 1975.
6. *Жуковский Н. Е.* Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1891, т. 22 (Полн. собр. соч., т. 3. М.– Л., Глав. ред. авиац. лит., 1936).
7. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
8. *Киселев О. М.* О кавитационном обтекании пластинки потоком тяжелой жидкости. Изв. вузов, Математика, 1963, № 6.
9. *Котляр Л. М.* Об одном случае струйного течения тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
10. *Гуревич М. И.* Теория течений со свободными поверхностями. В сб. «Итоги науки». Гидромеханика, т. 5, 1970. М., 1971.
11. *Киселев О. М., Котляр Л. М.* К задаче о течении тяжелой жидкости с двумя свободными поверхностями. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.