

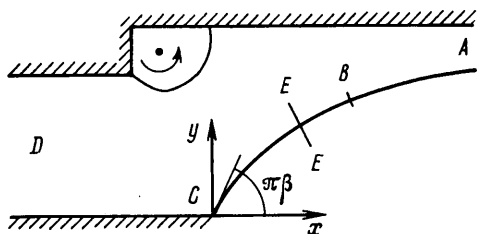
О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

О. М. КИСЕЛЕВ, Э. Ф. РАПОПОРТ

(Казань)

В работе [1] исследована задача о струйном обтекании упругой пластины. Ниже в точной нелинейной постановке исследуется задача о струйном обтекании упругой цилиндрической оболочки, заземленной одним концом и имеющей второй конец свободным. При некоторых ограничениях на форму оболочки доказывается однозначная разрешимость задачи и предлагается метод ее решения. Приводятся некоторые результаты расчетов. Дается также постановка и решение обратной задачи статической гидроупругости.

1. В плоскости $z=x+iy$ рассматривается установившееся потенциальное течение несжимаемой жидкости, ограниченное твердым полигоном ADC , упругой цилиндрической оболочкой CB и свободной поверхностью BA , вдоль которой модуль скорости V сохраняет постоянное значение V_0 (на фиг. 1 изображена одна из возможных схем течения). Оболочка, заземленная в точке C и составляющая в ней угол $\pi\beta$ с твердой стенкой, отделяет движущуюся жидкость от зоны с постоянным давлением p_0 , равным давлению на свободной поверхности. Начало координат выбрано в точке C , ось x направлена в этой точке вдоль твердой стенки.



Фиг. 1

В ненагруженном состоянии форма оболочки задается уравнением

$$(1.1) \quad \theta_1 = F(t), \quad t = s/L, \quad 0 \leq s \leq L$$

Здесь θ_1 — угол, составленный касательной к сечению оболочки в недеформированном состоянии с осью x , s — дуговая абсцисса кривой CB , отсчитываемая от точки C , L — длина кривой CB .

Предположим, что справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява и что срединная поверхность оболочки не подвергается растяжению (сжатию) при деформации. При этом с помощью закона Гука получается соотношение

$$(1.2) \quad M = D(1/R - 1/R_1)$$

Здесь M — изгибающий момент, D — жесткость оболочки ($D = \text{const}$), R_1 и R — радиус кривизны поперечного сечения оболочки до изгиба и после него.

Из условий равновесия участка BE оболочки (E — произвольная точка кривой CB) следует [1, 2]:

$$(1.3) \quad M''' + \frac{R'}{R} M'' + \frac{1}{R^2} M' = -p' - \frac{R'}{R} (p - p_0)$$

$$(1.4) \quad Q = -M', \quad T = (M'' + p - p_0) R$$

Здесь p — давление в жидкости, T и Q — продольная и поперечная силы, действующие на дугу CE в нормальном сечении E , штрихами обозначено дифференцирование по s .

В точке B $M=Q=T=0$, поэтому

$$(1.5) \quad R=R_1, \quad R'=R_1', \quad R''=R_1'' \quad (s=L)$$

Подставив (1.2) в (1.3) с учетом (1.1), (1.5) и уравнения Бернулли, получим

$$(1.6) \quad \theta' = \frac{1}{L} \dot{F}(t) + \frac{\rho V_0^2}{2D} \int_L^{\cdot} ds \int_L^{\cdot} \left(\frac{V^2}{V_0^2} - 1 \right) ds - \\ - \frac{1}{2} \int_L^{\cdot} ds \int_L^{\cdot} \theta'^2 ds + \frac{1}{2L^2} \dot{F}^2(1) \int_L^{\cdot} ds \int_L^{\cdot} \theta' ds + \\ + \frac{1}{L^2} \int_L^{\cdot} ds \int_L^{\cdot} \theta' ds \int_L^{\cdot} \theta' \dot{F}(t) ds$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси x , ρ — плотность жидкости, точками обозначено дифференцирование по t .

2. Пусть в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ области течения соответствует область $G = \{|\zeta| < 1, 0 < \sigma = \arg \zeta < \pi/2\}$, причем полигону AC соответствует отрезок $\eta=0, 0 \leq \xi \leq 1$, оболочке CB — дуга $\zeta = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \pi/2$, свободной поверхности BA — отрезок $\xi=0, 0 \leq \eta \leq 1$.

Производная от комплексного потенциала $dW/d\zeta$ в плоскости ζ легко строится по нулям и полюсам [3] (их число и кратность определяются схемой течения, их положение в замкнутой области G считается известным). Производная от потенциала скорости φ на BC имеет вид

$$(2.1) \quad d\varphi/d\sigma = |dw/d\zeta| = \varphi_0 f(\sigma)$$

где φ_0 — приращение потенциала скорости вдоль дуги BC , $f(\sigma)$ — известная непрерывная функция, имеющая нули первого порядка в точках $\sigma=0, \pi/2$ положительная при $\sigma \in (0, \pi/2)$.

Функцию Жуковского

$$(2.2) \quad \chi(\zeta) = \ln(V_0 dz/dw) = r + i\theta, \quad r = \ln V_0/V$$

будем искать в виде суммы

$$(2.3) \quad \chi(\zeta) = \chi_0(\zeta) + \omega(\zeta)$$

Здесь $\chi_0(\zeta)$ — функция Жуковского для течения жидкости по заданной схеме, но при условии, что упругая пластина заменена прямолинейным отрезком, составляющим с осью x угол $\pi\beta$. Считая, что образы вершин полигона в плоскости ζ заданы, зная углы наклона звеньев полигона, а также характер и положение особых точек функции $\chi_0(\zeta)$, последнюю можно построить в явном виде [3].

Задача сводится к определению функции $\omega(\zeta)$, регулярной в G и непрерывной в \bar{G} . На AB и CA функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять условиям

$$(2.4) \quad \text{Im } \omega(\zeta) = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad \text{Re } \omega(i\eta) = 0 \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

Введем обозначения

$$\lambda = \text{Re } \omega(e^{i\sigma}), \quad \mu = \text{Im } \omega(e^{i\sigma}), \quad r_0 = \text{Re } \chi_0(e^{i\sigma}) \\ h = fe^{r_0}, \quad g = fe^{-r_0}, \quad \dot{\mu} = d\mu/d\sigma, \quad v = \dot{\mu}h^{-1}$$

Будем считать, что $|\beta| \leq 1/2$. При этом h, g — непрерывные неотрицательные функции.

Согласно (2.1) — (2.3) на контуре CB

$$(2.5) \quad \theta = \pi\beta + \mu, \quad \frac{V_0}{V} = e^{r_0 + \lambda}, \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\Phi_0}{V_0} f e^{r_0 + \lambda}$$

Используя (2.5), из (1.6) получим следующее условие для функции $\omega(\zeta)$ на дуге $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leq \sigma \leq \pi/2$:

$$(2.6) \quad \nu = -e^\lambda \int_{\pi/2}^{\sigma} h e^\lambda \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon (h e^\lambda - g e^{-\lambda}) + \frac{1}{2} \nu^3 h e^{-2\lambda} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \nu h \gamma^2 \hat{F}^2(1) - \nu h \gamma^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \nu h \hat{F}(t) d\sigma \right] d\sigma \right\} d\sigma + \gamma e^\lambda \hat{F}(t) \\ \varepsilon = \frac{\rho \Phi_0^3}{2 D V_0}, \quad \gamma = \frac{\Phi_0}{L V_0} = \left(\int_0^{\pi/2} h e^\lambda d\sigma \right)^{-1}, \quad t = \gamma \int_0^{\sigma} h e^\lambda d\sigma$$

Таким образом, функция $\omega(\zeta)$ должна удовлетворять крайевым условиям (2.4), (2.6) (для изученной ранее в [1] задачи обтекания пластины в крайнем условии (2.6) $\hat{F}(t) = \text{const}$).

3. Аналитическая функция $\omega(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (2.4), выражается через $\mu(\sigma)$ по формуле [4]

$$(3.1) \quad \omega(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mu(t) \ln \frac{1 - 2\zeta \cos t + \zeta^2}{1 + 2\zeta \cos t + \zeta^2} dt$$

откуда следует:

$$(3.2) \quad \lambda = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mu(t) \ln \left| \frac{\cos \sigma - \cos t}{\cos \sigma + \cos t} \right| dt$$

Пусть $\kappa = \kappa(\sigma)$ — вещественная функция, принадлежащая пространству C функций, непрерывных на интервале $[0, \pi/2]$. Введем операторы B, A, K

$$(3.3) \quad B\kappa = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(\tau) \ln \left| \frac{\cos \sigma - \cos \tau}{\cos \sigma + \cos \tau} \right| d\tau$$

$$(3.4) \quad A\kappa = -a \int_{\pi/2}^{\sigma} h a \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon (h a - g a^{-1}) + \frac{1}{2} \kappa^3 h a^{-2} - \frac{1}{2} \kappa h b^2 \hat{F}^2(1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \kappa h b^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa h \hat{F}(c) d\sigma \right] d\sigma \right\} d\sigma + b a \hat{F}(c) \\ a = e^{2h\kappa}, \quad b = \left(\int_0^{\pi/2} h a d\sigma \right)^{-1}, \quad c = b \int_0^{\sigma} h a d\sigma$$

$$(3.5) \quad K\kappa = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \kappa(\tau) \ln \frac{1 - 2\zeta \cos \tau + \zeta^2}{1 + 2\zeta \cos \tau + \zeta^2} d\tau$$

Из соотношений (2.6), (3.2)–(3.4) следует, что функция v является решением операторного уравнения $v = Av$. Справедливо и обратное утверждение: если функция $v = v(\sigma)$ из пространства C удовлетворяет уравнению $v = Av$, то функция $\omega(\xi) = Kvh$ дает решение краевой задачи (2.4), (2.6). Действительно, функция $\omega(\xi) = Kvh$ согласно (3.5), регулярна в G , непрерывна в \bar{G} , удовлетворяет условиям (2.4) и $\mu = vh$. Из условия $v = Av$ следует, что (2.6) также выполняется.

4. Как нетрудно показать [3], оператор B переводит пространство C в себя, причем $\|B\| = 1.16624$. Оператор A также переводит C в себя. Пусть $S(q)$ — множество функций κ из C , удовлетворяющих условию $\|\kappa\| \leq q$. Согласно (3.4) при $\kappa \in S(q)$

$$(4.1) \quad \|A\kappa\| < e^{4uq} \left(\varepsilon d + \frac{q^3 v^2}{2} + \frac{q}{2} \|F\|^2 + q^2 v \|F\| + \frac{1}{v} \|F\| \right)$$

$$u = \|B\| \|h\|, \quad v = \int_0^{\pi/2} h \, d\sigma, \quad d = v \max \left(v, \int_0^{\pi/2} g \, d\sigma \right)$$

Оператор A имеет производную Фреше $A'(\kappa)$

$$(4.2) \quad A'(\kappa)\kappa_1 = -ap_1 \int_{\pi/2}^{\sigma} ha \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon(ha - ga^{-1}) - \frac{1}{2} \kappa hb^2 F^2(1) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \kappa hb^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa h F'(c) \, d\sigma + \frac{1}{2} \kappa^3 ha^{-2} \right] d\sigma - \right.$$

$$\left. - a \int_{\pi/2}^{\sigma} hap_1 \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon(ha - ga^{-1}) - \frac{1}{2} \kappa hb^2 F^2(1) - \kappa hb^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa h F'(c) \, d\sigma + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \kappa^3 ha^{-2} \right] d\sigma - a \int_{\pi/2}^{\sigma} ha \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon(ha + ga^{-1}) p_1 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_1 ha^{-2} - \kappa^3 ha^{-2} p_1 - \frac{1}{2} \kappa_1 hb^2 F^2(1) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \kappa hb^3 b_1 F^2(1) - \kappa_1 hb^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa h F'(c) \, d\sigma + 2\kappa hb^3 b_1 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa h F'(c) \, d\sigma - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \kappa hb^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa_1 h F'(c) \, d\sigma - \kappa hb^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} \kappa h \ddot{F}(c) c_1 \, d\sigma \right\} d\sigma + \right.$$

$$\left. + ap_1 b F'(c) - ab^2 b_1 F'(c) + ab F'(c) c_1, \quad p = Bh\kappa_1 \right.$$

$$b_1 = \int_0^{\pi/2} hap_1 \, d\sigma, \quad c_1 = -b^2 b_1 \int_0^{\sigma} ha \, d\sigma + b \int_0^{\sigma} hap_1 \, d\sigma$$

При $\kappa \in S(q)$ из (4.2) следует

$$(4.3) \quad \|A'(\kappa)\| < \Phi(q) = 2e^{8uq} \left\{ 2\varepsilon ud + q^3 uv^2 + \frac{3}{4} q^2 v^2 + \right.$$

$$+ \|\dot{F}\| \left(\frac{u}{v} + q^2 uv \right) + \|\dot{F}\|^2 \left(\frac{1}{4} + qu \right) + \\ + \|\dot{F}\| \left(\frac{u}{v} + qv + 2q^2 uv \right) + \|\ddot{F}\| q^2 uv \Big\}$$

Чтобы оператор A переводил шар $S(q)$ в себя и был на этом шаре оператором сжатия, согласно (4.1), (4.3) достаточно потребовать выполнения неравенств (4.4), (4.5)

$$(4.4) \quad \|\dot{F}\| \leq 1, \quad \|\ddot{F}\| \leq 1, \quad \|\ddot{F}\| \leq J \quad (J = \text{const})$$

$$(4.5) \quad 2u\epsilon d + \frac{u}{v}(2\|\dot{F}\| + \|\ddot{F}\|) + \frac{1}{4}\|\dot{F}\|^2 \leq f_0(q)$$

$$f_0(q) = \min[f_1(q), f_2(q)]$$

$$f_1(q) = 2u(qe^{-4uq} - 1/2q - q^2v - 1/2q^3v^2)$$

$$f_2(q) = 1/2e^{-8uq} - q(u+v) - q^2v(J + 2u + 3/4v) - q^3uv^2$$

Очевидно, существует такое $q=q_1 > 0$, что $f_0(q_1) = 0$ и $f_0(q) > 0$ при $q \in (0, q_1)$. Пусть δ_0 — максимальное значение функции $f_0(q)$, достигаемое в некоторой точке $q=q_0$ из интервала $(0, q_1)$. На основе принципа сжатых отображений формулируется следующая теорема.

Теорема 1. Если $|\beta| \leq 1/2$, $\|\dot{F}\| \leq 1$, $\|\ddot{F}\| \leq 1$, $\|\ddot{F}\| \leq J$, $2u\epsilon d + uv^{-1} \times \times (2\|\dot{F}\| + \|\ddot{F}\|) + 1/4\|\dot{F}\|^2 < \delta_0$, то в шаре $S(q_0)$ существует единственное решение уравнения $v = Av$, которое может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

$$(4.6) \quad v^{(n)} = (1-\tau)v^{(n-1)} + \tau Av^{(n-1)}, \quad n=1, 2, \dots \\ \tau = \text{const}, \quad \tau \in (0, 1), \quad v^{(0)} \in S(q_0)$$

Оценка погрешности n -го приближения при этом дается формулой

$$\|v - v^{(n)}\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|v^{(0)} - Av^{(0)}\|, \quad \alpha = 1 - \tau + \tau\Phi(q_0)$$

Обозначим через $M(q)$ класс функций $\omega(\xi)$, аналитических в G , непрерывных в \bar{G} и таких, что $\|h\dot{\omega}\| \leq q$. Так же, как это сделано в [1], с помощью теоремы 1 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 в классе функций $M(q_0)$ существует единственное решение краевой задачи (2.4), (2.6). Решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам (4.6), $\omega^{(n)}(\xi) = Khv^{(n)}$. Оценка погрешности n -го приближения дается формулой

$$\max_{\xi \in \bar{G}} |\omega(\xi) - \omega^{(n)}(\xi)| \leq \frac{\alpha^n \|h\|}{1-\alpha} \|v^{(0)} - Av^{(0)}\| \left(\|B\|^2 + \frac{\pi^2}{4} \right)^{1/2}$$

Зная $dw/d\xi$ и $\chi(\xi)$, можно определить любые геометрические и динамические характеристики потока. В частности, учитывая, что

$$T = - \int_L \theta' M' ds, \quad Q = - \int_L (T\theta' + p_0 - p) ds$$

для определения коэффициентов момента c_M , продольной силы c_T и поперечной силы c_Q получим формулы

$$c_M = \frac{2M}{\rho V_0^2 L^2} = \frac{\gamma^2}{\epsilon} [ve^{-\lambda} - \gamma \dot{F}(t)]$$

$$c_T = \frac{2T}{\rho V_0^2 L} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \left[\gamma^2 F^2(1) - v^2 e^{-2\lambda} + 2\gamma^2 \int_{\pi/2}^{\sigma} v h F(t) d\sigma \right]$$

$$c_Q = \frac{2Q}{\rho V_0^2 L} = \gamma \int_{\pi/2}^{\sigma} (h e^{\lambda} - g e^{-\lambda}) d\sigma - \int_{\pi/2}^{\sigma} c_T v h d\sigma$$

5. Функция $\omega(\xi)$ имеет разложение вида

$$(5.1) \quad \omega(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \xi^{2k-1}$$

где a_{2k-1} — вещественные коэффициенты. Согласно (5.1)

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)\sigma, \quad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \sin(2k-1)\sigma$$

Поэтому решение уравнения $v = Av$ по схеме (4.6) эквивалентно нахождению последовательности коэффициентов a_{2k-1} по формулам

$$(5.2) \quad a_{2k-1}^{(n+1)} = (1-\tau) a_{2k-1}^{(n)} + \tau b_{2k-1}^{(n)} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$b_{2k-1}^{(n)} = \frac{4}{\pi(2k-1)} \int_0^{\pi/2} h v^{(n+1)} \cos(2k-1)\sigma d\sigma$$

$$v^{(n+1)} = -e^{\lambda^{(n)}} \int_{\pi/2}^{\sigma} h e^{\lambda^{(n)}} \left\{ \int_{\pi/2}^{\sigma} \left[\varepsilon (h e^{\lambda^{(n)}} - g e^{-\lambda^{(n)}}) - \frac{1}{2} \mu^{(n)} (\gamma^{(n)})^2 F^2(1) - (\gamma^{(n)})^2 \dot{\mu}^{(n)} \int_{\pi/2}^{\sigma} \dot{\mu}^{(n)} F(t^{(n)}) d\sigma + \frac{1}{2} (v^{(n)})^3 h e^{-2\lambda^{(n)}} \right] d\sigma + \gamma^{(n)} e^{\lambda^{(n)}} F(t^{(n)}) \right.$$

$$\left. \gamma^{(n)} = \left(\int_0^{\pi/2} h e^{\lambda^{(n)}} d\sigma \right)^{-1}, \quad t^{(n)} = \gamma^{(n)} \int_0^{\sigma} h e^{\lambda^{(n)}} d\sigma \right.$$

$$\lambda^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^{(n)} \cos(2k-1)\sigma, \quad \mu^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^{(n)} \sin(2k-1)\sigma$$

$$\dot{\mu}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) a_{2k-1}^{(n)} \cos(2k-1)\sigma, \quad a_{2k-1}^{(0)} = 0$$

$$k=1, 2, \dots \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Постоянная $\tau \in (0, 1)$ выбирается подходящим образом в процессе расчета.

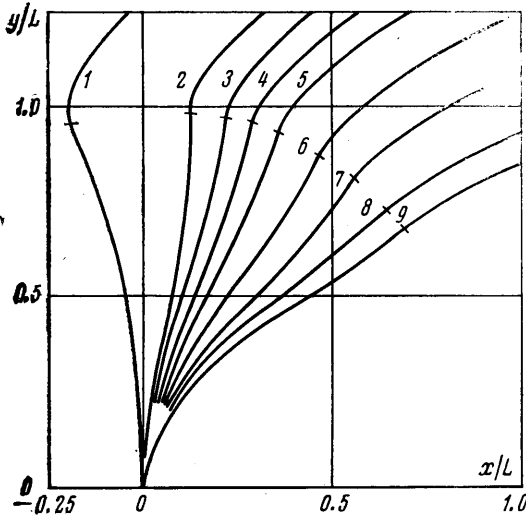
Формулы (5.1) были положены в основу расчета симметричного обтекания по схеме Кирхгофа упругой цилиндрической оболочки, сечение которой в недеформированном состоянии имеет форму дуги окружности с центральным углом, равным $\pi/4$, обращенной вогнутостью в сторону набегающего потока. Для этого случая

$$\frac{dn}{d\tau} = \frac{1}{2} \varphi_0 (1-\xi^4) \xi^{-3}, \quad \chi_0(\xi) = i\pi - \ln \frac{\xi-1}{\xi+1}$$

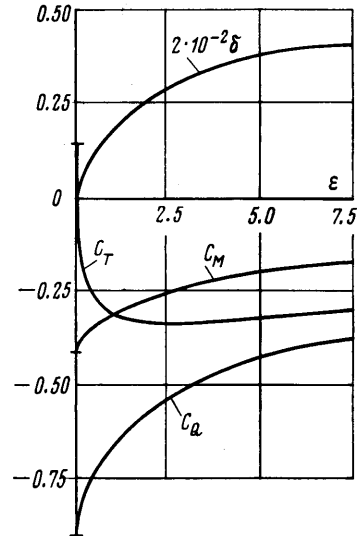
$$f = \sin 2\sigma, \quad r_0 = \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \sigma, \quad h = 4 \cos \sigma \cos^2 \frac{1}{2} \sigma$$

$$g = 4 \cos \sigma \sin^2 \frac{1}{2} \sigma, \quad F(t) = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{8} \pi t$$

На фиг. 2 изображена форма упругой оболочки и свободной поверхности для ряда значений ε из интервала $0 \leq \varepsilon \leq 6$. Кривым 1–9 соответствуют значения $\varepsilon = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2, 3, 4, 6$. Расчеты показали, что при ма-



Фиг. 2



Фиг. 3

лых ε в (5.2) следует положить $\tau = 0.5$ и монотонно увеличивать τ с ростом ε ($\tau = 0.9$ при $\varepsilon = 6$). Кроме того, за начальное приближение $a_{2k+1}^{(0)}$ при некотором $\varepsilon = \varepsilon_1$ удобно брать коэффициенты a_{2k+1} , уже найденные из решения задачи для ближайшего к ε_1 значения ε . На фиг. 3 показана зависимость значений c_M, c_Q, c_T в точке C ($t=0$) и параметра $\delta = \rho V_0^2 L^3 (2D)^{-1}$ от ε .

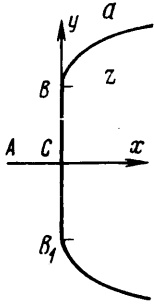
6. Рассмотрим следующую обратную задачу статической гидроупругости. Требуется определить форму цилиндрической оболочки в недеформированном состоянии ($\theta_1 = \theta_1(s)$) таким образом, чтобы при обтекании ее плоским потоком жидкости по заданной схеме оболочка принимала заданную форму: $\theta = \theta(s)$.

Предположим, что решение задачи об обтекании дуги заданной формы по заданной схеме может быть найдено. Тогда функция $p = p(s)$, характеризующая распределение гидродинамического давления вдоль оболочки, может считаться известной. Подставив (1.2) в (1.3), с учетом (1.5) получим для определения $\theta_1(s)$ следующую задачу:

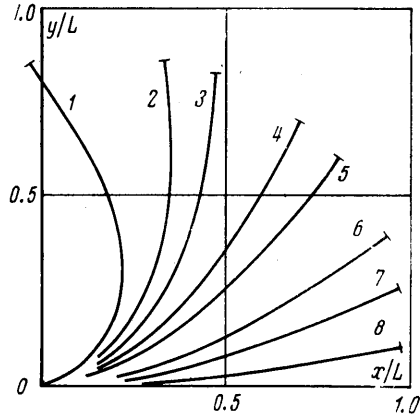
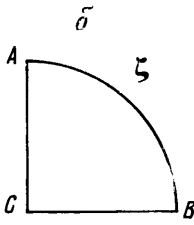
$$(6.1) \quad \theta_1'''' - \theta_1'''' \frac{\theta''}{\theta'} + \theta_1'' \theta'^2 = \theta'''' - \theta'''' \frac{\theta''}{\theta'} + \theta'' \theta'^2 +$$

$$+ \frac{1}{D} \left[p' - \frac{\theta''}{\theta'} (p - p_0) \right], \quad (0 \leq s \leq L)$$

$$\theta_1' = \theta', \quad \theta_1'' = \theta'', \quad \theta_1''' = \theta''' \quad (s = L)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Более подробно остановимся на случае, когда оболочка обтекается симметричным потоком по схеме Кирхгофа и имеет в деформированном состоянии прямолинейную форму (фиг. 4, а). В этом случае ($\theta' = 0$) вместо задачи (6.1) получается задача

$$(6.2) \quad \theta_1''' = \frac{\rho V_0^2}{2D} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2}\right) \quad (0 \leq s \leq L)$$

$$\theta_1' = \theta_1'' = 0 \quad (s=L), \quad \theta = \pi/2 \quad (s=0)$$

Отобразим верхнюю половину области течения в плоскости z на четверть круга в плоскости $\xi = \xi + i\eta$ при соответствии точек, указанном на фиг. 4, б. При таком соответствии

$$\frac{dw}{d\xi} = \varphi_0 \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2)^3}, \quad \frac{1}{V_0} \frac{dw}{dz} = \frac{\xi}{i}, \quad \frac{dz}{d\xi} = i \frac{\varphi_0}{V_0} \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^3}$$

Отсюда следует, что на BC

$$(6.3) \quad \frac{ds}{d\xi} = \frac{\varphi_0}{V_0} \kappa(\xi), \quad \kappa(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^3}, \quad \frac{V}{V_0} = \xi$$

Согласно (6.2), (6.3) координаты x_1, y_1 сечения ненагруженной оболочки определяются по формулам

$$(6.4) \quad \frac{x_1}{L} = \frac{1}{I} \int_0^{\xi} \kappa(\xi) \cos \theta_1(\xi) d\xi, \quad \frac{y_1}{L} = \frac{1}{I} \int_0^{\xi} \kappa(\xi) \sin \theta_1(\xi) d\xi$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{I^3} \int_0^{\xi} \kappa(\sigma) d\sigma \int_1^{\tau} \kappa(\eta) d\eta \int_1^{\tau} \kappa(\tau) (1-\tau^2) d\tau$$

$$\delta = \frac{1}{2} \rho V_0^2 L^3 D^{-1}, \quad I = \int_0^1 \kappa(\xi) d\xi$$

Результаты расчетов по формулам (6.4) приведены на фиг. 5. Кривым 1–8 соответствуют значения $\delta=12, 9, 8, 6, 5, 3, 2, 1$.

Поступила 8 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой пластины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
3. Киселев О. М., Федяев В. Л. О струйном течении жидкости при наличии гибкого ограждения. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 11. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1974.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.