

ПАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН ТОЛМИНА — ШЛИХТИНГА В ТЕЧЕНИЯХ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Г. ВОЛОДИН, М. Б. ЗЕЛЬМАН

(Новосибирск)

Для течения типа пограничного слоя методом фазовой плоскости исследуется совместная эволюция пары волн Толмина — Шлихтинга в зависимости от чисел R и частот.

Важным этапом перехода ламинарного течения в турбулентное является область нелинейного развития, характеризующаяся широким спектром нелинейно-взаимодействующих возмущений. Для достаточно малых амплитуд в первых порядках малости асимптотическая теория [1, 2] предсказывает наряду с трехволновыми резонансами «нерезонансные» взаимодействия — самовоздействие и конкуренцию волн.

В течениях типа пограничного слоя условия резонанса эффективно реализуются при взаимодействии плоской волны Толмина — Шлихтинга с парой наклонных к направлению основного потока волн. При этом перенос энергии осуществляется в основном к наклонным волнам, в то время как закон развития плоской волны почти неизменен [1]. Тогда следует ожидать, что нелинейная деформация спектра плоских волн Толмина — Шлихтинга происходит прежде всего за счет их самовоздействия и конкуренции по крайней мере в начальной стадии нелинейного развития. Вопросам таких взаимодействий посвящены многие работы в теории плазмы, нелинейной оптики и радиофизики [3].

Эффекты самовоздействия волн Толмина — Шлихтинга изучались для течений типа пограничного слоя в работах [4, 5]. Было обнаружено, что в окрестности нейтральной кривой, соответствующей линейной теории, самовоздействие приводит к стационарным состояниям. При этом вторичные течения оказались устойчивыми в окрестности нижней ветви нейтральной кривой и неустойчивыми в окрестности верхней. Экспериментальное наблюдение парных взаимодействий в сдвиговом потоке проводилось в [6], где обнаружена стабилизация растущих по линейной теории возмущений и установление двухмодового стационарного режима. Следует ожидать, что и в течениях типа пограничного слоя развитие возмущений окажется существенно зависящим от конкуренции волн, простейшим случаем которой является двухволновое взаимодействие. При этом особый интерес представляют условия установления вторичных стационарных течений и характер переходных процессов при взаимодействии возмущений.

Рассмотрение парных взаимодействий в потоках такого типа имеет и самостоятельный интерес в связи с вопросом о влиянии вынужденных колебаний на переходную область. В частности, возможное объяснение эффектов, наблюдаемых при воздействии акустического поля (при больших длинах звуковых волн) на поток, заключается в предположении, что звук индуцирует в слое вихревое возмущение той же частоты, которое нелинейно взаимодействует с собственно волной Толмина — Шлихтинга.

1. Рассмотрим задачу о взаимодействии пары плоских волн Толмина — Шлихтинга в течениях типа пограничного слоя. Тогда безразмерная функция тока возмущения удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad L\psi = M(\psi, \psi)$$

$$L\psi = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - U''(y) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Delta^2}{R} \right) \psi$$

$$M(\psi, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta}{\partial y} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \psi$$

$$(1.2) \quad \psi_{t=0} = \varepsilon \sum_j \varphi_j(y) e^{-ik_j x} A_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (y=0, y \rightarrow \infty)$$

Используя метод асимптотических усреднений [2], будем искать решение (1.1), (1.2) в виде

$$\psi = \varepsilon \sum_j A_j \varphi_j(y) e^{i\theta_j(x,t)} + \sum_{n=2} \varepsilon^n w^{(n)}(x, y, t)$$

$$\theta_j = k_j x - \omega_r(k_j) t - i\omega_i(k_j) t$$

где связь $\omega_r + i\omega_i = \omega(k)$ задана дисперсионным уравнением линейной задачи.

При достаточно малых ε получим уравнение для комплексных амплитуд $A_j = A_j e^{im \omega_j t}$, справедливое в широком диапазоне значений чисел Рейнольдса R и k в области кривой нейтральной устойчивости

$$(1.3) \quad \frac{\partial A_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_j}{\partial x} = \text{Im} \omega_j A_j + \varepsilon \left(\alpha_{lm}^j A_m A_l + \right. \\ \left. + \varepsilon \zeta_{lm}^j A_l \frac{\partial A_m}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \beta_{lmn}^j A_l A_m A_n$$

Для пары волн Толмина — Шлихтинга, стационарных в $x=x_0$, система (1.3) принимает вид

$$(1.4) \quad v_j \frac{\partial A_j}{\partial x} = \text{Im} \omega_j A_j + \varepsilon^2 (\beta_{j-l}^j |A_j|^2 A_j + \beta_{j-l}^j |A_l|^2 A_j) \\ j, l = 1, 2; j \neq l; A_{j0} = A_j(x_0) \\ v_j = \frac{\partial \omega_r(k_j)}{\partial k}, \quad \beta_{j-l}^j = \frac{1}{\langle \varphi_j^+ \Delta_j \varphi_j \rangle} \langle \varphi_j^+ M_j(\varphi_l, w_{j-l}^{(1)}) \rangle \\ M_{l+m}(\varphi_l, \Phi_m) = i \{ k \varphi_l \Delta_m \Phi_m' - k_m \varphi_l' \Delta_m \Phi_m - \Phi_m' k_l \Delta_l \varphi_l + k_m \Phi_m \Delta_l \varphi_l' \} \\ \Delta_l = \left(\frac{d^2}{dy^2} - k_l^2 \right), \quad \langle f \rangle = \int_0^y f dy$$

Здесь штрих означает производную по y .

Функция $w_n^{(1)}$ удовлетворяет неоднородному уравнению Орра — Зоммерфельда с следующими граничными условиями:

$$L w_{m+l}^{(1)} = M_{l+m}(\varphi_l, \Phi_m)$$

$$w_{l+m}^{(1)} = \frac{dw_{l+m}^{(1)}}{dy} = 0 \quad (y=0)$$

$$\left(w_{l+m}^{(1)}, \frac{dw_{l+m}^{(1)}}{dy} \right) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty \text{ и } -l \neq m)$$

Для $l = -m$ $w_0^{(1)}$ однозначно определяется условиями на стенке.

Функции $\varphi_j(y)$, $\varphi_j^+(y)$ — решения прямого и сопряженного уравнения Орра — Зоммерфельда. В дальнейшем удобно воспользоваться качествен-

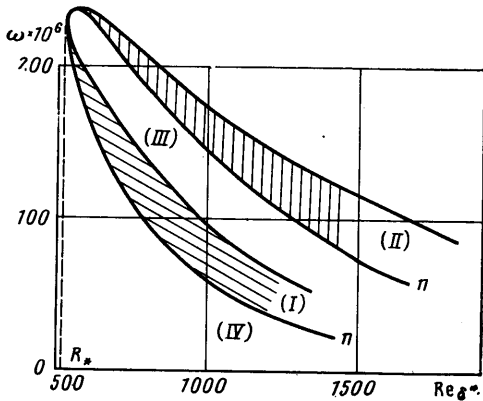
ными методами [7]. Преобразуем (1.4) к виду

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \left(-\operatorname{sgn}(\alpha_1) + y_1 \operatorname{sgn}(\beta_{11}) + \frac{\beta_{12}|\alpha_2|}{|\beta_{22}\alpha_1|} y_2 \right) 2|\alpha_1|y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \left(-\operatorname{sgn}(\alpha_2) + y_2 \operatorname{sgn}(\beta_{22}) + \frac{\beta_{21}|\alpha_1|}{|\beta_{11}\alpha_2|} y_1 \right) 2|\alpha_2|y_2 \end{aligned}$$

и будем рассматривать фазовые траектории решений полученной системы в плоскости (y_1, y_2)

$$y_j = \frac{\varepsilon^2 |A_j|^2}{v_j |\alpha_j|} |\beta_{jj}^j|, \quad \beta_{ji} = \operatorname{Re} \beta_{ji}^j, \quad \alpha_j = \frac{-\operatorname{Im} \omega(k_j)}{v_j}$$

2. Характер переходных процессов и тип установившихся режимов зависят от соотношения коэффициентов нелинейной связи и скоростей нарастания (затухания) возмущений в линейной теории. Для определения этих параметров методом ортогонализации [8] решалась задача Орра — Зоммерфельда. Расчеты проводились в диапазоне $R_\delta = (520 \div 1260)$, $\omega = (0.25 \cdot 10^{-4} \div 2.5 \cdot 10^{-4})$, где R_δ — число Рейнольдса, вычисленное по толщине вытеснения. Согласно полученным результатам для уединенной волны Толмина — Шлихтинга в течении типа пограничного слоя в зоне нейтральной кривой линейной устойчивости (n, n) существует область устойчивых (I) и неустойчивых (II) вторичных стационарных режимов (фиг. 1), что полностью совпадает с выводами [5, 6]. При всех других параметрах (незаштрихованная область) стационарные одноволновые режимы не существуют. Принадлежность взаимодействующих волн к определенной зоне фиг. 1 существенно влияет и на характер парного взаимодействия.

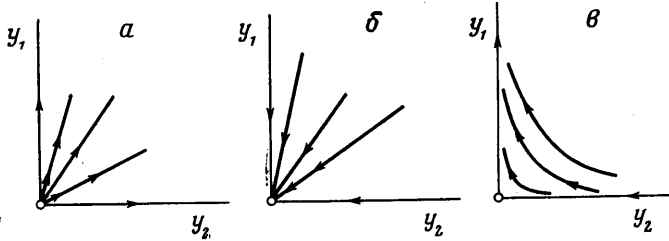


Фиг. 1

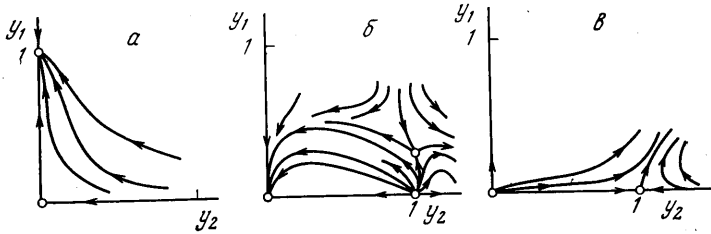
Начнем рассмотрение со случая, когда оба возмущения имеют характеристики вне области существования стационарных состояний самовоздействия. Для таких типов волн фазовые траектории представлены на фиг. 2 (2, а соответствует паре растущих, 2, б — паре затухающих и 2, в — паре, состоящей из растущего и затухающего возмущений). При этом эволюция каждого из возмущений качественно независима и происходит в соответствии с законами линейной теории. Взаимодействие устойчивой (по линейной теории) волны, не имеющей одноволнового стационарного состояния, с волнами из областей, в которых такие состояния возможны, описано фазовыми портретами 3, а, б. Видно, что при таких взаимодействиях имеется тенденция к подавлению возмущения из области IV и система стремится к установлению режима, соответствующего эффектам самовоздействия конкурирующей волны. Двухволновое стационарное неустойчивое состояние (фиг. 3, б) в целом не нарушает качественной автономии асимптотического поведения волновых амплитуд, хотя и смещает значения y_2 , при которых развивается неустойчивость.

Процессы, происходящие в случае, когда взаимодействующая пара состоит из волны области III и волн с параметрами, допускающими стац

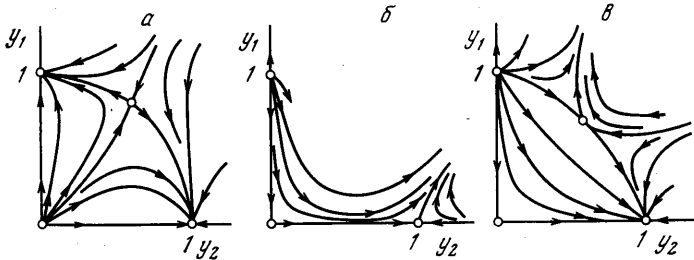
нарные устойчивые состояния, представлены фазовыми траекториями фиг. 3, в. При этом вторичное течение $y_1=0, y_2=1$ теряет устойчивость и поведение возмущений на начальном участке значений $x > x_0$ существенно зависит от граничных условий. (Взаимодействие волн из областей II и III изображается траекториями фиг. 3, а, но с противоположным направлением движения.)



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Наконец, обратимся к случаю пар, характеристики каждой из волн которых допускают стационарные одноволновые состояния. Типичный портрет системы взаимодействующих возмущений из области I дан на фиг. 4, а (для пары из области II направление движения противоположно).

Рассматриваемое взаимодействие приводит к появлению неустойчивого двухволнового стационарного режима с амплитудами

$$y_i = \frac{-\operatorname{sgn}(\alpha_j) \operatorname{sgn}(\beta_{ii}) + \alpha_i \beta_{ji} / |\beta_{ii} \alpha_j|}{\operatorname{sgn}(\beta_{jj}) \operatorname{sgn}(\beta_{ii}) - \beta_{ji} \beta_{ij} / |\beta_{ii} \beta_{jj}|}, \quad i \neq j$$

В зависимости от условий при $x=x_0$ система асимптотически стремится к установлению одноволнового режима, соответствующего стационарному состоянию одной из волн. Второе возмущение подавляется. (Волны области II в зависимости от начальных амплитуд одновременно растут или затухают.)

Характер нерезонансного взаимодействия волны, имеющей устойчивое одноволновое стационарное состояние (I), с волной из области неустойчивого стационарного состояния (II) существенно зависит от величины чисел Рейнольдса. Фиг. 4, б, в иллюстрирует качественный вид фазовых траекторий для $R_s = 900$ и 1200 соответственно. Видно, что в рассматриваемом интервале значений R имеет место бифуркация, соответствующая изменению числа равновесных состояний. Возникновение нового стационарного состояния приводит к тому, что появляется область значений $y_{1,2} = y_{1,2}(x_0)$ возмущений, которые эволюционируют к одноволновому устойчивому вторичному режиму $y_1 = 0, y_2 = 1$. Вне этой области начальных значений амплитуд происходит раскачка обеих волн. В отличие от наблюдавшихся в сдвиговых течениях [7] двухволновые стационарные состояния в потоках типа пограничного слоя неустойчивы (следует отметить, что данное рассмотрение справедливо и для волн, взаимодействующих во времени $x \rightarrow t$).

4. Парное нелинейное взаимодействие — один из механизмов влияния искусственных возмущений на переходную область. Конкурируя с «естественной» волной Толмина — Шлихтинга, индуцированное возмущение способно повлиять на характер процесса в области нелинейного развития. Результат такого влияния зависит от параметров возбуждаемой волны.

Оказалось, что возбуждение достаточно интенсивных колебаний внутри и в окрестности верхней ветви нейтральной кривой линейной устойчивости приводит к перераспределению спектра нарастающих волн. В то же время индуцированные вне этих областей возмущения качественно не изменяют характера развития неустойчивостей (независимо от величины чисел R).

Данные выводы качественно согласуются с наблюдениями [9], если предполагать, что наблюдаемые эффекты обусловлены взаимодействием индуцированного звуковым полем возмущения с волной Толмина — Шлихтинга максимальной амплитуды.

Авторы благодарят В. Я. Левченко и Б. Ю. Скобелева за внимание и полезное обсуждение работы.

Поступила 25 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Usher J. R., Craik A. D. D., Hendriks F. Nonlinear wave interactions in shear flows, pt 2. Third-order theory, J. Fluid Mech., 1975, vol. 70, pt 3.
2. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1974, № 13, вып. 3.
3. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, № 2.
4. Лизачев О. А., Штерн В. Н. Автоколебательное течение в пограничном слое. ПМТФ, 1975, № 4.
5. Гапонов С. А., Скобелев Б. Ю. Вторичные автоколебательные режимы в течении Блазиуса. В сб. «Аэрофизические исследования», вып. 5. Новосибирск, 1975.
6. Miksad R. W. Experiments on nonlinear interactions in the transition of free shear layer. J. Fluid Mech., 1973, vol. 59, pt 1.
7. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М., «Мир», 1969.
8. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.
9. Поляков Н. Ф. Индуцирование гидродинамических волн в ламинарном пограничном слое продольным звуковым полем. Симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений. Сухуми, 1975. (Сб. докл.) М., «Наука», 1975.