МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1977

УДК 621.43.011:533
621.5:533

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВЯЗКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ С БОЛЬШОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕРАСЧЕТНОСТИ

Н. Ф. БОРИСОВ, В. А. СЫРОВОЙ

(*Москва*)

Получена полная система уравнений, определяющая вязкую ламинарную сильно нерасчетную струю; система образована укороченными уравнениями Навье – Стокса, уравнениями для метрики системы координат, связанной с формой струи, и уравнениями перехода от криволинейных координат к декартовым. Задача о расчете струи сформулирована как задача Коши для этой системы. Рассмотрены двумерные и трехмерные течения. Учтена возможная закрученность струи.

Несмотря на успехи в развитии численных методов (см., например, [1, 2]), включая автоматическое сгущение сетки в областях с резкими градиентами [1], решение уравнений Навье – Стокса представляет в настоящее время достаточно сложную проблему. Поскольку размерность массивов, с которыми приходится работать ЭВМ, равна размерности задачи, то ограничения на машинную память приводят к тому, что уже расчет двумерных течений находится на пределе возможностей ЭВМ типа БЭСМ-6. Добавим к этому, что учет многокомпонентности и многофазности продуктов истечения, неравновесных химических реакций и фазовых переходов требует значительного расширения машинной памяти и увеличения машинного времени. В силу этого укороченные уравнения Навье – Стокса (и, в частности, приближение пограничного слоя) будут и в дальнейшем представлять собой конструктивный инструмент для исследования вязких течений с учетом различных диссипативных процессов. В этом приближении при решении трехмерных задач ЭВМ будет оперировать только с двумерными массивами.

Цель настоящей работы состоит в дополнении теории вязких струй уравнениями для сильно нерасчетных течений, которые, насколько известно авторам, до сих пор получены не были.

При выводе этих уравнений необходимо ввести систему координат, связанную с формой струи, так, чтобы одна из осей была направлена вдоль струи, а вторая – в основном поперек слоя смешения. Уравнения Навье – Стокса, записанные в этой системе, упрощаются в предположении о малости продольных градиентов по сравнению с поперечными. Иными словами, «укорачивание» уравнений Навье – Стокса состоит в упрощении вязких слагаемых, принятом в теории пограничного слоя, и сохранении всех инерционных членов. Такие уравнения, очевидно, будут описывать как невязкое ядро, так и слой смешения, и автоматически учитывать их взаимное влияние. Сквозное интегрирование по сечению струи имеет преимущество перед итеративным процессом, начинающимся с наращивания пограничного слоя вдоль границы невязкой струи; этот процесс может расходиться при сравнимых толщинах вязкой и невязкой областей [3, 4].

Основная трудность, таким образом, состоит в построении подходящей криволинейной системы, если принять во внимание, что форма струи заранее неизвестна и сама должна определяться в процессе решения.

Трудность эта появляется лишь при исследовании сильно нерасчетных струй. При малых нерасчетностях уравнения могут быть записаны в цилиндрических или декартовых координатах [5, 6]. Так, в осесимметричном случае в меридиональной плоскости R, z уравнения Навье – Стокса упрощались с использованием неравенства $\partial/\partial z \ll \partial/\partial R$. Однако это неравенство справедливо лишь при малых углах наклона линий тока к оси струи ($\vartheta \leqslant 5°$). Для затопленной невязкой струи [7] при нерасчетности $p/p_0=20$ и $M=3$ этот угол достигает 20°, при $p/p_0=200$ имеем $\vartheta=45°$, а в предельном случае истечения в вакуум углы наклона на начальном участке струи могут превышать 90°.

Идея использования системы координат, связанной с геометрией течения, возникла и независимо развивалась в двух разделах механики сплошной среды – в механике жидкости [8–10] и в гидродинамической теории интенсивных пучков заряженных частиц [11]. В [8–10] для двумерных течений положение точки определялось длинами дуг s, n («естественные координаты») линий тока и ортогонального им семейства. При рассмотрении элементарного объема (s, $s+ds$, n, $n+dn$) законы сохранения формулировались непосредственно в s, n, минуя понятие собственно криволинейных координат. Отметим, что дифференциалы ds, dn при этом подходе не является полными дифференциалами, а сами s, n – координатами в обычном смысле. Записанные с их помощью дифференциальные соотношения нельзя рассматривать как дифференциальные уравнения, а формальное оперирование с s, n как с координатами (коммутативность перекрестной производной, в частности) приводит к невыполнению уравнения неразрывности. Не имела бы смысла также попытка найти точные решения уравнений, записанных в естественных координатах. Тем не менее соотношения в s, n могут послужить основой для численного метода, основными чертами которого являются разумное постулирование линий тока в пределах шага, использование уравнения неразрывности в интегральной форме для ряда трубок тока и необходимость строить разностную схему на неравномерной сетке в физической плоскости течения [12, 13].

В отличие от [8–10] в [11] использовались криволинейные координаты x^i. В [14] рассмотрена задача об отыскании двумерных потенциальных течений с потенциалом скорости, зависящим только от одной координаты $W=W(x^1)$, причем к уравнениям пучка добавлялось условие Гаусса, связывающее коэффициенты Ляме системы x^i. В [15] аналогичная задача решена для трехмерных течений с привлечением условий эвклидовости пространства. В механике жидкости в постановке, аналогичной [14], в работах [16, 17] рассмотрены задачи об автомодельных решениях, описывающих плоский несжимаемый пограничный слой и плоскую полуструю. Наконец, в [18] в задаче о ближнем следе сформулирована система уравнений для осесимметричного сжимаемого течения, использующая в качестве x^2 функцию тока ψ и включающая в основной набор зависимых переменных не только величину скорости V, но и угол наклона ее к оси z. Почти все цитированные выше работы были ориентированы в основном на поиск точных решений, поэтому ни в одной из них не формулировалась задача Коши для полученной системы.

С формальной точки зрения неизвестная заранее геометрия течения входит в уравнения через элементы метрического тензора g_{ik} используемых криволинейных координат x^i. Для определения g_{ik} – дополнительных искомых функций – к уравнениям механики добавляются соотношения дифференциальной геометрии, выражающие факт эвклидовости пространства. Задача о расчете струи в рамках теории асимптотического пограничного слоя (во внутренних переменных, если пользоваться терминологией сращиваемых асимптотических разложений [19]) представляет собой задачу Коши, начальные данные для которой заданы на некоторой бесконечной стартовой поверхности S. Газодинамическая информация на ней должна быть переработана с учетом формы S, чтобы получить условия Коши и для функций g_{ik}.

Помимо принципиальных отличий криволинейных координат x^i от естественных координат s, n, о которых говорилось выше, координаты x^i обладают также определенными преимуществами перед s, n и при реализации численного алгоритма. В параметрической плоскости x^1, x^2 конечно-разностные аппроксимации могут строиться на равномерной прямоугольной сетке. Задача о переходе от x^1, x^2 к физической плоскости R, z может быть решена после того, как завершено решение газодинамической задачи и зависимые переменные g_{ik} стали известными функциями координат x^1, x^2. Наконец, использование криволинейных координат x^i допускает рассмотрение трехмерных струй; обобщение же s, n — формализма на пространственные течения представляется трудновыполнимым.

1. Как отмечалось выше, при использовании системы координат (x^i=1, 2, 3), связанной с формой струи, необходимо рассматривать уравнения механики жидкости и условия эвклидовости пространства, которые выражаются требованием равенства нулю тензора Римана – Кристоффеля, сводимым к шести тождествам Ляме. Для дальнейшего будет удобно разбить эти тождества на две группы. Первая из них состоит из уравнений, содержащих вторые производные по x^1, а в уравнениях второй группы таких производных нет

$$\rho v^k \nabla_k v^i = \nabla_k P^{ik}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,\rho v^i)=0, \qquad p=R^*\rho T$$

$$\rho v^k \frac{\partial}{\partial x^k}(c_v T) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \lambda \frac{\partial T}{\partial x^k}\right) - \frac{p}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\, v^i) + \frac{\mu}{2} \Pi_{ik} \Pi^{ik} \tag{1.1}$$

$$P^{ik} = -\left[p + \frac{2}{3}\mu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\, v^i)\right] g^{ik} + \mu \Pi^{ik}, \quad \Pi^{ik} = g^{ks} \nabla_s v^i + g^{is} \nabla_s v^k$$

$$R_{2113} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^{1(2)}} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^3} - \frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^3}\right] -$$

$$- \Gamma_{k,12} \Gamma_{13}{}^k + \Gamma_{k,11} \Gamma_{23}{}^k = 0$$

$$R_{1221} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{1(2)}} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{2(2)}}\right] - \Gamma_{k,12} \Gamma_{12}{}^k + \Gamma_{k,22} \Gamma_{11}{}^k = 0 \tag{1.2}$$

$$R_{1331} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{1(2)}} - 2\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{3(2)}}\right] - \Gamma_{k,13} \Gamma_{13}{}^k + \Gamma_{k,33} \Gamma_{11}{}^k = 0$$

$$R_{1223} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^{2(2)}} - \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^3}\right] -$$

$$-\Gamma_{k,12} \Gamma_{23}{}^k + \Gamma_{k,22} \Gamma_{13}{}^k = 0$$

$$R_{1332} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^{3(2)}} - \frac{\partial^2 g_{13}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^1 \partial x^2}\right] - \tag{1.3}$$

$$-\Gamma_{k,13} \Gamma_{23}{}^k + \Gamma_{k,33} \Gamma_{12}{}^k = 0$$

$$R_{2332} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{3(2)}} - 2\frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^{2(2)}}\right] - \Gamma_{k,23} \Gamma_{23}{}^k + \Gamma_{k,33} \Gamma_{22}{}^k = 0$$

$$\Gamma_{l,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right), \quad \Gamma_{ik}{}^l = g^{l\lambda} \Gamma_{\lambda,ik}$$

Здесь и ниже используются обычные тензорные обозначения и стандартные символы для газодинамических переменных; ∇_k — символ ковариантного дифференцирования, P^{ik} — тензор напряжений; $\Gamma_{l,ik}$, $\Gamma_{ik}{}^l$ — символы Кристоффеля первого и второго рода.

2. Сформулируем систему уравнений для двумерных закрученных струй. Ортогональные координаты x^i с метрическим тензором g_{ik} введем так, чтобы

$$\frac{dx^1}{dt} = v^1, \quad \frac{\partial x^2}{dt} = v^2 \equiv 0, \quad \frac{dx^3}{dt} = v^3, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \equiv 0 \tag{2.1}$$

$$V = \sqrt{g_{11}}\, v^1, \quad W = \sqrt{g_{33}}\, v^3, \quad g_{33} = R^2, \quad g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$$

Уравнения Навье — Стокса, неразрывности и энергии имеют вид

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{11}}}\left[\frac{V}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial V}{\partial x^1} + \varkappa_2 W^2\right] = \frac{\partial P^{1k}}{\partial x^k} + P^{1\lambda} \Gamma_{\lambda s}{}^s + P^{\lambda s} \Gamma_{\lambda s}{}^1$$

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{22}}}[k_1 V^2 + k_2 W^2] = \frac{\partial P^{2k}}{\partial x^k} + P^{2\lambda} \Gamma_{\lambda s}{}^s + P^{\lambda s} \Gamma_{\lambda s}{}^2 \tag{2.2}$$

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{33}}}\left[\frac{V}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial W}{\partial x^1} - \varkappa_2 V W\right] = \frac{\partial P^{3k}}{\partial x^k} + P^{3\lambda} \Gamma_{\lambda s}{}^s + P^{\lambda s} \Gamma_{\lambda s}{}^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22} g_{33}}\, \rho V) = 0, \quad g = \det g_{ik}$$

$$\frac{\rho V}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial x^1}(c_vT)=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\lambda\frac{\partial T}{\partial x^k}\right)-$$

$$-\frac{p}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}g_{33}}\,V)+\frac{\mu}{2}\Pi_{ik}\Pi^{ik}$$

$$\varkappa_1=-\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\ln g_{22}}{\partial x^1},\qquad \varkappa_2=-\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\ln g_{33}}{\partial x^1}$$

$$k_1=-\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial x^2},\qquad k_2=-\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\ln g_{33}}{\partial x^2}$$

Здесь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; k_1, k_2 — главные кривизны поверхностей $x^1=\text{const}$, $x^2=\text{const}$ соответственно; P^{ik} — тензор напряжений с компонентами

$$P^{ik}=-\left[p+\frac{2}{3}\mu\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}g_{33}}\,V)\right]g^{ik}+\mu\Pi^{ik}$$

$$\Pi^{11}=\frac{2}{g_{11}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial V}{\partial x^1},\qquad \Pi^{12}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial V}{\partial x^2}+k_1V\right)$$

$$\Pi^{13}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial W}{\partial x^1}+\varkappa_2W\right),\qquad \Pi^{22}=-\frac{2\varkappa_1}{g_{22}}V \tag{2.3}$$

$$\Pi^{23}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial W}{\partial x^2}+k_2W\right),\qquad \Pi^{33}=-\frac{2\varkappa_2}{g_{33}}V$$

Уравнения (2.2) теперь могут быть упрощены путем стандартной оценки порядков, принятой в теории пограничного слоя, или простым отбрасыванием вторых производных по x^1, если их решение не связывается с построением асимптотического ряда по $\mathrm{Re}^{-1/2}$. Заметим, что введенные выше главные кривизны координатных поверхностей придают всем членам в уравнениях ясный геометрический смысл, облегчающий проведение оценок. В случае, когда толщина слоя смешения мала по сравнению с радиусом струи и масштабом продольной неоднородности, получаем

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{11}}}\left[V\frac{\partial V}{\partial x^1}-\frac{W^2}{2}\frac{\partial\ln g_{33}}{\partial x^1}\right]=-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial p}{\partial x^1}+\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial V}{\partial x^2}\right)$$

$$\rho\left[\frac{V^2}{2}\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial x^2}+\frac{W^2}{2}\frac{\partial\ln g_{33}}{\partial x^2}\right]=\frac{\partial p}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}g_{33}}\,\rho V)=0$$

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{11}}}\left[V\frac{\partial W}{\partial x^1}+\frac{VW}{2}\frac{\partial\ln g_{33}}{\partial x^1}\right]=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial W}{\partial x^2}\right),\qquad p=R^*\rho T \tag{2.4}$$

$$\frac{\rho V}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial x^1}(c_vT)=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial T}{\partial x^2}\right)-\frac{p}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}g_{33}}\,V)+$$

$$+\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial V}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial W}{\partial x^2}\right)^2\right]$$

Уравнения (2.2) и уравнение состояния, равно как и (2.4), не образуют полной системы для семи неизвестных функций (V, W, p, ρ, T, R, z) — одного уравнения не хватает. Учтем теперь то обстоятельство, что система x^i введена в пространстве, которое должно быть эвклидовым.

Примем во внимание выражения для g_{ik} через R, z, а также соотношения между направляющими косинусами криволинейных осей $x^1(X_z, X_R)$ и $x^2(Y_z, Y_R)$

$$g_{11}=\left(\frac{\partial R}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x^1}\right)^2,\quad g_{22}=\left(\frac{\partial R}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x^2}\right)^2,\quad g_{33}=R^2$$

$$X_z=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial z}{\partial x^1},\quad X_R=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial z}{\partial x^2},\quad Y_z=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial R}{\partial x^1},\quad Y_R=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial R}{\partial x^2}$$

$$X_z=Y_R,\quad X_R=-Y_z$$

Пользуясь ими, обнаруживаем, что пять из шести тождеств Ляме (1.2), (1.3) становятся тривиальными, а оставшееся представляет собой уравнение, дополняющее системы (2.2) и (2.4)

$$2\left[\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^{2(2)}}+\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{1(2)}}\right]-\frac{1}{g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)^2-\frac{1}{g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}-\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=0$$

Так как задача расчета струи представляет собой задачу Коши, то для ее решения на начальной поверхности S, которую будем считать поверхностью $x^1=0$, необходимо задать не только распределение газодинамических переменных, но и значения g_{11}, g_{22} и $\partial g_{22}/\partial x^1$. Заметим, что система x^i определена соотношениями (2.1) с точностью до маркировки координатных поверхностей. Пусть S задана параметрическими уравнениями (l — длина дуги вдоль S, отсчитываемая от оси вращения)

$$R=R_0(l),\quad z=z_0(l)$$

Потребуем, чтобы $x^2=l$ на S (при введении естественных координат $x^2=l$ во всем поле течения).

Тогда можно показать, что

$$g_{11}|_S=\exp\left[\int_0^l\frac{2}{V_0^2}\left(\frac{p_0'}{\rho_0}+\frac{R_0'}{R_0}W_0^2\right)dt\right],\qquad g_{22}|_S=1$$

$$\left.\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right|_S=(-2\varkappa_1\sqrt{g_{11}})|_{x^1=0}$$

Здесь индексами 0 отмечены значения газодинамических переменных на S. Произвол в маркировке поверхностей $x^1=\mathrm{const}$ позволяет потребовать, чтобы $g_{11}(x^1, 0)=1$.

3. Перейдем к рассмотрению трехмерных течений. Пусть поверхность S, по-прежнему совпадающая с $x^1=0$ в криволинейной системе x^i, задается в декартовых координатах y^i уравнениями

(3.1) $$y^i=y^i(u, v)$$

Будем считать дополнительно, что при $x^1=0$

$$g_{12}=g_{13}=0$$

Ниже будет видно, что это требование играет роль начального условия для дифференциальных уравнений, определяющих g_{12}, g_{13}.

Тот факт, что метрика системы x^i подлежит определению, позволяет провести аналогию задачи о расчете струи с задачей Коши для уравнений Эйнштейна в общей теории относительности [20]. Используя тождества Риччи, можно показать, что условия эвклидовости (1.2), (1.3), подобно уравнениям Эйнштейна [20], находятся в инволюции. Это означает, что при выполнении (1.2) в полупространстве $x^1 \geqslant 0$ достаточно удовлетворить уравнениям (1.3) на S. Таким образом, задача сводится к решению системы (1.2), (1.3) при таких начальных условиях для метрики $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=2, 3$) на S, которые подчинены системе (1.3). Отмеченное свойство условий эвклидовости пространства позволяет подсчитать число уравнений и искомых функций и воспользоваться недоопределенностью системы (1.2), (1.3) для упрощения системы координат, в которой формулируются уравнения струи.

Приступим к получению уравнений незакрученных пространственных вязких струй, линии тока в которых являются почти плоскими кривыми. Этому требованию, по-видимому, удовлетворяют течения, имеющие несколько плоскостей симметрии (истечение из квадратного, прямоугольного или эллиптического сопла, например).

Систему x^i свяжем с линиями тока, так что

$$\frac{dx^1}{dt}=v^1, \quad \frac{dx^2}{dt}=v^2\equiv 0, \quad \frac{dx^3}{dt}=v^3\equiv 0, \quad V=\sqrt{g_{11}}\,v^1 \tag{3.2}$$

Тогда для десяти искомых функций (V, p, ρ, T, g_{ik}) получим девять уравнений (1.1), (1.2). Систему x^i, для которой выполнены условия (3.2), доопределим требованием

$$g_{12}\equiv 0 \tag{3.3}$$

Компоненты тензора напряжений в введенных таким образом координатах запишутся так:

$$
\begin{gathered}
P^{ik}=-\left[p+\frac{2}{3}\mu\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}V\right)\right]g^{ik}+\mu\Pi^{ik}\\
\Pi^{11}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left\{2g^{1k}\frac{\partial V}{\partial x^k}+\left[(g_{11})^2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+(g_{12})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+(g_{13})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+\right.\right.\\
\left.\left.+2g^{11}g^{13}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+2g^{12}g^{13}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}-g^{1k}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^k}\right]V\right\}\\
\Pi^{12}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left\{g^{2k}\frac{\partial V}{\partial x^k}+\left[g^{11}g^{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+g^{12}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+g^{13}g^{23}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+\right.\right.\\
\left.\left.+(g^{12}g^{13}+g^{11}g^{23})\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+(g^{12}g^{23}+g^{13}g^{22})\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}g^{2k}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^k}\right]V\right\}\\
\Pi^{13}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left\{g^{3k}\frac{\partial V}{\partial x^k}+\left[g^{11}g^{13}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+g^{12}g^{23}\frac{\partial \sigma}{\partial x^1}+g^{13}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+\right.\right.\\
\left.\left.+(g^{11}g^{33}+(g^{13})^2)\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+(g^{12}g^{33}+g^{13}g^{23})\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}-\frac{1}{2}g^{3k}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^k}\right]V\right\}\\
\Pi^{22}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[(g^{12})^2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+(g^{22})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+(g^{23})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+\right.\\
\left.+2g^{12}g^{23}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+2g^{22}g^{23}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\right]V\\
\Pi^{23}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[g^{12}g^{13}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+g^{22}g^{23}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+g^{23}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+\right.
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

$$+(g^{12}g^{33}+g^{13}g^{23})\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+(g^{22}g^{33}+(g^{23})^2)\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\Big]V$$

$$\Pi^{33}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\Big[(g^{13})^2\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+(g^{23})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+(g^{33})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}+$$

$$+2g^{13}g^{33}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+2g^{23}g^{33}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}\Big]V$$

В уравнениях (1.1) с P^{ik} из (3.4) можно пренебречь производными по x^1 по сравнению с производными по x^2, если ориентировать ось x^2 так, чтобы она была направлена в основном поперек слоя смешения. Требование это будет выполнено, если, учитывая сделанное выше предположение о линиях тока, направить x^2 на S по градиенту давления. Таким образом, в качестве координатной сетки ξ, η при $x^1=0$ выберем изобары и ортогональные им кривые. Переход от произвольной параметризации u, v на S к ξ, η осуществляется элементарно.

Общие уравнения, которые могут быть справедливы при характерной толщине вязкой области, сравнимой с поперечным размером струи, и которые получаются исключением членов со вторыми и первыми производными по x^1 от V, слишком громоздки; ограничимся поэтому тем, что выпишем здесь уравнения движения и неразрывности для тонкого слоя смешения

$$\rho\left[\frac{V}{g_{11}}\frac{\partial V}{\partial x^1}+\frac{V^2}{g_{11}}\left(\Gamma_{11}^1-\frac{1}{2}\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial x^1}\right)\right]=$$

$$=-g^{11}\frac{\partial p}{\partial x^1}-g^{12}\frac{\partial p}{\partial x^2}-g^{13}\frac{\partial p}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}}g^{22}\frac{\partial V}{\partial x^2}\right],$$

(3.5)

$$\frac{\rho V^2}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\rho V\right)=0$$

$$\frac{\rho V^2}{2g_{11}}\left[g_{13}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-2g_{11}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1}+g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right]=-g^{13}\frac{\partial p}{\partial x^1}+g^{11}\frac{\partial p}{\partial x^3}$$

4. Как отмечалось в п. 3, метрика $g_{\alpha\beta}$ на S должна удовлетворять системе (1.3), образованной квазилинейными уравнениями второго порядка. Можно ожидать, что в эвклидовом пространстве задача эта в отличие от [20] получит полное решение. Действительно, уравнения

$$y^i=y^i(\xi,\eta)$$

получающиеся из (3.1) после перехода от u, v к ξ, η, позволяют вычислить коэффициенты первой и второй квадратичных форм стартовой поверхности. Доопределим систему x^i, для которой выполнены условия (3.2), (3.3), требованием

$$x^2|_S=\eta,\quad x^3|_S=\xi$$

по существу эквивалентным требованию $x^2|_S=l$ в двумерной задаче. Тогда первая квадратичная форма даст метрику $g_{\alpha\beta}$ на S. Относительно второй квадратичной формы $b_{\alpha\beta}$ можно показать, что

$$b_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^1} \tag{4.1}$$

Подставляя $g_{\alpha\beta}$ и $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^1$ из (4.1) в (1.3), пользуясь уравнениями Гаусса и Петерсона — Кодацци, связывающими первую и вторую квадратичные формы, убеждаемся, что система (1.3) удовлетворяется тождественно.

Исследование уравнений (1.2), (3.5) показывает, что на поверхности $x^2=0$ значение g_{11} может быть задано произвольно (при $g_{11}=1$ на всей поверхности $x^2=0$ в качестве x^1 используется длина дуги линии тока). Значение $\partial g_{11}/\partial x^1$, необходимое для интегрирования системы (1.2), (3.5), может быть получено дифференцированием второго уравнения (3.5) по x^1, в то время как третье уравнение этой системы служит для определения g_{13}.

Таким образом, начальные условия для метрики полностью сформулированы.

5. Интересно отметить, что если задача определения начальных условий для струи проще, чем в [20], то система координат x^i в рассматриваемом случае более жестко связана с физикой явления, чем в общей теории относительности. Из приведенных в п. 3 рассуждений видно, что система x^i неортогональна, так что теорема Римана, используемая в [20] для произвольного задания n-компонент (n — размерность пространства) метрического тензора, в задаче о распространении струи не может быть использована. Действительно, система x^i будет полностью ортогональной лишь для тех течений, для которых второе и третье уравнения системы (3.5) совместны

$$(5.1)\qquad \frac{\rho V^2}{2}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial x^2},\qquad \frac{\rho V^2}{2}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^3}=\frac{\partial p}{\partial x^3}$$

Условие совместности уравнений (5.1) таково:

$$(5.2)\qquad \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\rho V^2}\right)\frac{\partial p}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{1}{\rho V^2}\right)\frac{\partial p}{\partial x^2}$$

Легко видеть, что (5.2) тождественно удовлетворяется, например, для течения идеальной несжимаемой жидкости, для которого имеет место интеграл Бернулли с константой в правой части.

Два уравнения Навье — Стокса в приближении пограничного слоя принимают форму (5.1) и в том случае, когда $g_{23}\neq 0$, $g_{12}=g_{13}=0$.

6. Сформулируем, наконец, уравнения трехмерных закрученных струй, при выводе которых будут сняты предположения о характере линий тока, принятые в п. 3. Будем считать, что на начальной поверхности S заданы замкнутые кривые, в каждой точке которых тангенциальная к S компонента скорости направлена по касательной к ним. Систему x^i определим требованиями

$$\frac{dx^1}{dt}=v^1,\quad \frac{dx^2}{dt}=v^2\equiv 0,\quad \frac{dx^3}{dt}=v^3,\quad V=\sqrt{g_{11}}\,v^1,\quad W=\sqrt{g_{33}}\,v^3$$

$$g_{12}=g_{13}=0,\quad g_{23}\neq 0$$

Появление новой искомой функции — «азимутальной» скорости W — позволяет сделать систему «менее неортогональной». Трубки тока $x^2=\mathrm{const}$ теперь ортогональны поверхностям $x^1=\mathrm{const}$, хотя сетка x^2, x^3 на последних неортогональна. Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$P^{ik}=-\left\{p+\frac{2}{3}\mu\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}V\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{33}}}W\right)\Big]\Big\}g^{ik}+\mu\Pi^{ik}$$

$$\Pi^{11}=2g^{11}\left[\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial V}{\partial x^1}+\frac{g^{11}}{2\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}W\right]$$

$$\Pi^{12}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[g^{22}\frac{\partial V}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial V}{\partial x^3}\right]-\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\left[g^{22}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^3}\right]V$$

$$\Pi^{13}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[g^{23}\frac{\partial V}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial V}{\partial x^3}\right]+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}g^{11}\frac{\partial W}{\partial x^1}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\left[g^{23}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^3}\right]V-\frac{1}{2\sqrt{g_{33}}}g^{11}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^1}W$$

$$\Pi^{22}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[(g^{22})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+2g^{22}g^{23}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}+(g^{23})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right]V+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left[(g^{22})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+2g^{22}g^{23}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}+(g^{23})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right]W$$

$$\Pi^{23}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left[g^{22}\frac{\partial W}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial W}{\partial x^3}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{g_{33}}}\left[g^{22}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^3}\right]W+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[g^{22}g^{23}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+(g^{22}g^{33}+(g^{23})^2)\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}+g^{23}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right]V+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left[g^{22}g^{23}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+(g^{22}g^{33}+(g^{23})^2)\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}+g^{23}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right]W$$

$$\Pi^{33}=\frac{2}{\sqrt{g_{33}}}\left[g^{23}\frac{\partial W}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial W}{\partial x^3}\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left[g^{23}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^3}\right]W+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[(g^{23})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}+2g^{23}g^{33}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}+(g^{33})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right]V+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left[(g^{23})^2\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}+2g^{23}g^{33}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}+(g^{33})^2\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right]W$$

Приведем, как и в п. 3, уравнения движения и неразрывности для тонкого слоя смешения в приближении пограничного слоя

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{11}}}\left[\frac{V}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial V}{\partial x^1}+\frac{W}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial V}{\partial x^3}\right]-\frac{\rho W^2}{2}g^{11}\frac{\partial \ln g_{33}}{\partial x^1}+\frac{\rho VW}{2\sqrt{g_{11}g_{33}}}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}=$$

$$=-g^{11}\frac{\partial p}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{\mu}{\sqrt{g_{11}}}g^{22}\frac{\partial V}{\partial x^2}\right]$$

$$-\frac{\rho V^2}{2g_{11}}\left[g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}+g^{23}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right]+$$

$$+\frac{\rho W^2}{2g_{33}}\left[g^{22}\left(2\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)+g^{23}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right]+$$

$$+\frac{\rho VW}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}\left[g^{22}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}+g^{23}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right]=-g^{22}\frac{\partial p}{\partial x^2}-g^{23}\frac{\partial p}{\partial x^3}$$

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{33}}}\left[\frac{V}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial W}{\partial x^1}+\frac{W}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial W}{\partial x^3}\right]-\frac{\rho V^2}{2g_{11}}\left[g^{23}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}+g^{33}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right]+$$

$$+\frac{\rho W^2}{2g_{33}}\left[g^{23}\left(2\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right)+\left(g^{33}-\frac{1}{g_{33}}\right)\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right]+$$

$$+\frac{\rho VW}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}\left[g^{23}\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1}+\left(g^{33}-\frac{1}{2g_{33}}\right)\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right]=$$

$$=-g^{23}\frac{\partial p}{\partial x^2}-g^{33}\frac{\partial p}{\partial x^3}+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{\mu}{\sqrt{g_{33}}}g^{22}\frac{\partial W}{\partial x^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\rho V\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g}{g_{33}}}\rho W\right)=0$$

Начальные условия для $g_{\alpha\beta}$ определяются так же, как в п. 4, причем при $x^1=0$ сетка x^2, x^3 может быть выбрана ортогональной. Поверхности $x^1=$const маркируются заданием g_{11} вдоль центральной линии тока $x^2=0$; $g_{11}=1$, если в качестве параметра взять длину дуги.

Для полной завершенности задачи необходимо добавить уравнения, связывающие декартовы координаты y^i с криволинейными x^i. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^{1(2)}}=\Gamma\ {}^k\frac{\partial y^i}{\partial x^k}$$

Значения y^i на S при этом задаются соотношениями (3.1), а производные по x^1 определяются через вектор единичной нормали n^i к S

$$\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^1}\right|_s=\sqrt{g_{11}}\,n^i$$

Использованные в работе сведения по тензорному анализу можно найти в [21].

Поступила 16 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толстых А. И.* О методе численного решения уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
2. *Кузнецова Л. В., Павлов Б. М.* О расчете струйных течений вязкого газа. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 23, М., Изд-во МГУ, 1974.
3. *Магомедов К. М.* Асимптотические уравнения течения вязкого газа в узких протяженных областях. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 2.
4. *Быркин А. П., Межиров И. И.* О расчете течения газа в гиперзвуковом сопле с учетом влияния вязкости (прямая задача). Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 1.
5. *Бондарев Е. Н., Горина А. Н.* Решение задачи о сверхзвуковой ламинарной нерасчетной струе в спутном потоке разностным методом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.

6. *Бондарев Е. Н., Гущин Г. А.* Пространственное взаимодействие струй, распространяющихся в спутном сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
7. *Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В.* Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. 1. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2.
8. *Karman Th., von.* Compressibility effects in aerodynamics. J. Aeronaut. Sci., 1941, vol. 8, No. 9.
9. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. *Гинзбург И. П.* Аэрогазодинамика. М., «Высшая школа», 1966.
11. *Овчаров В. Т.* Аксиально-симметричные электронные пучки заданной формы. Докл. АН СССР, 1956, т. 107, № 1.
12. *Михайлов В. В.* Метод расчета сверхзвуковых сопел с учетом влияния вязкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
13. *Boynton F. P., Thomson A.* Numerical computation of steady, supersonic two-dimensional gas flow in natural coordinates. J. Comput. Phys., 1969, vol. 3, No. 3.
14. *Овчаров В. Т.* О потенциальном движении заряженных частиц. Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, вып. 10.
15. *Сыровой В. А.* Об однокомпонентных пучках одноименно заряженных частиц. ПМТФ, 1964, № 3.
16. *Yen K. T., Toba K.* A theory of two-dimensional laminar boundary layer over a curved surface. J. Aerospace Sci.. 1961, vol. 28, No. 11.
17. *Uchida S., Watanabe K.* On a similar solution of curved half-jet. Proc. 11-th Int. Congr. Appl. Mech. Munich, 1964. Berlin – Heidelberg – New York, Springer – Verlag, 1966.
18. *Ohrenberger J. T., Baum E.* A theoretical model of the near wake of a slender body in supersonic flow. AIAA paper, 1970, No. 792.
19. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
20. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности, гл. 1, § 7, гл. 9. М., «Наука», 1966.
21. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, 2. М.– Л., Гостехиздат, 1948.