УДК 532.546

О ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НЕПОЛНОМ НАСЫЩЕНИИ В СУХОЙ ГРУНТ

И. И. КРАМАРОВСКАЯ

(*Ташкент*)

Рассматривается фильтрация при неполном насыщении в грунт, начальная влажность которого меньше максимально возможного содержания в ней связной влаги. Переход части свободной влаги в связное состояние учитывается с помощью граничного условия на фронте смачивания. Исследованы некоторые случаи горизонтального впитывания влаги, а также случай вертикальной инфильтрации для поздних стадий развития профиля влажности.

1. Постановка задачи.

Впитывание воды в грунт связано со степенью его первоначального увлажнения. Вопрос о влиянии начального насыщения на динамику инфильтрации привлекал внимание различных исследователей [1–3]. Если первоначальная влажность меньше максимально возможного содержания в ней связной влаги w_0 (грунт сухой), то, поступая в грунт, свободная вода частично переходит в связную.

Движение влаги в почве происходит под действием сил различной природы; основные и наиболее часто учитываемые силы, действующие на связную влагу,– адсорбционные, а на свободную влагу – сила тяжести и капиллярные силы, обусловленные поверхностным натяжением.

В [4] предложена математическая модель, учитывающая движение в почве связной и свободной воды и переход свободной влаги в связную. В той же работе указано на то, что для большинства грунтов и почв переход поступающей в них свободной влаги в связное состояние происходит весьма быстро.

Полагая, что переход из свободного состояния в связное происходит мгновенно, следует допустить, что вода, попадая в поры грунта, только после достижения максимально возможного содержания связной влаги в этих порах перемещается в следующие. При этом будет наблюдаться четко выраженный фронт смачивания со скачком влажности, равным w_0-w'' (w'' – начальная влажность, в дальнейшем полагаемая постоянной).

Таким образом, при изучении влагопереноса в первоначально сухом грунте может быть принята следующая схема: в увлажненной зоне, где количество связной жидкости достигло своего максимума, рассматривается передвижение только свободной влаги, а переход ее в связное состояние учитывается на фронте смачивания граничным условием. Согласно такой схеме в области движения имеет место уравнение [1]

$$\partial w/\partial t=\operatorname{div}(D\operatorname{grad} w)-\partial k(w)/\partial z \tag{1.1}$$

решение которого должно удовлетворять следующим условиям на фронте смачивания:

$$w=w_0,\qquad \mathbf{v}=(w_0-w'')\,d\mathbf{R}/dt \tag{1.2}$$

а также начальному и граничным условиям первого, второго или третьего рода на других участках границы.

Здесь w – влажность, часть объема пористой среды, приходящаяся на воду; $k(w)$ – коэффициент влагопроницаемости; $D=k(w)\,dh/dw$ – коэффициент капиллярной диффузии; $h=p/\gamma-z$ – напор; p – давление; γ – удельный вес; z – вертикальная координата; t – время; $\mathbf{v}$ – скорость фильтрации; $\mathbf{R}$ $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ – радиус-вектор точки фронта смачивания; $\xi,\ \eta,\ \zeta$ – компоненты $\mathbf{R}$.

На фронте смачивания коэффициент влагопроницаемости обращается в нуль, а коэффициент капиллярной диффузии из-за интенсивного роста dh/dw при уменьшении w в области малых значений влажности принимает некоторое постоянное значение D_0. На фронте смачивания поступательное движение влаги происходит за счет капиллярных сил, в сравнении с ними действие сил тяжести оказывается пренебрежимо малым.

На рассматриваемой границе скорость фильтрации $\mathbf{v}=-D\operatorname{grad} w+k(w)\mathbf{k}$ становится равной

$$\mathbf{v}=-D_0\operatorname{grad} w \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – единичный орт, направленный вдоль оси z. Условие (1.2) может быть переписано в виде

$$-D_0\operatorname{grad} w=(w_0-w'')\,d\mathbf{R}/dt \tag{1.4}$$

В частном случае D_0 может оказаться равным нулю; при этом очевидно, что если фронт смачивания перемещается, то $\operatorname{grad} w \to \infty$ при $w \to w_0$ и левая часть уравнения (1.4) становится неопределенной.

2. Горизонтальное впитывание воды. В рассматриваемом случае решается задача

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.1}$$

$$x=0, \quad w=w'; \quad x=\xi(t), \quad w=w_0$$
$$-D_0\frac{\partial w}{\partial x} = (w_0-w'')\frac{d\xi(t)}{dt}, \quad \xi(0)=0 \tag{2.2}$$

Введение переменной $u=x/\sqrt{t}$ позволяет представить (2.1) и условие на фронте смачивания в виде

$$u\frac{dw}{du} + 2\frac{d}{du}\left(D\frac{dw}{du}\right) = 0 \tag{2.3}$$

$$-D_0\frac{dw}{du}\frac{1}{\sqrt{t}} = (w_0-w'')\frac{d\xi(t)}{dt} \tag{2.4}$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\xi(t)=\beta\sqrt{t}, \quad \beta=\mathrm{const}$$

Подстановка этого выражения в (2.4) дает возможность получить уравнение для β

$$-\frac{2D_0}{w_0-w''}f(\beta)=\beta, \quad f(u)\equiv\frac{dw}{du}; \quad x=\xi(t), \quad u=\beta \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что градиент влажности на фронте смачивания равен

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{(w_0-w'')\beta}{2D_0\sqrt{t}}$$

Для решения рассматриваемой задачи следует интегрировать уравнение (2.3) при условиях

$$u=0, \quad w=w'; \quad u=\beta, \quad w=w_0 \tag{2.6}$$

При горизонтальном впитывании, как это следует из предыдущих рассуждений, пропорциональность длины зоны увлажнения корню квадратному из времени имеет место при любом виде зависимости D от w.

При частном значении D, равном некоторому осредненному значению $D_*=\mathrm{const}$, уравнение (2.3) линеаризуется и имеет точное решение, удовлетворяющее условиям (2.6)

$$(w'-w)/(w'-w_0)=\operatorname{erf}(u/2\sqrt{D_*})/\operatorname{erf}(\beta/2\sqrt{D_*})$$

Коэффициент β определяется из уравнения

$$\gamma\exp(\gamma^2)\operatorname{erf}\gamma=A$$
$$\gamma=\beta/2\sqrt{D_*}, \quad A=D_0(w'-w_0)/\sqrt{\pi}D_*(w_0-w'')$$

На фронте смачивания сохранено значение капиллярной диффузии D_0, имеющее место в действительном процессе при $w=w_0$, $D_0\neq D_*$. При малых A для определения коэффициента β может быть использована приближенная формула

$$\beta=2\sqrt{D_*}(1+2/\sqrt{\pi}A)^{-1/2}$$

В другом частном случае задания D в виде экспоненциальной функции от влажности, $D=D_0\exp[\alpha(w-w_0)]$, введение новых обозначений позволяет от (2.3), (2.5), (2.6) перейти к уравнению с условиями

$$2Bvv''+uv'=0, \quad v=\exp[\alpha(w-w')], \quad B=D_0\exp[\alpha(w'-w_0)] \tag{2.7}$$

$$u=0, \quad v=1; \quad u=\beta, \quad v=\exp[\alpha(w_0-w')], \quad -\frac{2D_0}{\alpha(w_0-w'')v}\frac{dv}{du}=\beta \tag{2.8}$$

Для решения уравнения (2.7) использован метод малого параметра. Выражение v ищется в виде бесконечного ряда по степеням малого параметра λ

$$v=v_0+\lambda v_1+\lambda^2 v_2+\lambda^3 v_3+\ldots$$

Здесь $v_0=\mathrm{const}$, v_1, v_2, v_3, ... — искомые функции, определяемые из бесконечной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} &2Bv_0v_1''+uv_1'=0\\ (2.9)\qquad &2Bv_0v_2''+uv_2'=-2Bv_1v_1''\\ &2Bv_0v_3''+uv_3'=-2B(v_2v_1''+v_1v_2'')\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Положив

$$v_0=\exp[\alpha(w_0-w')],\qquad \lambda=1-\exp[\alpha(w_0-w')]$$

можно потребовать удовлетворения граничных условий

$$v_1(0)=1,\qquad v_2(0)=v_3(0)=\ldots=0$$
$$v_1(\beta)=v_2(\beta)=v_3(\beta)=\ldots=0$$

Ниже приведены решения первых двух уравнений системы (2.9)[1]

$$v_1=c_1\operatorname{erf} r+1$$
$$v_2=-ar\exp(-r^2)-b\exp(-2r^2)+c_2\operatorname{erf} r-\sqrt{\pi}br\exp(-r^2)\operatorname{erf} r+b$$
$$r=\frac{u}{2\sqrt{Bv_0}},\qquad c_1=-\frac{1}{\operatorname{erf}\delta},\qquad \delta=\frac{\beta}{2\sqrt{Bv_0}}$$
$$a=\frac{c_1}{\sqrt{\pi}\,v_0},\qquad b=\frac{c_1^2}{\pi v_0}$$
$$\operatorname{erf} r=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-\nu^2}\,d\nu$$
$$c_2=-c_1[a\delta\exp(-\delta^2)+b\exp(-2\delta^2)+\sqrt{\pi}b\delta\exp(-\delta^2)\operatorname{erf}\delta-b]$$

Для определения приближенного значения β служит уравнение

$$-\frac{D_0}{\alpha\sqrt{Bv_0}(w_0-w'')}\left(\lambda\frac{dv_1}{dr}+\lambda^2\frac{dv_2}{dr}\right)_{r=\delta}=\beta(v_0+\lambda v_1+\lambda^2 v_2)_{r=\delta}$$
$$\frac{dv_1}{dr}=\frac{2c_1}{\sqrt{\pi}}\exp(-r^2)$$
$$\frac{dv_2}{dr}=\left[\frac{2c_2}{\sqrt{\pi}}-a+2ar^2+2br\exp(-r^2)-\sqrt{\pi}\,b(1-2r^2)\operatorname{erf} r\right]\exp(-r^2)$$

Приближенное значение w определяется формулой

$$w=w'+\frac{1}{\alpha}\ln(v_0+\lambda v_1+\lambda^2 v_2)$$

3. Вертикальное впитывание воды при больших t. При вертикальном впитывании в неограниченно глубокий грунт, когда на поверхности поддерживается постоянная влажность или постоянный расход, при неограниченном возрастании времени, как показали экспериментальные и теоретические исследования [1, 5], около верхней границы образуется зона практически постоянного насыщения, а профиль влажности перемещается вниз без изменения формы с одной и той же одинаковой скоростью V во всех точках. Для этих поздних стадий развития профиля влажности решение уравнения влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial k(w)}{\partial z}\tag{3.1}$$

[1] Найденное автором решение третьего уравнения не приводим из-за его громоздкости.

будет функцией только $\mu=z-Vt$.

Введение переменной μ превращает (3.1) в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\mu}\left(D\frac{dw}{d\mu}\right)-\frac{dk(w)}{d\mu}+V\frac{dw}{d\mu}=0$$

решение которого, учитывающее граничное условие на фронте смачивания, может быть представлено в виде

$$\mu_0-\mu=\int\limits_{w_0}^{w}\frac{D\,dw}{V(w-w'')-k(w)} \tag{3.2}$$

Здесь μ_0 — значение μ на фронте смачивания, $\mu-\mu_0=z-\zeta$ — высота точки с влажностью w над фронтом смачивания. При $w=w'$ формула (3.2) определяет l — длину зоны переменной влажности

$$l=\int\limits_{w_0}^{w'}\frac{D\,dw}{V(w-w'')-k(w)}$$

Скорость передвижения профиля влажности при принятой здесь схеме и градиент влажности на фронте смачивания равны

$$V=\frac{k(w')}{(w'-w'')},\quad \frac{dw}{dz}=-\frac{k(w')}{D_0}\frac{w_0-w''}{w'-w''}.$$

Если принять $D=D_*$, $dk(w)/dw=\chi$, D_*, $\chi=\text{const}$, то уравнение (3.1) линеаризуется и тогда

$$l=\frac{D_*}{V-\chi}\ln\left(\frac{D_0}{D_*}\frac{V-\chi}{V}\frac{w'-w_0}{w_0-w''}+1\right)$$

Поступила 24 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Philip J. R.* Theory infiltration. Soil science, 1957, vol. 83, No. 5.
2. *Liakopoulos A. C.* Theoretical approach to the solution of the infiltration problem. Bull. Internat. Assoc. Sci. Hydrol., 1966, vol. 11, No. 1.
3. *Rubin J.* Theory of rainfall uptake by soils initially drier than their field capacity and its applications. Water Resources Res., 1966, vol. 2, No. 4.
4. *Веригин Н. Н.* Движение влаги в почве. Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 2.
5. *Youngs E. G.* Moisture profiles during vertical infiltration. Soil Science, 1957, vol. 84, No. 4.

УДК 533.6.071.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ОКОН ГАЗОВЫХ ЛАЗЕРОВ

Н. М. ЕФРЕМОВ, Б. А. ТИХОНОВ

(Москва)

Рабочее давление в резонаторе газовых лазеров в большинстве случаев колеблется от 30 до 100 *мм* рт. ст. Поэтому при выводе лазерного излучения в атмосферу возникает проблема изоляции резонатора от атмосферного давления. В маломощных лазерах ($N\leqslant1$ *кт/см*^{2}, где N — мощность излучения лазера) для этих целей применяют оптические окна из монокристаллов NaCl (CO_2-лазер), CaF_2 (CO-лазер) и т. д. [1]. Коэффициент поглощения энергии излучения такими оптическими окнами в среднем 0.02—0.2%, поэтому при удельных мощностях стационарного излучения лазера порядка 3 *квт/см*^{2} и более вывод луча через монокристаллические окна затруднен из-за чрезмерного нагрева их поглощенным излучением и последующим разрушением окон. В этом случае для вывода лазерного луча из резонатора вместо монокристаллических окон используются так называемые газодинамические окна (шлюзы, затворы) с поперечной прокачкой газа [2] или эжекторного типа, обеспечивающие