

имеют вид, показанный на фиг. 2, б. Вихревые слои начинают влиять друг на друга, и наблюдается явление биения. Из (8) следует, что разрушение подобных вихревых возмущений возможно только симметричным путем.

Приведем еще один интересный пример. Пусть на оба вихревых слоя наложены по два возмущения с различными, но близкими частотами  $n_1 > n_2$ , амплитудами  $A_1 > A_2$ , с разницей фаз, равной либо нулю, либо  $\pi$ . Решение задачи с такими характеристиками возмущения имеет вид

$$\Omega(x; y; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \left\{ U_0 \left[ \exp\left(-\frac{(y+h/2)^2}{4vt}\right) - \exp\left(-\frac{(y-h/2)^2}{4vt}\right) \right] + [A_1 \exp(-n_1^2 vt) \cos(n_1 x) + A_2 \exp(-n_2^2 vt) \times \right. \\ \left. \times \cos(n_2 x)] \left[ \exp\left(-\frac{(y+h/2)^2}{4vt}\right) \mp \exp\left(-\frac{(y-h/2)^2}{4vt}\right) \right] \right\}$$

Картина биения, аналогичная показанной на фиг. 2, проявится независимо от расстояния  $h$  между вихревыми слоями в струе.

Если учесть еще взаимное влияние вихревых слоев, то получим, что симметричная вихревая конфигурация разрушается быстрее шахматной.

Рассмотренное здесь явление биения существенно для понимания процессов образования крупномасштабных пульсаций. Биения открывают реальную возможность воздействия на формирование вихревой структуры следа и струи, например, путем выбора геометрических характеристик обтекаемой поверхности или акустических характеристик звуковых воздействий.

Существование биений в потоке можно установить по экспериментальным данным работы [5].

Поступила 23 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lugt H. J., Schwiderski E. W. Birth and decay of vortices. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 5.
2. Lugt H. J. Decay of a discontinuity line in viscous fluid. Acta. Mech., 1967, vol. 4, No. 2.
3. Chen Y. N. 60 Jahre Forschung über die Kármánschen Wirbelstrassen — Ein Rückblick. Schweiz. Bauzeitung, 1973, Bd. 91, Nr 44.
4. Беглов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1974.
5. Hattori Naozo, Hatta Keizo, Kotake Susumu. On the shedding modes of vortices behind bodies and its transition. Bull. Inst. Space and Aeronaut. Sci. Univ. Tokio, 1974, Vol. 10, No. 1a.

УДК 532.5:532.135

### О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ СТРУКТУРНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Р. М. МАМЕДОВ, Р. М. САТТАРОВ

(Баку)

Движения ньютонической и неньютонической сред с учетом теплоты трения и зависимости реологических характеристик среды от температуры рассматривались многими авторами [1-6]. Подробная библиография этих работ дана в [3, 5]. В диссертации одного из авторов<sup>1</sup> сделана попытка исследования теплообмена при движении нелинейно-вязкопластичной среды с учетом зависимости пластической вязкости от температуры при постоянном значении предельного напряжения сдвига  $\tau_0$ . Последнее допущение не всегда оправдано, поскольку чаще встречаются случаи, когда с изменением температуры меняется не только пластическая вязкость, но и предельное напряжение сдвига.

В данной работе рассматривается влияние теплоты внутреннего трения с учетом зависимости пластической вязкости и предельного напряжения сдвига от температуры на гидравлические характеристики ламинарного режима движения в:

<sup>1</sup> Саттаров Р. М. Некоторые изотермические и неизотермические движения вязкопластичных сред. Канд. дис. Фонды ИТМО АН БССР, Минск, 1973.

плоском канале нелинейно-вязкопластичных сред, реологическое поведение которого описывается обобщенным уравнением Кэссона [5].

Находятся верхние и нижние оценки для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих указанные процессы.

Пусть вязкопластичная среда, описываемая обобщенным реологическим уравнением Кэссона  $\tau^{1/n} = \tau_0^{1/n} + (\mu\gamma)^{1/n}$ , движется под действием перепада давления  $\Delta p / l$  между двумя параллельными пластинками, расстояние между которыми  $2h$  вдоль оси  $z$ .

Предполагается, что движение термически и гидродинамически стабилизировано, отсутствуют массовые силы. Плотность  $\rho$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$  принимаются равными своим значениям при постоянной температуре стенки  $T_c$ .

Температурную зависимость пластической вязкости и предельного напряжения сдвига представим в виде

$$(1) \quad \mu = \mu_c T_c / T, \quad \tau_0(T) = \tau_{0c} T_c / T$$

Здесь  $\mu_c$  и  $\tau_{0c}$  — соответственно пластическая вязкость и предельное напряжение сдвига при температуре стенки.

Условие на ядре с учетом (1) представляется в виде

$$\frac{\tau_{0c} T_c}{T} \geq \frac{\Delta p}{l} y \quad (0 \leq y \leq y_0)$$

где  $y$  — ось, перпендикулярная плоскости пластин;  $2y_0$  — поперечный размер ядра течения.

Математическая формулировка задачи с учетом (1) в безразмерных переменных записывается в виде

$$(2) \quad \frac{d^2 \theta_1}{dY^2} = 0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0$$

$$(3) \quad \frac{d^2 \theta_2}{dY^2} + NY[(Y\theta_2)^{1/n} - Y_0^{1/n}]^n = 0, \quad Y_0 \leq Y \leq 1$$

$$(4) \quad -\frac{dV_z}{dY} = \frac{2}{\varphi(Y_0)} [(Y\theta_2)^{1/n} - Y_0^{1/n}]^n, \quad N = \left(\frac{\Delta P h^2}{l}\right)^2 \frac{1}{\lambda J T_c \mu_c}$$

$$(5) \quad \frac{d\theta_1}{dY} = 0, \quad Y=0; \quad V_z=0, \quad \theta_2=1, \quad Y=1$$

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \frac{d\theta_1}{dY} = \frac{d\theta_2}{dY}, \quad Y=Y_0$$

$$Y = \frac{y}{h}, \quad \theta_i = \frac{T_i}{T_c}, \quad V_z = \frac{U_z}{U_{z0}}, \quad U_{z0} = \frac{\Delta P h^2}{2l\mu_c} \varphi(Y_0)$$

$$\varphi(Y_0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{2n}{2n-k} (1 - Y_0^{2-m}), \quad m = \frac{k}{n}$$

Здесь  $T_i$  — температура среды (при  $i=1$  в области квазистержневого течения; при  $i=2$  в сдвиговой области),  $U_z$  — продольная скорость,  $U_{z0}$  — значение скорости на ядре течения при изотермическом движении с температурой, равной температуре стенки,  $J$  — механический эквивалент тепла.

Кроме того, условие на ядре имеет вид

$$(6) \quad \frac{\tau_{0c}}{\theta_2} \geq \frac{\Delta p h}{l} Y, \quad 0 \leq Y \leq Y_0, \quad Y_0 \geq \theta_2 Y_0^*$$

где  $Y_0^*$  — ядро течения с учетом зависимости предельного напряжения от температуры.

В результате имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений, не поддающуюся точному аналитическому решению. Из физики процесса известно, что температура  $\theta_2$  достигает максимального значения  $\theta_0$  на ядре течения, а минимального 1 на стенке, т. е.  $1 \leq \theta_2 \leq \theta_0$ . Далее рассматриваются функции  $\theta_{i1}$  и  $\theta_{i2}$ , удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$(7) \quad \frac{d^2 \theta_{i1}}{dY^2} = 0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0; \quad \frac{d^2 \theta_{i2}}{dY^2} + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k Y^{2-m} Y_0^m = 0, \quad Y_0 \leq Y \leq 1$$

$$(8) \quad \frac{d^2\theta_{12}}{dY^2} = 0, \quad 0 \leq Y \leq Y_0; \quad \frac{d^2\theta_{22}}{dY^2} + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \theta_0^{1-m} Y^{2-m} Y_0^m = 0,$$

$$Y_0 \leq Y \leq 1$$

и условиям (5).

Так как

$$-N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k Y^{2-m} Y_0^m \geq -N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \theta_0^{1-m} Y^{2-m} Y_0^m$$

то на основании теоремы сравнения [7] получаем, что  $\theta_{i1} \leq \theta_i \leq \theta_{i2}$ .

Решения уравнений (7) и (8) при граничных условиях (5) имеют вид

$$(9) \quad \theta_{11} = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] Y_0^m \times$$

$$\times [1 - Y_0^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1 - Y_0)]$$

$$(10) \quad \theta_{21} = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] Y_0^m \times$$

$$\times [1 - Y^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1 - Y)]$$

$$(11) \quad \theta_{12} = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] \times$$

$$\times \theta_0^{1-m} Y_0^m [1 - Y_0^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1 - Y_0)]$$

$$(12) \quad \theta_{22} = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] \times$$

$$\times \theta_0^{1-m} Y_0^m [1 - Y^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1 - Y)]$$

Здесь  $\theta_{i1}$ ,  $\theta_{i2}$  — соответственно нижняя и верхняя оценки задачи (2) — (6).

В (11) и (12)  $\theta_0$  — неизвестная величина, для определения которой необходимо решить уравнение

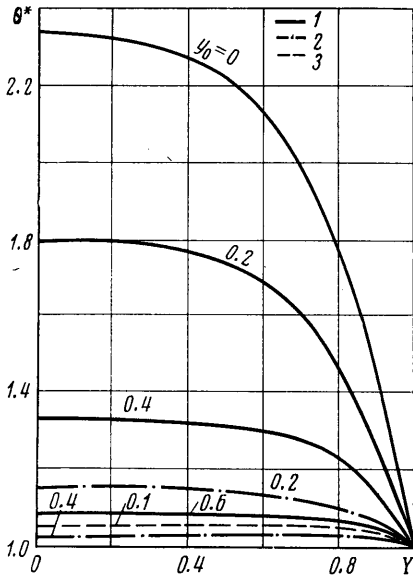
$$\theta_0 = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] \times$$

$$\times \theta_0^{1-m} Y_0^m [1 - Y_0^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1 - Y_0)]$$

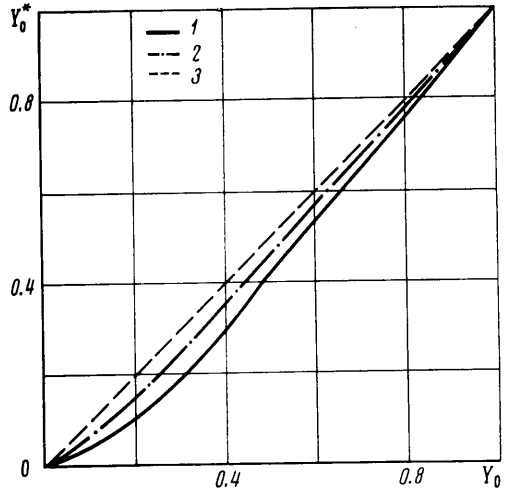
полученное из условия достижения максимального значения температуры на ядре.

Оценочные расчеты показали, что относительная погрешность  $\Delta$  между верхним и нижним решениями зависит от параметра  $N$ , ядра течения  $Y_0$  и параметра нелинейности  $n$ , причем увеличение  $N$  приводит к увеличению погрешности, тогда как увеличение  $Y_0$  и  $n - k$  ее уменьшению.

Для иллюстрации ниже приведено несколько значений относительных погрешностей  $\Delta$  между верхними и нижними решениями, отнесенных к нижнему ре-



Фиг. 1

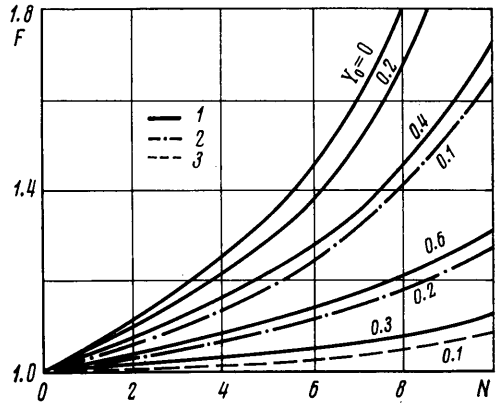


Фиг. 2

шению. Так, например, для  $N=8, n=1, Y_0=0, \Delta=80.2\%$ ,  $n=1, Y_0=0.4, \Delta=19.0\%$ , для  $N=8, n=2, Y_0=0.2, \Delta=3.8\%$ .

Из этого следует, что для значений  $n=1, Y_0 \geq 0.4$ , а также для  $n \geq 2$  полученные верхние и нижние оценки можно рассматривать и как приближенные решения для определения полей температур и скоростей.

Для уточнения оценок можно найти вторые и выше приближения. Однако нахождения вторых и выше приближений приводят к исключительно громоздким формулам неприемлемым для практического пользования. Поэтому для исследования поставленной задачи в данной работе используется среднеарифметическое значение верхнего и нижнего решений, поскольку указанное решение отличается от точного решения для частного случая  $n=1, Y_0=0$  (ньютоновская среда) не больше чем на 3% (см. сноску на стр. 1). Следует отметить, что с целью апробации метода в этой работе для случая  $\tau_0=0$  находились четыре приближения верхних и нижних оценок для  $N$ , близких к порогу «теплового взрыва» (поскольку с уменьшением  $N$  эти оценки улучшались), и во всех случаях среднеарифметическое решение первого приближения находилось в «вилке» этих оценок. Таким образом, запишем выражение для среднеарифметического значения верхнего и нижнего решений



Фиг. 3

$$(13) \quad \theta_1^* = \frac{\theta_{11} + \theta_{12}}{2} = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] \times$$

$$\times \left( \frac{\theta_0^{1-m} + 1}{2} \right) Y_0^m [1 - Y_0^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1 - Y_0)]$$

$$(14) \quad \theta_2^* = \frac{\theta_{21} + \theta_{22}}{2} = 1 + N \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left[ \frac{n^2}{(3n-k)(4n-k)} \right] \times \\ \times \left( \frac{\theta_0^{1-m} + 1}{2} \right) Y_0^m [1 - Y^{4-m} - (4-m) Y_0^{3-m} (1-Y)]$$

На фиг. 1 представлены профили безразмерной температуры для различных значений ядра течения  $Y_0$  и параметра нелинейности  $n$  (характеризующего протяженность криволинейного участка) при  $N=8$ . На всех приведенных фигурах линии 1 соответствуют параметру  $n=1$ , 2 —  $n=2$  и 3 —  $n=3$ .

Из приведенных на фиг. 1 кривых видно, что увеличение предельного напряжения сдвига и параметра нелинейности приводит к заметному понижению температуры.

На фиг. 2 приведены зависимости ядра течения при неизотермическом процессе от изотермического значения ядра течения. Данные кривые показывают, что увеличение предельного напряжения и параметра нелинейности приводит к слабому изменению ядра в координатах  $(Y_0^*, Y_0)$ . Вышеизложенное объясняется тем, что увеличение  $\tau_0$  и  $n$  приводит к уменьшению сдвиговой области движения.

Для определения скорости необходимо проинтегрировать (4) в пределах от  $Y$  до 1, тогда

$$V_z = 2 \int_Y^1 [(\theta_2^* Y)^{1/n} - Y_0^{1/n}]^n dY [\varphi(Y_0)]^{-1}$$

Расход определяется из выражения

$$Q^* = \int_{Y_0}^1 \psi dY + \psi(Y_0) Y_0, \quad Q^* = \frac{Q \mu_c}{2 \Delta P h^3},$$

$$\psi(Y) = \int_Y^1 [(Y \theta_2^*)^{1/n} - Y_0^{1/n}]^n dY$$

Для оценки влияния диссипации энергии на гидравлические характеристики ниже приводятся выражения для определения отношения расходов  $F(Y_0, n, N) = Q^*/Q$ , где  $Q^*$  — расход при неизотермическом движении,  $Q$  — расход при изотермическом движении. Расчеты, проведенные для  $F(Y_0, n, N)$ , изображены на фиг. 3. Как и следовало ожидать, увеличение  $\tau_0$  и  $n$  приводит к выравниванию отношений расходов при неизотермическом условии к изотермическому.

В заключение авторы приносят свою признательность В. И. Аникину за помощь при проведении расчетов.

Поступила 17 XI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
2. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.
3. Бастанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости. ПМТФ, 1965, № 5.
4. Расизаде Я. М., Мамедов Р. М. О влиянии теплоты внутреннего трения на гидравлические характеристики структурного режима движения вязкопластических сред в трубах. Изв. вузов, Нефть и газ, 1968, № 12.
5. Смольский Б. М., Шульман З. П., Гориславец В. М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластических материалов. Минск, «Наука и техника», 1970.
6. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластических и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Азнефтеиздат, 1959.
7. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1–2. М., Изд-во иностр. лит., 1953–1954.