

ФОРМИРОВАНИЕ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СЛЕДА ПРИ МГНОВЕННОМ СТАРТЕ ПЛАСТИНЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

И. И. ЛИПАТОВ, В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

Рассмотрено нестационарное течение, возникающее в несжимаемой жидкости, если в начальный момент времени пластина конечной длины начинает двигаться с постоянной скоростью в своей плоскости.

Для случая бесконечной пластины имеется простое точное решение уравнений Навье — Стокса, полученное Рэлеем. Случай движения полубесконечной пластины также рассматривался рядом авторов. Получены приближенные решения в различных постановках, для полных нестационарных уравнений пограничного слоя постановка задачи исследована Стюартсоном (например, [1-3]), численное решение задачи нестационарным методом проведено в [4].

Основное внимание в данной работе уделено исследованию области взаимодействия невязкого потока с пограничным слоем вблизи конца пластины. Попутно получено решение задачи для следа, а также дано новое численное решение для пограничного слоя на пластине.

1. Рассмотрим обтекание пластины длиной l потоком вязкой несжимаемой жидкости. Пусть в момент времени $t=0$ пластина начинает двигаться с постоянной скоростью u_∞ в своей плоскости. Введем безразмерную декартову систему координат (x, y) , начало которой совпадает с задней кромкой пластины, и ось x направлена вдоль пластины в сторону следа, так что координаты передней кромки равны $(-1, 0)$. Предполагается, что число Рейнольдса $R=u_\infty l/\nu$ велико (ν — кинематический коэффициент вязкости). Тогда в рамках классической теории пограничного слоя в первом приближении вне пограничного слоя и следа имеем равномерный поток с компонентами скорости $u=1, v=0$, где $u_\infty u, u_\infty v$ — проекции скорости на оси x, y соответственно.

Вблизи поверхности пластины и в следе на длинах $x=O(1)$ необходимо решать следующую задачу для уравнений нестационарного пограничного слоя:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$-1 < x < 0, \quad u(\tau=0, x, Y > 0) = 1, \quad V(\tau, x, Y=0) = 0$$

$$u(\tau, x, Y \rightarrow \infty) = 1, \quad y = R^{-1/2} Y, \quad v = R^{-1/2} V, \quad \tau = t u_\infty / l$$

Заметим, что задача для полубесконечной пластины инвариантна относительно группы преобразований

$$u \rightarrow u, \quad V \rightarrow a^{-1/2} V, \quad x \rightarrow ax, \quad \tau \rightarrow a\tau, \quad Y \rightarrow a^{1/2} Y$$

Для изучения свойств решения при малых и больших значениях τ введем новые переменные

$$(1.2) \quad \xi = \tau/(x+1), \quad z = Y/\tau^{1/2}, \quad \psi = \tau^{1/2} f(\xi, z)$$

Здесь ψ — функция тока.

Подстановка (1.2) в (1.1) дает

$$(1.3) \quad \frac{\partial f^3}{\partial z^3} + \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \xi \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial z} - \xi^2 \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$

$$z=0, f=\partial f/\partial z=0, z \rightarrow \infty \text{ при } \xi \rightarrow 0, \partial f/\partial z \rightarrow 1$$

Из физических соображений очевидно, что максимальная скорость переноса возмущений вдоль течения за счет конвекции равна скорости внешнего потока, $u_e=1$. Поэтому для $\xi < 1$ должно сохраняться решение Рэлея, дающее (1.3) при $0 < \xi < 1$

$$(1.4) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-1/2 z^2} dz$$

Формула (1.4) удовлетворяет при $\xi < 1$ задаче, поскольку внутри пограничного слоя $u \leq 1$ и коэффициент при конвективном члене в (1.3) имеет знак выражения

$$(1.5) \quad 1 - \xi \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

Выражение (1.5) при $\xi \leq 1$ неотрицательно и поэтому (1.4) допускает интегрирование в сторону возрастания ξ . Однако при $\xi > 1$ выражение (1.5) меняет знак при достаточно больших значениях η . Решение для $1 < \xi < \infty$ зависит от граничного условия на передней кромке. Начинается постепенный переход к решению Блазиуса.

Для описания поведения решения при $\xi \rightarrow \infty$ введем переменные:

$$(1.6) \quad \xi = (x+1)/\tau, \quad \eta = Y/(x+1)^{1/2}, \quad \psi = (x+1)^{1/2} \varphi(\xi, \eta)$$

Уравнение (1.1) принимает вид

$$(1.7) \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = -\xi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \xi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right)$$

В диапазоне $0 < \xi < 1$ коэффициент, определяющий направление передачи информации, везде знакопеременный по η , при $\xi=0$ получаем решение Блазиуса, удовлетворяющее условиям:

$$(1.8) \quad \eta=0, \quad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0; \quad \eta \rightarrow +\infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \rightarrow 1$$

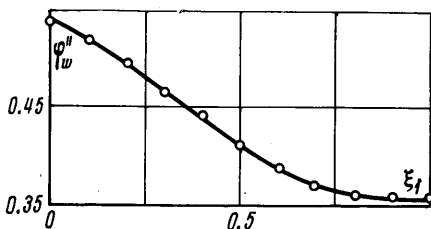
На другом конце интервала при $\xi=1$ в качестве «начального» условия необходимо использовать решение (1.4), принимая $\tau=x+1$, т. е. $z=\eta$.

Система (1.7), (1.8) была проинтегрирована численно при помощи метода конечных разностей, похожего на те, которые применяются при расчете отрыва. Производные по ξ (1.7) аппроксимированы с учетом направления передачи информации; так, первый член в правой части (1.7) аппроксимировался с использованием правосторонних разностей, а соответственно группа конвективных членов в скобках аппроксимировалась левосторонними разностями. Для квазилинеаризации уравнения (1.7) и для формирования разностей по ξ использовалось решение, полученное на предыдущей итерации, тогда линейное дифференциальное уравнение третьего порядка для φ решалось при $\xi=\text{const}$ методом прогонки. В качестве начальной итерации для поля решения было взято распределение вида

$$\varphi^0 = \xi \varphi_0^0 + (1-\xi) \varphi_1^0$$

где φ_0^0 — решение уравнения (1.4) для $z=\eta$, φ_1^0 — решение уравнения (1.7) при $\xi=0$.

Численное решение задачи о старте пластины было получено в работе [4], где приводилось интегрирование системы уравнений (1.1), содержащей три независимые переменные. На фиг. 1 приведено сравнение распределений $\varphi''(\xi_1)$, где $\xi_1 = 1 - \zeta$, полученных в настоящей работе и в [4]. Можно видеть, что результаты расчетов практически совпадают, хотя итерационное решение, как и во многих других задачах, требует меньших затрат машинного времени.



Фиг. 1

2. Рассмотрим течение при $x > 0$, т. е. в области следа. Сначала для простоты ограничимся $\tau < (x+1)$ или $\xi < 1$. Этот случай точно соответствует обтеканию задней кромки пластины, которая простирается вперед до бесконечности.

В качестве граничного условия при $x=0$ имеем решение (1.4). Вместо условия прилипания — второе условие в (1.1) — имеем условие симметрии на оси следа

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial Y}(\tau, x > 0, Y=0) = 0$$

Уравнение (1.1) остается справедливым и для следа. Введем переменные (1.2), заменив ξ на $\xi_1 = x/\tau$

$$(2.2) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\xi_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \xi_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}$$

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\xi_1=0} = u_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\xi_1 \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

$$z \rightarrow +\infty, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \rightarrow 1, \quad z=0, \quad f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Рассмотрим решение задачи (2.2), (2.3) вблизи задней кромки пластины при $\xi_1 \rightarrow 0$. Можно заметить, что начальное условие (2.3) не удовлетворяет граничному условию симметрии — последнему из формул (2.3). Подобный тип особенности рассматривался для стационарной задачи Гольдштейном [5]. Решение задачи (2.2) при $z \sim 1$ можно искать в виде

$$(2.4) \quad f(z, \xi_1) \sim f_0(z) + \dots, \quad \frac{\partial f_0}{\partial z} = u_0(z)$$

Но (2.4) не удовлетворяет последнему условию (2.3). Поэтому при малых z и $\xi_1 \rightarrow 0$ необходимо ввести следующие переменные:

$$(2.5) \quad z = \xi_1^{1/2} z_1, \quad f = \xi_1^{3/2} f_1(\xi_1, z_1)$$

Тогда для подследа, в котором происходит сглаживание разрыва, в величине трения при переходе пограничного слоя в след ($z_1 \sim 1$)

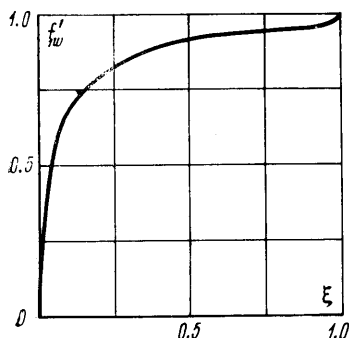
$$\frac{\partial^3 f_1}{\partial z_1^3} + \frac{2}{3} f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right)^2 = \xi_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1 \partial \xi_1} - \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} \right) -$$

$$- \frac{1}{\xi_1} \xi_1^{3/2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \frac{1}{2} z_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial z_1^2} \right)$$

$$(2.6) \quad z_1=0, \quad f_1=0 \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial \tau^2}=0, \quad z_1 \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Последнее граничное условие получается при сращивании решений в областях $z=0(1)$ и $z_1=0(1)$. Согласно (2.6) в малой окрестности задней кромки при $\xi_1 \rightarrow 0$ решение в первом приближении оказывается квазистационарным, так как левая часть (2.6) не содержит нестационарного члена. Этот результат до известной степени неожиданный, поскольку решение задачи на пластине при $x \sim 1$ получается из уравнений, содержащих «нестационарный» член, хотя может не содержать конвективного.

Информация о нестационарном пограничном слое на пластине входит в первое приближение для задачи (2.6) только в виде последнего граничного условия. Это обстоятельство существенно упрощает решение задачи для пластины конечной длины при $\xi > 1$. Оказывается достаточным заменить в указанном граничном условии значение безразмерного трения, равное в решении Рэлея (1.5) величине $\pi^{-1/2}$ и меняющееся при $1 \leq \xi < \infty$ от этого значения до величины, соответствующей стационарному решению Блазиуса. Таким образом завершается анализ нестационарного анализа решения Гольдштейна, имеющего двухслойную структуру пограничного слоя.



Фиг. 2

Некоторые результаты численного решения задачи в области следа, полученные для полубесконечной пластины, имеющей только заднюю кромку, показаны на фиг. 2.

3. Приведенные выше результаты для областей $x \sim 1$, очевидно, непригодны вблизи конца пластины при малых $t \sim \nu/u_\infty^2$, когда толщина вязкого слоя соизмерима с длиной следа

$$\sqrt{\nu t} \sim u_\infty t \sim \Delta x$$

Если исследовать решение задачи для больших значений «нестационарного» числа Рейнольдса

$$(3.1) \quad R_t = \sqrt{\frac{t u_\infty^2}{\nu}} \gg 1$$

то можно ожидать, что полученные результаты останутся непригодными вблизи носка и конца пластины, как это имеет место для стационарного решения.

Ограничим свое внимание окрестностью конца пластины, где взаимодействие вносит большой «вклад» в поправку к сопротивлению трения Блазиуса на стационарном режиме [6]. Сначала для простоты рассмотрим бесконечную вперед пластину (или конечную, но при $\xi < 1$). Чтобы показать, что первое приближение нельзя применять при $|x| < 1$, оценим возмущения давления, вносимые толщиной вытеснения пограничного слоя во внешний поток, и величину возмущений скорости, возникающих из-за этого в пограничном слое. При такой процедуре область непригодности первого приближения определится как область, в которой первое и второе приближения (или скорости и их возмущения) имеют одинаковый порядок величин.

Характерная длина и толщина следа

$$(3.2) \quad \Delta x_0 \sim t u_\infty, \quad \delta_0 \sim (\nu t)^{1/2}$$

здесь и ниже индексом нуль отмечаются для удобства размерные параметры, совпадающие по обозначениям с соответствующими безразмерными величинами, введенными выше.

Из (3.2) следует, что на длинах $x \sim 1$ отношение индуцированного градиента давления к характерному «нестационарному» или другому члену (1.1) первого приближения имеет порядок $R_i^{-1/2}$.

Однако в соответствии с (2.5) и (2.6) на малых расстояниях от задней кромки в области $z_1 \sim 0(1)$ происходит быстрое изменение толщины пограничного слоя.

$$(3.3) \quad \Delta \delta_0 \sim (\nu t)^{1/2} (x_0/u_\infty t)^{1/2} \\ u_0/u_\infty \sim (x/u_\infty t)^{1/2}$$

Вторая формула (3.3) дает оценку величины скорости в слое $z_1 = 0(1)$. Используя (3.3) и линейную теорию для невязкого течения, обнаруживаем, что существуют $\Delta x \ll 1$, на которых индуцируемые за счет $\Delta \delta_0$ во внешнем потоке градиенты давления имеют тот же порядок, что конвективные и вязкие члены уравнений Навье — Стокса для области $z_1 = 0(1)$.

Приравнявая порядки индуцированного градиента давления и конвективного члена

$$\rho u_\infty^2 (\nu t)^{1/2} (x_0/u_\infty t)^{1/2} x_0^{-2} \sim \rho u_\infty^2 (x_0/u_\infty t)^{2/3} x_0^{-1}$$

получаем размер области неприменимости краевой задачи (1.1), (1.2)

$$(3.4) \quad x_0/u_\infty t \sim (\nu/u_\infty^2 t)^{3/5} = R_i^{-3/5}$$

Приведем масштабы других переменных в обнаруженной зоне взаимодействия

$$(3.5) \quad y_0/(\nu t)^{1/2} \sim R_i^{-1/5}, \quad u/u_\infty \sim R_i^{-1/5}, \quad v/u_\infty \sim R_i^{-3/5}, \quad \Delta p/\rho u_\infty^2 \sim R^{-4/5}$$

Легко видеть, что из-за квазистационарности течения оценки (3.4), (3.5) соответствуют обычным оценкам для стационарного течения типа [7, 8], только вместо R используется параметр R_i , включающий время.

4. Выше для случая полубесконечной пластины было показано, что вблизи ее задней кромки развивается область свободного взаимодействия, течение в которой квазистационарно. Поэтому для более общего случая пластины конечной длины ограничим рассмотрение тем, что сведем соответствующую краевую задачу к виду, в котором для стационарного случая в работе [9] получено численное решение.

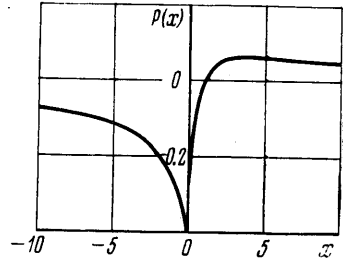
Для этого введем обозначение

$$(4.1) \quad \delta(\tau) = (\partial u / \partial Y)_{Y=0, x=0}$$

Заметим, что при $\tau \rightarrow \infty$ величина $\delta(\infty) = 0(1)$ и определяется решением Блазиуса. При $\tau \rightarrow 0$, используя (1.5), получаем $\delta(\tau) \sim \tau^{1/2}$.

Теперь можно, используя оценки (3.5) или аналогичные результаты работ [7, 8], ввести масштабы независимых переменных и асимптотические представления функций для области взаимодействия

$$(4.2) \quad x = \varepsilon^{3/5} \delta^{2/5} X, \quad y = \varepsilon^{2/5} \delta^{3/5} Z, \quad \varepsilon = (\nu/u_\infty t)^{1/2} \\ u = \varepsilon^{1/5} \delta^{-1/5} U + \dots, \quad v = \varepsilon^{2/5} \delta^{-2/5} W + \dots, \quad p \sim p_\infty + \rho u_\infty^2 \varepsilon^{1/5} \delta^{-1/5} P$$



Фиг. 3

Подстановка (4.2) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом характера изменения функции $\delta(\tau)$ и ограничения (3.1) приводит к обычной задаче теории свободного взаимодействия, выведенной для стационарного течения в [7, 8] и решенной численно в [9]

$$(4.3) \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \quad U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{dP}{dX} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}$$

$$U=W=0, \quad Z=0, \quad X<0$$

$$W=0, \quad \partial W/\partial Z=0, \quad Z=0, \quad X>0$$

Внешние граничные условия получаются из сращивания с основной частью пограничного слоя и внешним невязким потоком [7, 8]

$$U \rightarrow Z \rightarrow A(x), \quad P(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A'(x_1)}{X - X_1} dx_1$$

Заметим, что при $R_i \sim 1$ вместо (4.3) получаются уравнения Навье — Стокса.

Вид масштабов (4.2) определяет закон увеличения размеров области свободного взаимодействия на конце пластины и описывает плавный выход на стационарное решение [7-9]. В качестве иллюстрации полученных результатов приведем на фиг. 3 решение задачи (4.3) для распределения возмущений давления вблизи конца пластины и в начале следа.

Поступила 5 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
2. Laminar boundary layers. L. Rosenhead, Ed. Oxford, Clarendon Press, 1963.
3. Stewartson K. The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford, Clarendon Press, 1964.
4. Hall M. G. The boundary layer over an impulsively started flat plate. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1969, vol. 310, No. 1502.
5. Goldstein S. On the two-dimensional steady flow of a viscous fluid behind a solid body, pt. 1. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A. 1933, vol. 142, No. 847.
6. Dennis S. C. R., Chang G. Z. Numerical integration of the Navier-Stokes equations for steady two-dimensional flow. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 12.
7. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate 2. Mathematika, 1969, vol. 16, No. 1.
8. Messiter A. F. Boundary-layer flow the trailing edge of a flat plate. SIAM J. Appl. Math., 1970, vol. 18, No. 1.
9. Jobe C. E., Burggraf O. R. The numerical solution of the asymptotic equations of trailing edge flow. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1974, vol. 340, No. 1620.