

нии соответствует зависимость

$$(6) \quad T = T_0 \exp\{-0.965(r/\delta)^2\}$$

Величина δ пропорциональна z и не зависит от мощности источника. Отношение δ/z , найденное по данным эксперимента, равно 0.11 ± 0.006 , откуда $a=80$.

Проведенные эксперименты показали, что при небольшой модификации фотометрический теневой метод можно использовать для получения количественных результатов при измерениях осредненных температурных полей в турбулентных потоках.

Поступила 21 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Предельные законы свободно-восходящих конвективных потоков. ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 12.
2. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М., Физматгиз, 1962.
3. Васильев Л. А. Теневые методы. М., «Наука», 1968.
4. Зимин В. Д., Фрик П. Г. Теневой метод исследования трехмерных неоднородностей. Оптика и спектроскопия, 1976, т. 40, № 6.
5. Скотников М. М. Теневые количественные методы в газовой динамике. М., «Наука», 1976.
6. Turner J. S. Buoyant plumes and thermals. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 1. Palo Alto, Calif., Ann. Revs., 1969.
7. Schmidt W. S. Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft. Z. angew. Math. Mech., 1941, Bd 21, Nr 5, 6.
8. Prynitziewicz R. J., Bowley W. W. An experimental study of vertical buoyant jets discharged into water of finite depth. Trans. ASME, Ser. C, 1975, vol. 97, No. 2.

УДК 536.25

КОНВЕКЦИЯ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ, ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ

Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

В замкнутой области при строго вертикальном градиенте температуры (подогрев снизу) возможно равновесие жидкости [1]. Существует дискретная последовательность критических чисел Рэлея R_i , при которых это равновесие теряет устойчивость относительно малых характеристических возмущений. Наличие различных конечных возмущений, неизбежно присутствующих в эксперименте, приводит к тому, что строгое равновесие при $R < R_1$ отсутствует. В связи с этим возникает вопрос о влиянии возмущения на режим конвекции вблизи критических точек [2, 3]. В [2] исследован случай, когда полость подогревается не строго снизу, в [3] — случай, когда возмущение равновесия вызвано медленным движением верхней границы области. В работах [2, 3] возмущение имело структуру первого критического движения, и поэтому результаты этих работ качественно совпадают.

В данной работе рассматривается возмущение температуры на горизонтальных участках границы, которое создает возмущение двухвихревой структуры, соответствующее второй критической точке R_2 . Подобный вид возмущения характерен для экспериментов, в которых теплопроводные свойства жидкости и стенок полости различны. Нелинейные режимы конвекции исследуются численно методом сеток.

Находится решение задачи о тепловой конвекции для функции тока ψ и температуры T в плоской области квадратного сечения

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Delta \varphi + G \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$(2) \quad \Delta \psi + \varphi = 0, \quad G = \frac{g\beta\Theta a^3}{\nu^2}$$

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{P} \Delta T$$

$$(4) \quad \psi|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad T|_{\Gamma} = 1 - y + \varepsilon \sin \pi x$$

Все величины в (1)–(4) безразмерные, за единицу расстояния, функции тока и температуры выбраны соответственно сторона квадрата a , коэффициент кинематической вязкости ν и полная разность температур Θ . Решение поставленной задачи определяется тремя безразмерными параметрами – числами Грасгофа G , Прандтля P и амплитудой возмущения температуры на границе области ε . Расчеты проведены для фиксированного значения числа Прандтля $P=1$ и различных значений числа Рэлея $R=GP \leq 20 \cdot 10^3$ и $|\varepsilon| \leq 0.2$.

При отсутствии движения (твердая среда) уравнение теплопроводности имеет точное решение

$$(5) \quad T^{\circ} = 1 - y + \varepsilon \sin \pi x [\operatorname{sh} \pi y + \operatorname{sh} \pi (1 - y)] / \operatorname{sh} \pi$$

Безразмерные тепловые потоки (числа Нуссельта) при таком распределении температуры равны

$$(6) \quad N_1^{\circ} = - \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \approx 1 + 1.92\varepsilon$$

$$(7) \quad N_2^{\circ} = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} dx \approx -(1 - 1.92\varepsilon)$$

$$(8) \quad N_4^{\circ} = \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^- \Big|_{x=0.1} dy \approx -3.84\varepsilon$$

Интегралы в (8) берутся по тем участкам границы, где значение производной имеет указанный знак минус. Величина N_3° , равная нулю при распределении температуры (5), определяется аналогично – через интеграл по боковым граням с условием $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$ (n – нормаль к границе). В соответствии с законом теплового ба-

ланса $\sum_{i=1}^4 N_i^{\circ} = 0$. Распределение температуры (5) создает подъемную силу, вызывающую замкнутое течение двухвихревой структуры (течение типа «кошачьи глаза»).

Обсудим результаты расчета уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4) методом сеток. Процедура решения подобна [4, 6]; стационарное решение находилось методом установления, для определения ψ и T использовалась неявная схема продольно-поперечной прогонки метода дробных шагов [7], равномерный шаг по пространственным переменным изменялся от $1/15$ до $1/20$.

При малых значениях числа Грасгофа $G \leq 10^3$ и $|\varepsilon| \leq 0.1$ справедлива зависимость для максимального значения функции тока

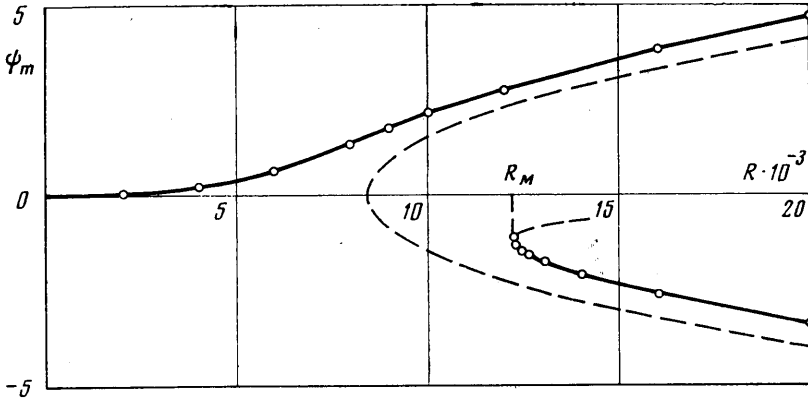
$$(9) \quad \psi_m \approx 0.3 \cdot 10^{-3} \varepsilon G$$

При дальнейшем увеличении числа Рэлея конвективное течение изменяет stratифицированное распределение температуры, а это в свою очередь, приводит к дополнительному увеличению интенсивности конвективного течения.

Рассмотрим влияние возмущения ε на амплитуду второго критического движения, возникающего, согласно [4, 5], при $\varepsilon=0$ в точке $R_2 \approx 8400$. Для запрещения возможных переходов течения к первому критическому движению счет велся для половины области с использованием симметрии второго критического движения; подобная методика была использована в [5]. Счет в полной области рассматривается ниже.

При $R > R_2$ ($\varepsilon=0$) возможны два вида течения – с подъемом теплой струи жидкости и с опусканием холодной жидкости по центру полости. Наличие возмущения приводит к тому, что один из видов течения становится «предпочтительным». На фиг. 1 представлена зависимость экстремальных значений функции тока ψ_m от числа Рэлея для $\varepsilon=0.1$. Штриховая линия соответствует результату [5] при отсутствии возмущения ($\varepsilon=0$). Верхняя ветвь соответствует усиленному (предпочтительному, благоприятному) виду течения с подъемом нагретой жидкости по центру

полости. Нижняя (неблагоприятная) ветвь с опусканием холодной жидкости по центру полости имеет уменьшенную амплитуду по сравнению с невозмущенным случаем. Переход на нижнюю ветвь возможен при специальных условиях (жесткая неустойчивость), течение этой структуры возможно лишь при амплитудах $|\psi_m| > 1.2$. При смене знака ε ветви меняются ролями — неблагоприятная ветвь становится предпочтительной. Совместное исследование обеих ветвей из соображений экономии машинного времени чаще всего проводилось методом продолжения по параметру путем изменения величины ε .



Фиг. 1

Поведение обеих ветвей при малых ε может быть описано кубическим уравнением [3] для амплитуды конвекции a

$$(10) \quad a^3 + C_1(\varepsilon)(R - R_1)a + C_2(\varepsilon) = 0$$

Следствием этой зависимости является соотношение

$$(11) \quad a_{n+} + 2|a_{n-}|$$

в котором плюс отмечает амплитуду верхней ветви, а минус — амплитуду ветви при $R = R_M$ (см. фиг. 1). Выполнимость (11) служит простым критерием справедливости (10); при $\varepsilon = 0.1$ это соотношение для $a = \psi_m$ выполняется с погрешностью в 15%.

Перейдем к обсуждению результатов, полученных при счете в полной области без отбрасывания первого критического движения, возникающего в $R_1 \approx 5100$ [4]. На фиг. 2 изображены линии тока и изотермы для случая $R = 8000$, $\varepsilon = 0.05$. Линии тока проведены через интервал $\psi_m/5$, изотермы — через интервал, равный 0.2. Заметно лишь незначительное влияние возмущения ε — с центральной точки сместился центр вихря, увеличилась область медленного возвратного течения в правом верхнем углу. Незначительно изменились и интегральные характеристики течения. На фиг. 2 изображено течение с вихрем против часовой стрелки. Возможно течение с вихрем и по часовой стрелке ($\psi_m < 0$); часть интегральных характеристик при этом не изменяется, а другая часть меняет знак. Аналогичная перестройка течения происходит при смене знака ε . Все эти четыре варианта течения будем считать принадлежащими одной ветви; варианты будут отличаться различным положением расширенной области возвратного течения.

При $R = 12\,000$ проведен счет с различными значениями амплитуды возмущения $\varepsilon \leq 0.1$. Для чисел Нуссельта найдены зависимости

$$(12) \quad \begin{aligned} N_1 &= 1.59 + 1.3\varepsilon, & N_2 &= -1.59 + 1.3\varepsilon \\ N_3 &= 0.66 - 1.3\varepsilon, & N_4 &= -0.66 - 1.3\varepsilon \end{aligned}$$

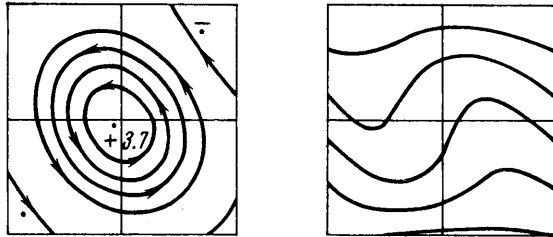
Максимальное значение функции тока вначале незначительно увеличивается ($< 0.5\%$), а при $\varepsilon > 0.08$ начинает убывать. Среднее значение функции тока монотонно убывает от 1.74 до 1.67. Убыль среднего значения $\langle \psi \rangle$ свидетельствует о нарастании вихря возвратного течения; модуль экстремального значения функции тока в области возвратного течения ψ_{m2} увеличивается от 0.11 до 0.28. Кинетическая энер-

гия конвективного движения

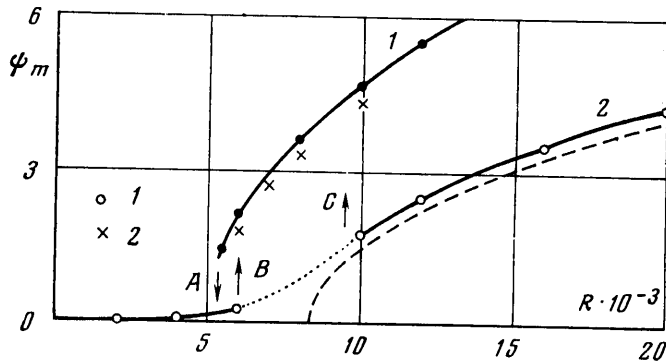
$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \psi \varphi dx dy$$

уменьшается от 65.5 до 64.5. Все эти факты свидетельствуют о малом влиянии рассматриваемого возмущения на амплитуду одновихревого течения вдали от порога R_1 .

Вблизи R_1 , когда становится малой интенсивность первого критического движения, возмущение ϵ может привести к перестройке течения в двухвихревую структуру. При задании $\epsilon=0.2$ (начальное состояние соответствовало $R=5500$, $\epsilon=0.1$, $t=6$)



Фиг. 2



Фиг. 3

длительный процесс установления привел к конвективному движению двухвихревой структуры. Процесс перехода хорошо прослеживается по поведению величин ψ_m и ψ_{m2} ; эти величины для различных моментов времени приведены ниже

ψ_m	1.43	1.21	1.04	0.97	0.93	0.90
$ \psi_{m2} $	0.10	0.60	0.74	0.81	0.85	0.88
t	6	7	8	9	10	12

На фиг. 3 представлена зависимость ψ_m от R для первого с левым направлением вращения (кривая 1) и второго (кривая 2) критических движений при $\epsilon=0.05$. Штриховая линия соответствует двухвихревой структуре течения [5] при $\epsilon=0$. С точностью до графика значения ψ_m при $\epsilon=0.05$, $R \geq 5500$ (точки 1) совпадают с результатом в отсутствие возмущения [4] для первого критического движения; точками 2 отмечены результаты для $\epsilon=0.2$.

Стрелка А на фиг. 3 отмечает возможность перехода из одновихревой структуры течения в двухвихревую вблизи R_1 . Если продвигаться по ветке двухвихревой структуры течения со стороны малых значений числа Рэлея, то переход в одновихревую структуру возможен позднее (явление гистерезиса); возможность такого перехода отмечает стрелка В. В области от стрелки А до стрелки В возможны оба течения.

В [4, 5] отмечалось, что второе критическое движение «метастабильно». Существует интервал $R=(20 \pm 8) \cdot 10^3$, где это течение существует очень долго, медленно переходя в одновихревую структуру. Наличие возмущения ϵ повышает устойчивость

двухвихревой структуры; появляется интервал R , где предпочтительная ветвь двухвихревой структуры устойчива. На нижнем конце интервала (стрелка C на фиг. 3) происходит переход в одновихревую структуру течения.

Гистерезисные эффекты вблизи R_1 проявляются при больших амплитудах возмущения. Для $\epsilon=0.2$ примерный интервал жесткой неустойчивости $5700 \div 6300$. Следует отметить трудность получения точных результатов, касающихся явлений гистерезиса вблизи порога конвекции. Вблизи критической точки медленно нарастают (или медленно затухают) конвективные движения, и счет приходится вести в течение длительного интервала времени. Так, например, переход по стрелке A фиг. 3 потребовал более 6 единиц безразмерного времени. Для сравнения укажем, что обычное время установления при $R > 1.5 R_1$ $t=0.3 \div 0.5$. В силу отмеченного обстоятельства не удалось построить амплитудную кривую вблизи R_1 , выяснены лишь качественные эффекты.

Проведенное исследование показывает, что экспериментальная неточность выполнения граничных условий для температуры рассмотренного типа порядка 5% слабо влияет на амплитуду первого критического движения. Незначительно меняется и критическое число Рэлея, определяемое с помощью экстраполяции. Существенным оказывается влияние рассмотренного возмущения на устойчивость второго критического движения — из двух метастабильных ветвей одна становится устойчивой. Возможны гистерезисные явления, связанные с переходом из двухвихревой структуры течения в одновихревую и обратно.

Автор благодарит Д. В. Любимова, В. И. Чернатыхского и А. А. Непомнящего за полезные обсуждения.

Поступила 2 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. Чернатыхский В. И., Шлиomis М. И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
3. Таруни Е. Л. Ветвление решений уравнений конвекции в замкнутой полости с подвижной границей при подогреве снизу. В сб. «Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции». Минск, 1974.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Таруни Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
5. Таруни Е. Л. О численном исследовании ветвлений при свободной конвекции в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
6. Таруни Е. Л. Численное решение уравнений свободной конвекции методом секток. В сб. «Алгоритмы и программы для ЭВМ «Арагац»». Пермь, 1970.
7. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.

УДК 531/534:0.61.3

ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР СЕМИНАРЫ

7 I 1976. В. В. Пухначев (Новосибирск). *О задаче Стефана, возникающей в одной модели электрического взрыва проводников.*

Получены асимптотики решения одномерной задачи Стефана с внутренним тепловыделением при стремлении коэффициента температуропроводности к нулю и к бесконечности. Решение описывает процесс выкипания металлической фольги за счет джоулева тепла.

11 II 1976. Б. В. Логинов (Ташкент). *Групповая инвариантность в теории ветвления решений нелинейных уравнений.*

Показано, что использование инвариантности относительно непрерывных групп преобразований в теории ветвления позволяет понизить порядок уравнения разветвления и упростить задачу разыскания многопараметрических семейств решений.

25 II 1976. А. Г. Олейник (Новосибирск). *Об устойчивости конфигураций двух сталкивающихся под углом струй идеальной жидкости.*

Найдены низшие собственные частоты колебаний струйной конфигурации, возникающей при соударении под углом двух плоских струй идеальной жидкости.

3 III 1976. А. В. Кажиков (Новосибирск). *Об одномерных краевых задачах для уравнений вязкого теплоизолированного газа.*