

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ
СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

А. А. НОВИКОВ

(Горький)

Капиллярная неустойчивость жидкой струи — одна из классических проблем гидродинамики [1]. Ее изучение представляет практический интерес, в частности, для оптимизации сжигания жидкого топлива и разработки грануляционной аппаратуры в химической промышленности [2].

До последнего времени основное внимание уделялось анализу линейных задач. Были получены дисперсионные уравнения для малых возмущений поверхности струи с учетом вязкости, внешней среды [3]. В работах [4, 5] было начато построение теории волн конечной амплитуды на поверхности струи идеальной жидкости. К настоящему времени эта теория достигла существенных результатов, о чем можно судить по успешному численному моделированию распада струи невязкой жидкости на капли [6] (см. также [7, 8]).

Данная работа посвящена обсуждению нелинейной стадии развития неустойчивости струи вязкой жидкости при условиях, допускающих пренебрежение влиянием окружающей среды и поля тяжести.

Из общей теории волн [9, 10] известно, что протекание нелинейных процессов существенно зависит от закона дисперсии элементарных возмущений. Так, для развития существенно нелинейных явлений необходима слабая зависимость фазовой скорости возмущений от их волнового числа (слабая дисперсия). В этом случае гармоники основной моды оказываются собственными волнами задачи, что приводит к их интенсивному росту и, следовательно, к существенному искажению формы начального возмущения. Наиболее адекватное описание таких систем дают одноволновые уравнения типа уравнения Бюргерса, Кортевега де Вриза, простой волны (в зависимости от того, является ли слабая дисперсия диссипативной, реактивной или полностью отсутствует).

Дисперсионное уравнение для осесимметричных возмущений поверхности струи несжимаемой вязкой жидкости имеет вид [3]

$$(1) \quad p^2 + 2\sqrt{M} \frac{\chi I_0''(\chi)}{I_0(\chi)} p + \frac{\chi(\chi^2 - 1) I_0'(\chi)}{I_0(\chi)} = 0$$

Здесь $p = \gamma/\Omega + i\omega/\Omega$, $\chi = r_0 k$ — безразмерные комплексный инкремент и волновое число возмущений, $M = \eta^2 / T r_0$ — параметр, описывающий влияние вязкости; $\Omega = \sqrt{T / r_0 g^3}$ — характерная частота капиллярных процессов, η , ρ , T — вязкость, плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, r_0 — начальный радиус струи, I_0 , I_0' , I_0'' — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и ее производные.

Из (1) следует, что условие развития существенно несинусоидальных волн выполняется лишь для струй сильновязких жидкостей ($M > 0.7$), для которых от волнового числа возмущений зависят только их инкременты (или декременты), но не фазовые скорости. Кроме того, характерный масштаб возмущения, имеющего наибольший инкремент и определяющего, следовательно, длину начального возмущения, существенно превышает размеры струи, что позволяет пренебречь изменением давления в поперечном сечении. При этом деформация поверхности струи описывается уравнением сохранения массы

$$(2) \quad \partial r^2 / \partial t + \partial (r^2 v) / \partial z = 0$$

и законом сохранения продольного импульса

$$(3) \quad \rho (\partial v / \partial t + v \partial v / \partial z) = -\partial P / \partial z + \nu \partial^2 v / \partial z^2$$

Здесь r — радиус струи, v — продольная скорость, z — координата вдоль струи, $P = (T / 2\pi r) (\delta S / \delta r)$ — давление, обусловленное поверхностным натяжением,

$S = 2\pi \int r \sqrt{1 + r'^2} dz$ — поверхность струи как функционал от $r(z)$, ν — коэффициент, описывающий вязкость (его связь с η определяется из сравнения дисперсионного уравнения задачи (2), (3) с уравнением (1)).

Разлагая уравнения (2), (3) в ряды по малым возмущениям радиуса струи $h = r - r_0$ и удерживая лишь квадратичные члены по малым величинам h и v , можно

записать исходные уравнения в матричном виде

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + B \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) u = F \left(\frac{\partial}{\partial z}; u \right)$$

$$u = \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix}, \quad B(\kappa) = \begin{pmatrix} -v\kappa^2/\rho, & -\Omega^2 r_0 \kappa (1 + r_0^2 \kappa^2) \\ 1/2 r_0 \kappa, & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \Omega^2 \kappa (1/2 r_0^2 \kappa^2 h^2 - h^2) - \kappa (v^2/2) \\ -\kappa (hv) + 1/2 h \kappa v \end{pmatrix}, \quad \kappa = \partial/\partial z = -ik$$

Используя далее метод связанных волн [11], т. е. отыскивая решение в виде разложения по собственным векторам $\psi(\kappa)$ матрицы $B(\kappa)$

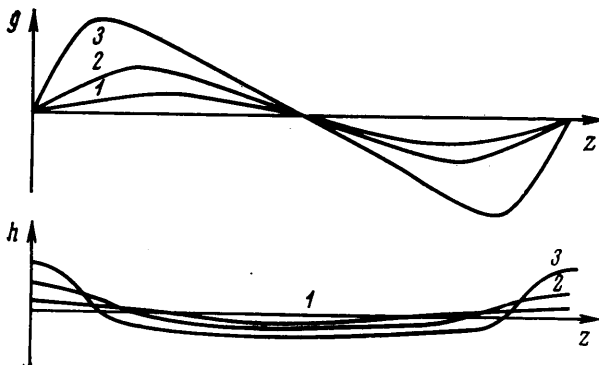
$$(5) \quad u(z, t) = \sum_{j=1}^2 \psi_j(\kappa) g_j(z, t)$$

получим уравнения для $g(z, t)$

$$(6) \quad [\partial/\partial t - p_l(\partial/\partial z)] g_l(z, t) = (\zeta_l, \psi_l)^{-1} (\zeta_l, F)$$

$$\psi_l(x) = \begin{pmatrix} p_l(\kappa) \\ 1/2 r_0 \kappa \end{pmatrix}, \quad \zeta_l^+ = (-1/2 r_0 \kappa, p_l(\kappa) - v\kappa^2/\rho)$$

Здесь $p_l(\kappa)$ – собственные значения матрицы $B(\kappa)$ – ветви дисперсионного уравнения задачи, совпадающие с длинноволновым пределом решений (1) при $v=\eta/2$.



Фиг. 1

Основную роль в описании деформации струи играет, очевидно, дисперсионная ветвь, содержащая неустойчивую область, а поскольку в процессе развития неустойчивости нелинейные эффекты приводят лишь к появлению гармоник основного возмущения, важно поведение этой ветви только при волновых числах, больших, чем то, которое соответствует максимуму инкремента. Эту ветвь можно аппроксимировать выражением

$$(7) \quad p(\kappa) = \gamma_0 + (v/\rho) \cdot \kappa^2$$

где γ_0 – максимальное значение инкремента.

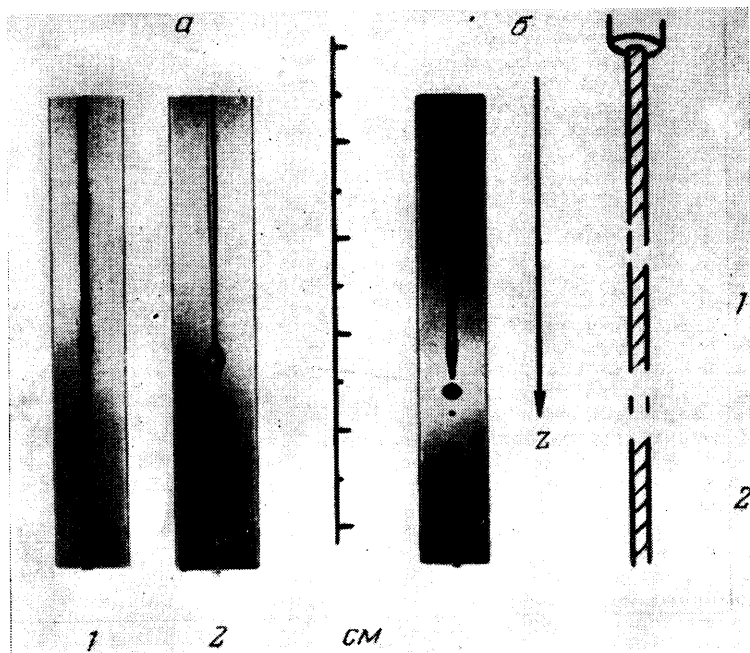
Подставляя (7) в (6) и сохраняя лишь квадратичные члены разложения по g и κ , получим

$$(8) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \gamma_0 g + \gamma_0 g \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

Соотношение (8) представляет собой уравнение Бюргера с низкочастотной неустойчивостью – модифицированное уравнение Бюргера в терминологии работы [12], где оно детально исследовано путем численного интегрирования.

На начальной стадии процесса основную роль играет первый член правой части (8), описывающий линейный экспоненциальный рост начального возмущения. По мере увеличения амплитуды процесса g , все более существенным становится

второй член, описывающий нелинейное искажение профиля. Для оценки влияния нелинейности необходимо сравнить характерное время неустойчивости $\tau_1 \sim 1/\gamma_0$ и характерное время набега вершины на профиле g , $\tau_2 \sim L/\gamma_0 g$ (L — характерный пространственный размер возмущения). Учитывая, что $h \sim r_0 \partial g / \partial z \sim r_0 g / L$, получим, что $\tau_2 / \tau_1 \sim h / r_0$, т. е. при амплитудах отклонений $h \sim r_0$ процесс будет существенно нелинейным. На фиг. 1 приведены взятые из [12] типичные зависимости $g(z, t_h)$ и $h(z, t_h) \sim \partial g / \partial z$ для трех последовательных (кривые 1–3 соответственно) моментов времени, показывающие что перед распадом струя имеет вид нити с насаженными



Фиг. 2

на нее бусинками. Наличие вязкого члена в правой части (8) приводит к тому, что при $t \rightarrow \infty$ решение стремится к стационарному состоянию [12], которое не реализуется практически, так как при амплитудах, необходимых для существования стационарного режима длины L , сохранение лишь квадратичных членов в (4) недостаточно.

Выводы теории о существенной несинусоидальности развития неустойчивости вязкой струи согласуются с экспериментом, проведенным по просьбе автора Б. М. Коноховым и Г. Д. Куватовым на глицерине при $M \sim 10$ (фиг. 2, а). Для сравнения приведена картина распада струи слабовязкой жидкости при тех же внешних условиях (вода, $M \sim 10^{-5}$, фиг. 2, б).

Автор считает своим долгом выразить благодарность привлечшим его внимание к этой задаче Б. М. Конохову и Г. Д. Куватову за выполнение эксперимента и М. И. Рабиновичу за полезные обсуждения.

Поступила 26 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрэтт Д. В. (лорд Рэлей). Теория звука. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
2. Бородин В. А., Дигякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Ягодкин В. И. Распыление жидкостей. М., «Машиностроение», 1967.
3. Лышевский А. С. Осесимметричный распад круглой струи вязкой жидкости. Изв. вузов, Энергетика, 1960, № 7.
4. Yuen M. C. Non-linear capillary instability of a liquid jet. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 1.
5. Wang D. P. Finite amplitude effect on the stability of a jet of circular cross-section. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 34, pt. 2.
6. Lofrance P. Non-linear breakup of a liquid jet. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 10.
7. Маркова М. П., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.

8. Kakutani T., Inoue Y., Kan T. Non-linear capillary waves on the surface of liquid column. J. Phys. Soc. Japan, 1974, vol. 37, No. 2.
9. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, № 2.
10. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны. Усп. физ. н., 1973, т. 103, № 2.
11. Новиков А. А. О применении метода связанных волн к анализу нерезонансных взаимодействий. Изв. вузов, Радиофизика, 1976, т. 19, № 2.
12. Ott E., Manheimer W. M., Book D. L., Boris J. P. Model equations for mode coupling saturation in unstable plasmas. Phys. Fluids, 1973, vol. 16, No. 6.

УДК 532.526.4+536.24

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИНАХ И МЕТОДИКА ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ИХ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

В. В. ГЛАЗКОВ, М. Д. ГУСЕВА, Б. А. ЖЕСТКОВ

(Москва)

Изложены результаты экспериментального исследования теплоотдачи от перфорированных пластин к охлаждающему воздуху при движении его вдоль стенок и частичном сливе через отверстия перфорации.

Приведены характеристики пограничного слоя на перфорированных пластинах, их тепловое состояние и коэффициенты истечения для совокупности отверстий. Дан приближенный метод расчета температуры проникаемой стенки при комбинированном охлаждении и оценена область его применения.

1. В многочисленных работах, посвященных изучению течения в пограничном слое на пористых и перфорированных стенках, а также изучению их теплового состояния (например, [1-7]), не учитывается влияние течения охладителя и отвод теплового потока с «холодной» стороны этих стенок. Общий случай охлаждения, когда тепловой поток, поступающий в стенку, отводится к охладителю как в каналах стенок, так и с ее холодной стороны, назовем комбинированным.

Конвективные потоки тепла со стороны горячего и охлаждающих потоков обозначим q_{h0} , q_{h1} , в каналах стенок — q_r , лучистые потоки тепла — q_{L0} , q_{L1} . Индексы 0 и 1 соответствуют горячему и охлаждающему потокам.

Для перфорированных стенок, у которых диаметры отверстий перфорации сравнимы с толщиной стенок, наличие потока газа с холодной стороны стенки может отразиться не только на тепловом состоянии стенки но и на течении в пограничном слое с «горячей» стороны стенки. Заметное воздействие вектора скорости u_1 на течение в пограничном слое будет проявляться при средней касательной составляющей скорости вдуваемого охладителя на единицу охлаждаемой поверхности $u_w \approx u_1 F_0 / F$, сравнимой со скоростью u_0 . В случаях, когда $u_w \ll u_0$ (например, когда проницаемость стенки $s = F_0 / F \ll 1$ или когда диаметр отверстий перфорации d_0 существенно меньше толщины стенки Δ и т. д.), характеристики пограничного слоя на проницаемых стенках будут слабо зависеть от u_1 . В этих случаях величины температуры T_e и коэффициента теплоотдачи α_e , определяющие конвективный тепловой поток к проникаемой стенке при вдуве охладителя, могут быть рассчитаны по данным [6,7], выполненным при $u_1 = 0$.

Приведем метод расчета температуры проникаемых стенок для $u_w \ll u_0$.

2. Конвективный поток тепла от газа к проникаемой стенке представим в виде

$$(2.1) \quad q_{h0} = \alpha_e (T_e - T_w) = \alpha_0 \frac{\alpha_e}{\alpha_0} (T_e - T_w)$$

где α_0 — коэффициент теплоотдачи при обтекании горячей стороны гладкой стенки, T_w — температура стенки. Полагая, что перепад температур по толщине стенки мал, конвективный поток тепла от стенки к охладителю представим как

$$(2.2) \quad q_{h1} + q_r = \alpha_\Sigma (T_w - T_1) = \alpha_1 \frac{\alpha_\Sigma}{\alpha_1} (T_w - T_1)$$

где α_Σ — суммарный коэффициент теплоотдачи, характеризующий наружный теплообмен и теплообмен во внутренних каналах проникаемой стенки, α_1 — коэффициент теплоотдачи при обтекании гладкой холодной стороны стенки. Используя эти выражения для конвективных потоков тепла и вводя относительные избыточные температуры $\theta_w = (T_w - T_1) / (T_0 - T_1)$ и $\theta_e = (T_e - T_1) / (T_0 - T_1)$, запишем уравнение баланса