УДК 532.5.013.4

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

В. Г. НЕВОЛИН

(Пермь)

Эксперименты по параметрическому возбуждению волн на поверхности жидкости обнаруживают сильное расхождение с теоретическими результатами [1–3], поскольку последние не учитывают влияния второй среды. Оно оказывается особенно важным при низких частотах. Так, для границы раздела вода — воздух при частотах возбуждения $\omega=60$ *сек*$^{-1}$ вклад составляет $\sim10\%$, а при $\omega=30$ *сек*$^{-1}$ уже 20%.

В работе рассматривается устойчивость границы раздела двух вязких несжимаемых жидкостей бесконечной глубины в переменном поле тяжести. Задача решается в линейной постановке разложением в ряд по малой вязкости методом преобразования Лапласа по времени.

Для смещения поверхности от положения равновесия получено интегродифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами, решение которого ищется методом усреднения [4]. Показано, что наличие второй жидкости существенно повышает порог неустойчивости.

Рассматривается устойчивость границы раздела двух вязких несжимаемых жидкостей. Система совершает малые колебания с частотой ω вдоль вертикальной оси (оси z) по периодическому закону. Тогда в движущейся системе координат жидкости неподвижны, а эффективное ускорение силы тяжести

$$\mathbf{g}(t)=(1-\eta\cos\omega t)\mathbf{g}$$

где $\eta\equiv a\omega^2/g$ — безразмерный параметр модуляции, $\mathbf{g}=\{0,\ 0,\ -g\}$ — ускорение силы тяжести, a — амплитуда модуляции.

Равновесное состояние системы

$$\mathbf{v}_{0i}=0,\quad \zeta_0=0,\quad p_{0i}=p_0-\rho_i g(t)z \tag{1}$$

где $\mathbf{v}=\{u,\ v,\ w\}$ – вектор скорости, ζ – смещение поверхности от положения равновесия, p_0 — давление на границе раздела ($z=0$), $i=1,\ 2$ — номер жидкости (жидкость с $i=1$ заполняет полупространство $z<0$, с $i=2-z>0$).

Исследуем устойчивость равновесия (1), для чего обычным образом внесем возмущения скорости и давления.

Выбирая в качестве единиц измерения длины, времени, частоты, скорости и давления соответственно $[\alpha/(\rho_1+\rho_2)g]^{1/2}$, $[\alpha/(\rho_1+\rho_2)g^3]^{1/4}$, $[(\rho_1+\rho_2)g^3/\alpha]^{1/4}$, $[\alpha g/(\rho_1+\rho_2)]^{1/4}$ и $[\alpha g/(\rho_1+\rho_2)]^{1/2}$, получим для возмущений следующую линеаризованную систему уравнений:

$$\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial t}=-\frac{1}{\beta_i}\nabla p_i+\frac{1}{A_i}\nabla^2\mathbf{v}_i,\qquad \nabla\mathbf{v}_i=0 \tag{2}$$

$$\beta_i\equiv\frac{\rho_i}{(\rho_1+\rho_2)},\qquad A_i\equiv\nu_i^{-1}\left[\frac{\alpha^3}{g(\rho_1+\rho_2)^3}\right]^{1/4}$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела.

Считая смещение поверхности от положения равновесия малым, имеем на границе раздела следующее [5]:

$$(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\mathbf{n}=0,\qquad (\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\times\mathbf{n}=0,\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=w_1 \tag{3}$$

$$\frac{\beta_1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)=\frac{\beta_1}{A_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\beta_1}{A_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)=\frac{\beta_2}{A_2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)$$

$$p_1-p_2=(\beta_1-\beta_2)(1-\eta\cos\omega t)\zeta-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\zeta+\frac{2\beta_1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial z}-\frac{2\beta_2}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial z}$$

Здесь $\mathbf{n}=\{-\partial\zeta/\partial x,\ -\partial\zeta/\partial y,\ 1\}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Для простоты будем рассматривать слои бесконечной глубины, тогда при $z\to\pm\infty$, $\mathbf{v}_i\to 0$.

Совершая преобразование Фурье по переменным x, y и преобразование Лапласа по времени и учитывая, что $\mathbf{v}_i(t=0)=0$, $\zeta(t=0)=0$ и $\mathbf{v}_i$, $\zeta\to 0$, $\partial\mathbf{v}_i/\partial x$, $\partial\mathbf{v}_i/\partial y$, $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y\to 0$ при $|x, y|\to\infty$, запишем вместо (2) и (3) следующее:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)^2 W_i(s)-As\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)W_i(s)=0,\qquad k^2\equiv k_x^2+k_y^2 \tag{4}$$

При $z=0$ имеем

$$W_1(s)=W_2(s)=sZ(s),\qquad \frac{dW_1(s)}{dz}=\frac{dW_2(s)}{dz}$$

$$\frac{\beta_1}{A_1}\left[\frac{d^2W_1(s)}{dz^2}+k^2W_1(s)\right]=\frac{\beta_2}{A_2}\left[\frac{d^2W_2(s)}{dz^2}+k^2W_2(s)\right] \tag{5}$$

$$\frac{1}{k}\left\{\beta_1\left[s-\frac{1}{A_1}\left(\frac{d^2}{dz^2}-3k^2\right)\right]\frac{dW_1(s)}{dz}-\right. \tag{6}$$

$$\left.-\beta_2\left[s-\frac{1}{A_2}\left(\frac{d^2}{dz^2}-3k^2\right)\right]\frac{dW_2(s)}{dz}\right\}+$$

$$+\Omega_0^2Z(s)-\frac{q}{2}\left[Z(s+i\omega)+Z(s-i\omega)\right]=0$$

Здесь $\Omega_0^2=k^3+k(\beta_1-\beta_2)$, $q=(\beta_1-\beta_2)\eta k$, $W_i(s)$, $Z(s)$ — трансформы Лапласа величин $w_i(t)$ и $\zeta(t)$ соответственно, $\mathbf{k}=\{k_x, k_y\}$ — волновой вектор.

При $z\to\pm\infty$

$$W_i(s)\to 0,\qquad \frac{dW_i(s)}{dz}\to 0 \tag{7}$$

Решая уравнение (4) с условиями (5) и (7), получим для $W_i(s)$

$$W_1(s)=sZ(s)e^{kz}+c_1(s)\left[e^{kz}-e^{-\sqrt{k^2+A_1s}z}\right] \tag{8}$$

$$W_2(s)=sZ(s)e^{-kz}+c_2(s)\left[e^{-kz}-e^{-\sqrt{k^2A_2s}z}\right]$$

$$c_1(s)=\frac{2ks\left(\beta_1kA_2+\beta_2A_1\sqrt{k^2+A_2s}\right)Z(s)}{\left(\sqrt{k^2+A_1}s-k\right)\left[\left(k+\sqrt{k^2+A_1s}\right)\beta_1A_2+\left(k+\sqrt{k^2+A_2s}\right)\beta_2A_1\right]}$$

$$c_2(s)=\frac{2ks\left(\beta_2kA_1+\beta_1A_2\sqrt{k^2+A_1s}\right)Z(s)}{\left(\sqrt{k^2+A_2}s-k\right)\left[\left(k+\sqrt{k^2+A_1s}\right)\beta_1A_2+\left(k+\sqrt{k^2+A_2s}\right)\beta_2A_1\right]}$$

Подставляя (8) в условие (6), совершая обратное преобразование Лапласа, получим, для $\zeta(t)$ с точностью до $1/A_iA_j$ ($i, j=1, 2$) следующее уравнение:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+2k^2\delta(\beta)\frac{d\zeta}{dt}+(\Omega_0^2-q\cos\omega t)\zeta+4ke(\beta)\int_0^t\frac{d^2\zeta(t-\tau)}{dt^2}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}=0 \tag{9}$$

$$\delta(\beta)\equiv\left\{\frac{\beta_1}{A_1}+\frac{\beta_2}{A_2}+\left[\frac{\beta_1^2\sqrt{A_2}}{A_1}+\frac{\beta_2^2\sqrt{A_1}}{A_2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\beta_1\beta_2}{\sqrt{A_1A_2}}\left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)\right]\left(\beta_1\sqrt{A_2}+\beta_2\sqrt{A_1}\right)^{-1}\right\}$$

$$e(\beta)\equiv\beta_1\beta_2/\left(\beta_1\sqrt{A_2}+\beta_2\sqrt{A_1}\right)$$

Рассмотрим случай, когда вторая жидкость является газом (паром), т. е. $\beta_2\ll\beta_1$ (для границы раздела вода — воздух $\beta_2\sim 10^{-3}$, $\beta_1\sim 1$, $A_1\sim 10A_2$). Это позволит в дальнейшем пренебречь членами $\sim\beta_2^2$.

Исключив d^2/dt^2 из-под знака интеграла и сделав замену $X(t)=\zeta(t)\exp\{-k^2\delta(\beta)t\}$, запишем, пренебрегая членами порядка $e(\beta)q$, уравнение (9) в виде

$$\frac{dX}{dt}=Y,\qquad \frac{dY}{dt}+(\Omega_0^2-q\cos\omega t)X=4ke(\beta)\Omega_0^2\int_0^t X(t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} \tag{10}$$

При $e=0$ (10) переходит в уравнение Матье, для которого точки $(0,\ \omega/2)$, $(0,\ \omega)$, ... плоскости $(q,\ \Omega_0)$ резонансные [6].

Будем исследовать решение уравнения (10) в окрестности $(0,\ \omega/2)$, т. е. вблизи основного резонанса. Для этого будем искать решение в виде

$$X(t)=b_1(t)\cos\frac{\omega}{2}t+b_2(t)\sin\frac{\omega}{2}t, \tag{11}$$

$$Y(t)=-\frac{b_1(t)\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}t+\frac{b_2(t)\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}t$$

Подставляя (11) в (10) и усредняя по второй схеме [4], получим для b_1 и b_2 систему уравнений

$$\frac{db_1}{dt}=-b_1k\sqrt{\omega}\,e(\beta)+b_2\left[\left(\frac{\Omega_0^2}{\omega}-\frac{\omega}{4}\right)-e(\beta)k\sqrt{\omega}+\frac{q}{2\omega}\right] \tag{12}$$

$$\frac{db_2}{dt}=-b_1\left[\left(\frac{\Omega_0^2}{\omega}-\frac{\omega}{4}\right)-e(\beta)k\sqrt{\omega}-\frac{q}{2\omega}\right]-b_2k\sqrt{\omega}\,e(\beta)$$

условие разрешимости которой представляет собой уравнение границ области неустойчивости

$$\frac{\eta^2(\beta_1-\beta_2)^2}{\omega^2[2k\delta(\beta)+4e(\beta)\sqrt{\omega}]^2}-\frac{[2\Omega_0^2-{}^1/_2\omega^2-2k\omega^{3/2}e(\beta)]^2}{\omega^2[2k^2\delta(\beta)+4ke(\beta)\sqrt{\omega}]^2}=1 \tag{13}$$

Это — уравнение гиперболы в плоскости параметров Ω_0^2, q.

При амплитудах модуляции, превышающих значения η, определяемые уравнением (13), возникают поверхностные волны с частотой $\omega/2$ и волновым числом k.

Волновое число k_* наиболее легко возбуждаемых волн на поверхности найдем из условия $\partial\eta/\partial k=0$, откуда

$$k_*^3+k_*(\beta_1-\beta_2)-k_*e(\beta)\omega^{3/2}=\frac{\omega^2}{4}+O\left(\beta_2^2,\ \frac{1}{A_iA_j}\right) \tag{14}$$

Решив последнее уравнение, получим

$$k_*=k_0+\frac{k_0\beta_1\beta_2\omega^{3/2}}{(3k_0^2+\beta_1)(\beta_1\sqrt{A_2}+\beta_2\sqrt{A_1})}$$

$$k_0=\left(\frac{\omega^2}{8}+\sqrt{\frac{\omega^4}{64}+\frac{1+3\beta_2/\beta_1}{27\beta_1^3}}\right)^{1/3}+\left(\frac{\omega^2}{8}-\sqrt{\frac{\omega^4}{64}+\frac{1+3\beta_2/\beta_1}{27\beta_1^3}}\right)^{1/3}$$

Пороговое значение амплитуды модуляции a_*, соответствующее волновому числу k_* с точностью до $1/A_iA_j$ $(i,\ j=1,\ 2)$, равно

$$a_*=\frac{2gk_0\delta(\beta)}{\omega\beta_1}\left(1+\frac{2e(\beta)\sqrt{\omega}}{k_0\delta(\beta)}\right) \tag{15}$$

Заметим, что при фиксированном волновом числе k порог возбуждения также определяется выражением (15), если частота возбуждения удовлетворяет соотношению $\Omega_0^2-k\omega^{3/2}e(\beta)-\omega^2/4=0$.

Найденные для границ раздела вода — сухой воздух оценки показывают, что при $\omega=120$ *сек*$^{-1}$ вклад второго слагаемого выражения (15) составляет $\sim5\%$, при $\omega=30$ *сек*$^{-1}$ он составит уже $\sim20\%$, в случае пара вклад будет еще больше.

Таким образом, наличие второй среды существенно повышает порог неустойчивости. Это следует учитывать в практических расчетах, например, при проектировании устройств для диспергирования жидкостей [7].

Поступило 10 V 1976 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сорокин В. И.* Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости. Акуст. ж., 1957, т. 3, вып. 3.
2. *Brand R. P., Nyborg W. L.* Parametrically excited surface waves. J. Acoust. Soc. Amer., 1965, vol. 37, No. 3, p. 510–515.
3. *Брискман В. А., Неволин В. Г., Шайдуров Г. Ф.* Параметрическая неустойчивость поверхности проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях. Уральская конференция по применению магнитной гидродинамики в металлургии. (Тез. докл.), вып. 2. Пермь, 1974.
4. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред, гл. 2. М.– Л., Гостехиздат, 1944.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, гл. 16. М., «Наука», 1967.
7. *Наборщиков П. В., Неволин В. Г.* Механизм дробления нефти гидродинамическим вибратором. Нефтепромысловое дело. Тр. ПермНИПИнефть, 1976, вып. 14.

УДК 532.516.013.2

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ТРУБЫ

И. М. АСТРАХАН, С. М. ГАДИЕВ

(*Москва*)

Рассмотрена задача о вытеснении одной вязкой жидкости другой в круглой трубе при нестационарном пульсирующем ламинарном движении. Получено, что наложение пульсаций определенной частоты на процесс стационарного вытеснения может привести к увеличению коэффициента вытеснения до 10—12%.

В работах [1, 2] рассмотрено нестационарное вытеснение вязкой жидкости между двумя стенками, совершающими гармонические колебания. Рассмотрим задачу о вытеснении одной вязкой жидкости другой в круглой трубе радиуса a и длины l при ламинарном пульсирующем движении. Считаем, что вытесняемая и вытесняющая жидкости имеют одинаковые вязкости и плотности. Ось z направим по оси трубы, а ось r — по радиусу. В начальный момент времени $t=0$ граница раздела жидкостей имеет уравнение $z=0$. Градиент давления задан в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\Delta p}{l}+\rho A\cos\omega t_1 \tag{1}$$

где Δp — постоянная составляющая перепада давления на участке длиной l, ω — частота колебаний давления, ρ — плотность жидкости, A — характеристика амплитуды колебания давления.

Уравнение границы раздела получается путем интегрирования уравнения $dz/dt=v(r,t)$ при условии $z=0$ при $t=0$. Профиль скорости $v(r,t)$ при ламинарном пульсирующем движении с градиентом давления (1) известен [3].

Время появления вытесняющей жидкости в концевом сечении трубы t_1 определяется из уравнения границы раздела между жидкостями при $z=l$ и $r=0$. Коэффициент вытеснения находится по формуле

$$K=\frac{2}{a^2l}\int_0^a z(r,t_1)r\,dr$$

Введем безразмерные переменные $\tau=\nu t/a^2$ и $\alpha=a\sqrt{\omega/\nu}$. Безразмерное время появления первых частиц вытесняющей жидкости в концевом сечении трубы τ_1 определится из уравнения

$$1=B\tau_1+\frac{D}{\alpha^4}\left\{\left[1-\frac{\operatorname{ber}\alpha}{\operatorname{ber}^2\alpha+\operatorname{bei}^2\alpha}\right](1-\cos\alpha^2\tau_1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\operatorname{bei}\alpha}{\operatorname{ber}^2\alpha+\operatorname{bei}^2\alpha}\sin\alpha^2\tau_1\right\} \tag{2}$$