

**МЕТОД СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СВОБОДНОЙ  
КОНВЕКЦИИ С ПОСТОЯННЫМ ПОТОКОМ ТЕПЛА  
НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

**А. А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Ю. А. СОКОВИШИН**

(Ленинград)

Исследуется процесс ламинарной свободной конвекции при умеренных значениях числа Грасгофа. Построено асимптотическое решение, учитывающее влияние передней кромки и взаимодействия пограничного слоя с внешним течением. Сравнение с экспериментальными данными показывает применимость полученного решения для  $Ra \geq 10^2$ .

Описание процесса ламинарной свободной конвекции в среде, соприкасающейся с теплоотдающей поверхностью, в рамках теории пограничного слоя [1-3] приводит к существенному и систематическому расхождению с экспериментальными данными в области умеренных значений числа Грасгофа [4-6]. Это обстоятельство объясняется асимптотическим характером теории пограничного слоя, уравнения которой получены из полной системы уравнений Навье - Стокса, неразрывности и энергии предельным переходом при  $Gr \rightarrow \infty$ . Поправки к теории пограничного слоя при умеренных значениях числа Грасгофа должны учитывать взаимодействие пограничного слоя с внешним течением [7], а также влияние передней кромки [7, 8]. Попытка учета взаимного влияния пограничного слоя и внешнего течения, предпринятая в [9], привела к результатам, далеким от ожидаемых, поскольку на взаимодействие накладывались эффекты задней кромки, усложненные предположением о параллельности линий тока в следе за пластиной.

В данной работе устанавливается влияние передней кромки и взаимодействия пограничного слоя с внешним течением при использовании методов сингулярных возмущений [10].

**1. Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассматривается двумерное установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости около вертикальной полубесконечной пластины с заданным постоянным потоком тепла на поверхности. Начало отсчета расположено на передней кромке пластины. Ось  $x$  направлена вдоль пластины,  $y$  — по нормали к ней. Используются безразмерные переменные: в качестве единицы измерения длины выбирается характерный размер  $L$ , функция тока отнесена к  $\nu Gr^{*1/2}$ , избыточная температура — к  $Lq_w/\lambda$ , где  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $q_w$  — величина теплового потока. В приближении Буссинеска основные уравнения для безразмерных функций тока  $\psi$  и температуры  $\theta$  при отсутствии вязкостной диссипации энергии и соответствующие граничные условия имеют вид

$$(1.1) \quad \psi_y (\nabla^2 \psi)_x - \psi_x (\nabla^2 \psi)_y = Gr^{*-1/2} \nabla^4 \psi + \theta_y$$

$$\psi_y \theta_x - \psi_x \theta_y = Pr^{-1} Gr^{*-1/2} \nabla^2 \theta$$

$$(1.2) \quad \psi_x = \psi_y = 0, \quad \theta_y = -1, \quad y = 0, \quad x > 0$$

$$\psi_{yy} = \psi_x = \theta_y = 0, \quad y = 0, \quad x < 0$$

$$\psi_x = \psi_y = \theta \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq 0$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg y/x$$

При больших значениях числа Грасгофа задача (1.1), (1.2) по терминологии [10] — задача сингулярных возмущений. В качестве параметра возмущений используется  $\varepsilon = Gr^{*-1/2}$ .

Для исследования поведения решения в пограничном слое вводятся координаты, имеющие в пограничном слое порядок единицы. При этом продольная координата слабо деформируется для определения истинного положения пограничного слоя относительно начала координат

$$(1.3) \quad x = X + f(X, Y)\varepsilon, \quad y = Y\varepsilon$$

Функция деформирования  $f$  определяется из условий сохранения автомодельного характера решения в пограничном слое и экспоненциального убывания завихренности на его внешней границе.

Решение в пограничном слое представляется в виде асимптотических разложений для  $Gr \rightarrow \infty$  при фиксированных  $X, Y$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \psi(x, y; Gr^*) &= \varepsilon^{3/2}\psi_0(X, Y) + \varepsilon^{5/2}\psi_1(X, Y) + \dots \\ \theta(x, y; Gr^*) &= \varepsilon\theta_0(X, Y) + \varepsilon^2\theta_1(X, Y) + \dots \end{aligned}$$

Вне пограничного слоя решение имеет вид

$$(1.5) \quad \psi(x, y; Gr^*) = \varepsilon^{1/2}\Phi_0(X, y) + \varepsilon^{3/2}\Phi_1(X, y) + \dots, \quad \theta(x, y; Gr^*) = 0$$

Здесь  $Gr \rightarrow \infty$  при фиксированных  $X, y; x = X + f(X, 0)\varepsilon$ .

Закон предельного перехода определяет область применимости каждого из разложений (1.4), (1.5).

**2. Нулевое приближение.** Считая внешнее течение безвихревым, из (1.5) и (1.1) получим для нулевого приближения внешнего течения

$$(2.1) \quad \nabla^2\Phi_0 = 0$$

Поскольку граничные условия нулевые, не ограничивая общности, имеем

$$(2.2) \quad \Phi_0(X, Y) = 0$$

Процедура сращивания определяет граничное условие на внешней границе пограничного слоя

$$(2.3) \quad \psi_{0Y}(X, \infty) = 0$$

Нулевое приближение для пограничного слоя описывается системой уравнений, полученных подстановкой (1.4) в (1.1)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \psi_{0Y}\psi_{0XY} - \psi_{0X}\psi_{0YY} &= \psi_{0YYY} + \theta_{0Y} \\ \psi_{0Y}\theta_{0X} - \psi_{0X}\theta_{0Y} &= Pr^{-1}\theta_{0YY} \end{aligned}$$

Система уравнений (2.4) совпадает с известной системой уравнений пограничного слоя и допускает автомодельное решение вида [1-3]

$$(2.5) \quad \psi_0(X, Y) = (5X)^{1/2}F_0(\eta), \quad \theta_0(X, Y) = (5X)^{1/2}H_0(\eta), \quad \eta = Y / (5X)^{1/2}$$

Для определения  $F_0$  и  $H_0$  имеем

$$(2.6) \quad \begin{aligned} F_0''' + 4F_0''F_0' - 3F_0'F_0'' + H_0 = 0, \quad H_0'' + Pr(4F_0H_0' - H_0F_0') = 0 \\ F_0(0) = F_0'(0) = F_0'(\infty) = H_0(\infty) = 0, \quad H_0'(0) = -1 \end{aligned}$$

На внешней границе пограничного слоя

$$(2.7) \quad F_0(\eta) \sim F_0(\infty) + \exp, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Здесь  $\exp$  обозначает члены, экспоненциально малые при  $\eta \rightarrow \infty$ .

**3. Первое приближение.** Для первого приближения внешнего течения имеем

$$(3.1) \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0$$

Граничные условия определяются из сращивания при использовании (2.7).

$$(3.2) \quad \Phi_1(X, 0) = (5X)^{1/5} F_0(\infty), \quad X > 0; \quad \Phi_1(X, 0) = 0, \quad X < 0$$

Решение задачи (3.1), (3.2) дается интегралом Пуассона

$$(3.3) \quad \Phi_1(X, y) = -F_0(\infty) (5r)^{1/5} \sin \frac{4}{5} (\varphi - \pi) / \sin \frac{4}{5} \pi$$

Процедура сращивания определяет граничное условие для первого приближения пограничного слоя

$$(3.4) \quad \psi_{1Y}(X, \infty) = \Phi_{1Y}(X, 0) + f_Y \psi_{0X}(X, \infty)$$

Система уравнений для первого приближения пограничного слоя допускает автомодельное решение

$$(3.5) \quad \psi_1(X, Y) = f \psi_{0X} + F_1(\eta), \quad \theta_1(X, Y) = f \theta_{0X} + (5X)^{-3/5} H_1(\eta)$$

При этом экспоненциальное убывание завихренности на внешней границе пограничного слоя обеспечивается, если

$$(3.6) \quad f(X, Y) = Y \operatorname{ctg} \frac{4}{5} \pi + \frac{1}{4} \frac{F_1(\infty)}{F_0(\infty)} (5X)^{1/5}$$

Для определения  $F_1$  и  $H_1$  имеем

$$(3.7) \quad F_1''' + 4F_1'' F_0 - 2F_1' F_0' + H_1 = 0, \quad H_1'' + \operatorname{Pr} (4H_1' F_0 + 3H_1 F_0' - F_1' H_0) = 0$$

$$F_1(0) = F_1'(0) = H_1'(0) = H_1(\infty) = 0,$$

$$F_1(\eta) \sim -4F_0(\infty) \operatorname{ctg} \frac{4}{5} \pi \eta + F_1(\infty) + \exp \quad \eta \rightarrow \infty$$

**4. Второе приближение.** Второе приближение для внешнего течения описывается уравнением

$$(4.1) \quad \nabla^2 F_2 = 0, \quad F_2(X, y) = \Phi_2(X, y) - \frac{1}{4} \frac{F_1(\infty)}{F_0(\infty)} (5X)^{1/5} \Phi_{1X}(X, y)$$

Граничное условие, полученное из сращивания, имеет вид

$$(4.2) \quad \Phi_2(X, 0) = 2F_1(\infty)$$

Отсюда

$$(4.3) \quad F_2(X, y) = F_1(\infty) (1 - \varphi / \pi)$$

Процедура сращивания дает

$$(4.4) \quad \psi_{2Y}(X, \infty) = \Phi_{2Y}(X, 0) + f_Y \psi_{1X}(X, \infty) - f_X f_Y \psi_{0X}(X, \infty)$$

$$\psi_{2YY}(X, \infty) = \Phi_{1YY}(X, 0) + 2f_Y \psi_{1XY}(X, \infty) -$$

$$- 2f_X f_Y \psi_{0XY}(X, \infty) - f_Y^2 \psi_{0XX}(X, \infty)$$

Система уравнений второго приближения для пограничного слоя допускает автомодельное решение вида

$$(4.5) \quad \psi_2(X, Y) = 1/2 f^2 \psi_{0XX} + f F_{1X} + (5X)^{-1/5} F_2(\eta)$$

$$\theta_2(X, Y) = 1/2 f^2 \theta_{0XX} + f ((5X)^{-3/5} H_1(\eta))_X + (5X)^{-1/5} H_2(\eta)$$

Для определения  $F_2, H_2$  имеем

$$(4.6) \quad \begin{aligned} F_2'''' + 4F_2''' F_0 + 6F_2'' F_0' - 2F_2' F_0'' - 4F_2 F_0''' + H_2' = \\ = -2F_1'' F_1' + 48F_0' F_0 + 12F_0' F_0' \eta - 6F_0'' F_0' \eta^2 - 4F_0''' F_0 \eta^2 + \\ + 12F_0'' - 4F_0''' \eta - 2F_0'''' \eta^2 \\ H_2'' + \text{Pr} (4H_2' F_0 + 7H_2 F_0' - F_2' H_0 - 4F_2 H_0') = 4H_0 + 4H_0' \eta - \\ - H_0'' \eta^2 - 3\text{Pr} F_1' H_1 \\ F_2(0) = F_2'(0) = H_2'(0) = H_2(\infty) = 0, \\ F_2(\eta) \sim 8F_0(\infty) \eta^2 - \frac{1}{\pi} F_1(\infty) \eta + F_2(\infty) + \exp \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

5. Собственные решения. В процессе решения могли быть упущены собственные решения, удовлетворяющие нулевым граничным условиям. Дополним поэтому разложение (1.4) членами вида

$$(5.1) \quad c_k e^{\alpha_k + \eta/2} f_k(\eta) / (5X)^{1/2(\alpha_k - 1)}, \quad c_k e^{\alpha_k + \eta} g_k(\eta) / (5X)^{1/2(\alpha_k - 1/2)}$$

Тогда для определения  $f_k, g_k$  получим

$$(5.2) \quad \begin{aligned} f_k'''' + 4f_k'' F_0 + 4(\alpha_k - 3/2) f_k' F_0' - 4(\alpha_k - 1) f_k F_0'' + g_k = 0 \\ g_k'' + \text{Pr} (4g_k' F_0 + 4(\alpha_k - 1/4) g_k F_0' - 4(\alpha_k - 1) f_k H_0' - f_k' H_0) = 0 \end{aligned}$$

Первое собственное решение, соответствующее собственному числу  $\alpha_1 = 5/4$ , имеет вид

$$(5.3) \quad f_1 = 4F_0 - F_0' \eta, \quad g_1 = H_0 - H_0' \eta$$

Константа  $c_1$  определяется вследствие того, что собственные решения появляются из-за неопределенности в деталях течения у передней кромки [10], а деформирование продольной координаты имеет целью устранение этой неопределенности

$$c_1 = -F_1(\infty) / 4F_0(\infty)$$

6. Сравнение с экспериментами. Обсуждение. Численные расчеты систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6), (3.7), (4.6) проводились для шести значений числа Прандтля. Результаты расчетов, приведенные в таблице, показывают, что относительное влияние высших приближений увеличивается при уменьшении числа Прандтля.

Наибольшее число экспериментов выполнено по определению коэффициентов теплоотдачи.

| № | Pr    | $F_0''(0)$ | $H_0(0)$ | $F_0(\infty)$ | $F_1''(0)$ | $H_1(0)$ | $F_1(\infty)$ | $F_2''(0)$ | $H_2(0)$ |
|---|-------|------------|----------|---------------|------------|----------|---------------|------------|----------|
| 1 | 0.03  | 2.4650     | 4.1977   | 3.1149        | -13.264    | -23.785  | -0.5246       | -1.3015    | 42.202   |
| 2 | 0.5   | 0.9298     | 1.6522   | 0.6714        | -0.7169    | -2.4421  | -1.1667       | -0.8132    | -5.9788  |
| 3 | 0.733 | 0.8089     | 1.4798   | 0.5074        | -0.4169    | -1.807   | -1.3506       | -0.5671    | -5.5537  |
| 4 | 1.0   | 0.7220     | 1.3534   | 0.4347        | -0.2515    | 1.4248   | -1.5285       | -0.0261    | -4.2971  |
| 5 | 2.0   | 0.5592     | 1.1300   | 0.3321        | -0.0522    | -0.8671  | -2.0368       | 0.5344     | 1.0502   |
| 6 | 10.0  | 0.3064     | 0.7675   | 0.1810        | 0.0362     | -0.3422  | -5.5372       | 0.1219     | 2.9581   |

В общем случае выражения для локального и среднего коэффициентов теплоотдачи по данной теории имеют соответственно вид

$$(6.1) \quad Nu_x = \frac{1}{H_0(0)} \left[ \left( \frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5} + \frac{1}{5}(a+b) - \frac{a}{5^{1/5}} \left( \frac{Gr_x^*}{5} \right)^{-1/5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} (3a^2+5ab+b^2-c) \left( \frac{Gr_x^*}{5} \right)^{-1/5} + \dots \right]$$

$$(6.2) \quad Nu_L = \frac{1}{H_0(0)} \left[ \frac{5}{4} \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{1/5} + \frac{1}{4}(a+b) \ln \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{1/5} - \frac{a}{4} - \right. \\ \left. - (a+b) \frac{\ln a}{4} - \frac{a^{1/5}}{5^{1/5}} + \frac{1}{20} \left( 3a+5b + \frac{b^2}{a} + \frac{c}{a} \right) + \frac{a}{5^{1/5}} \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{-1/5} - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{5^{1/5}} \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{-1/5} - \frac{1}{20} (-a^2+ab+b^2+c) \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{-1/5} + \right. \\ \left. + \frac{a}{25} (3a^2+5ab+b^2+c) \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{-1/5} + \dots \right]$$

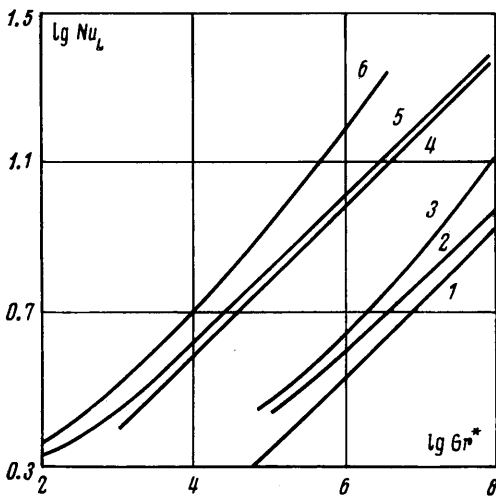
$$a = -F_1(\infty)/4F_0(\infty), \quad b = -H_1(0)/H_0(0), \quad c = -H_2(0)/H_0(0)$$

Здесь коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а также  $H_0(0)$  зависят от числа Прандтля.

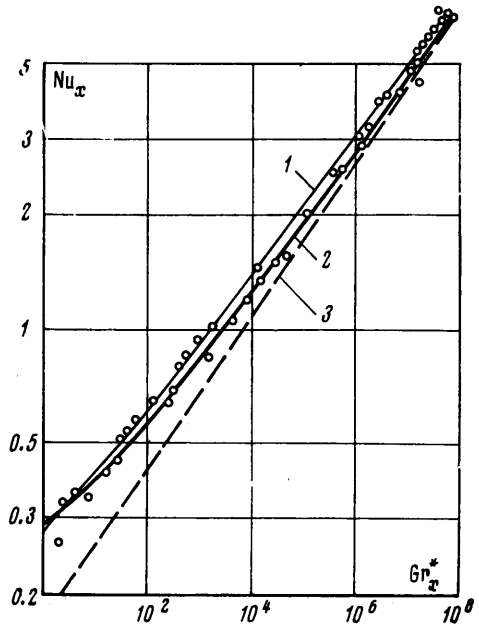
На фиг. 1 представлено сравнение теоретической кривой, соответствующей (6.2), с аппроксимационной кривой, интерпретирующей экспериментальные данные как для ламинарного, так и для турбулентного режима [11]

$$(6.3) \quad Nu_L^{1/2} = 0.825 + 0.387 Ra^{1/4} / [1 + (0.437/Pr)^{1/4}]^{1/2}$$

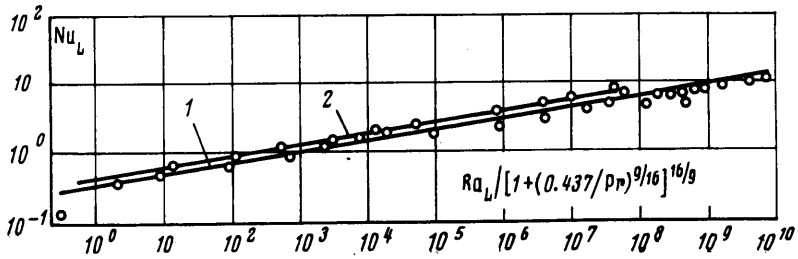
Для кривых 1-3  $Pr=0.03$ , для кривых 4-6  $Pr=0.7$ . Кривые 2, 5 — формула (6.2), 3, 6 — формула (6.3), 1, 4 — теория пограничного слоя.



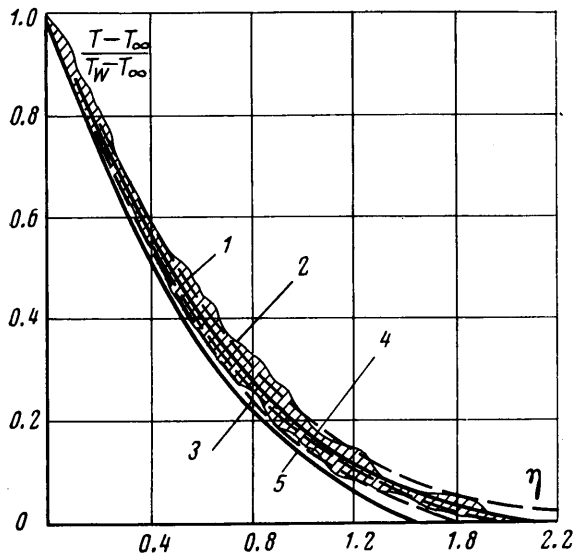
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Это сравнение показывает, что данное решение при убывании числа Грасгофа приближается к эмпирической зависимости, а при возрастании — к теории пограничного слоя. Необходимо отметить, что асимптотический характер решения ограничивает область его применимости значениями  $Ra \geq 10^2$ .

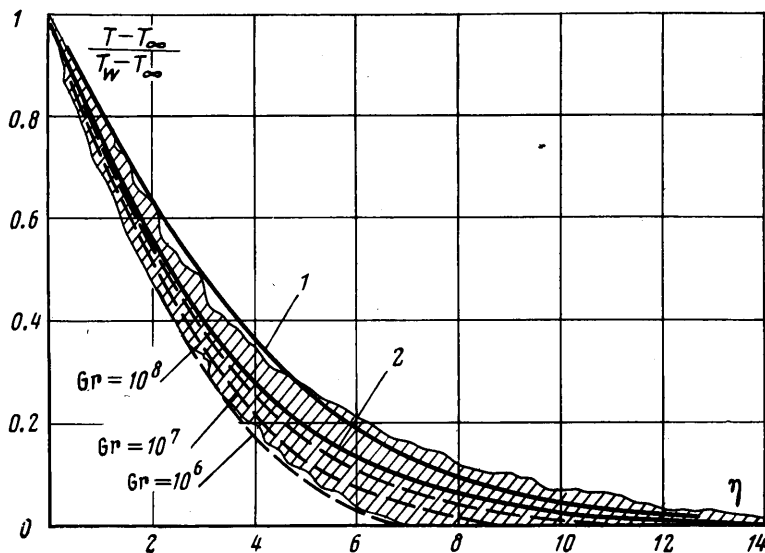
Тем не менее вид (6.1), (6.2) помогает построить аппроксимационные формулы

$$(6.4) \quad Nu_x = \frac{1}{H_0(0)} \left[ \left( \frac{Gr_x^*}{5} \right)^{1/5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^{3/4}} \left( \frac{Gr_x^*}{5} \right)^{-1/20} + \frac{1}{25} \left( \frac{Gr_x^*}{5} \right)^{-2/5} \right]$$

$$(6.5) \quad Nu_L = \frac{1}{H_0(0)} \left[ \frac{5}{4} \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{1/5} + \frac{5^{1/5}}{4} \ln \left( \frac{Gr^*}{5} \right)^{1/5} + 5^{1/5} (5^{-1/4} - 5^{-1}) \right]$$

которые хорошо интерпретируют экспериментальные данные вплоть до  $Gr=1$ . Это иллюстрируется фиг. 2, на которой представлены эксперименты по локальному коэффициенту теплоотдачи для ртути. Кроме теоретической кривой (6.4) приведена также эмпирическая зависимость для  $Pr=0.028$

$$(6.6) \quad \lg Nu_x = -0.551 + 0.145 \lg Gr_x^* + 0.004 (\lg Gr_x^*)^2$$



Фиг. 5

Данные 1 — формула (6.4), 2 — формула (6.6), 3 — теория пограничного слоя. Аналогичная картина получается и для среднего коэффициента теплоотдачи, как это видно на фиг. 3, где представлено сравнение настоящей теории с обобщенными экспериментальными данными [11]. Данные 1 — формула (6.3), 2 — формула (6.5).

На фиг. 4, 5 приведены профили температуры в пограничном слое для воды и ртути, рассчитанные по настоящей теории и определенные экспериментально [4-6]. Сплошные кривые соответствуют теории пограничного слоя, пунктирные — развитой здесь теории при различных значениях числа Грасгофа; заштрихована область экспериментальных точек. Сравнение этих профилей позволяет объяснить большой разброс экспериментальных данных, особенно для ртути, проведением экспериментов при различных числах Грасгофа. На фиг. 4 кривым 1 соответствуют значения  $Gr=10^8$ , 2 —  $Gr=10^7$ , 3 —  $Gr=10^6$ , 4 —  $Pr=5$ , 5 —  $Pr=10$ . На фиг. 5 1 —  $Pr=0.024$ , 2 —  $Pr=0.03$ , 3 —  $Gr=10^8$ , 4 —  $Gr=10^7$ , 5 —  $Gr=10^6$ .

Отклонение результатов настоящей теории от теории пограничного слоя при убывании числа Грасгофа становится особенно понятным, если учесть, что построенное решение описывает течение, начинающееся несколько ниже передней кромки. Действительно, в силу (1.3) и (3.6) в начале координат

$$X = (-F_1(\infty) / 4F_0(\infty))^{3/4} (Gr^* / 5)^{-1/4}$$

Отсюда следует, что относительное влияние передней кромки тем существенней, чем меньше  $L$ , а следовательно, и число Грасгофа.

Поступила 26 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Sparrow E. M., Gregg J. L. Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 2.
2. Wilks G. External natural convection about two-dimensional bodies with constant heat flux. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1972, vol. 15, No. 2.

3. *Tran N. N.* Sur la convection naturelle laminaire autour d'une plaque plane en incompressible. C. R. Akad. Sci., Paris, Ser. A, 1972, t. 275, Nr. 21.
4. *Chang K. B., Akins R. G.* An experimental investigation of natural convection in mercury at low Grashof numbers. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1972, vol. 15, No. 3.
5. *Julian D. V., Akins R. G.* Experimental investigation of natural convection heat transfer to mercury. Ind. and Engng Chem. Fundament, 1969, vol. 8, No. 4.
6. *Colwell R. G., Welty J. R.* An experimental investigation of natural convection with a low Prandtl number fluid in a vertical channel with uniform wall heat flux. Trans. ASME, Ser. C, 1974, vol. 96, No. 4. (Рус. перев.: Экспериментальное исследование свободной конвекции жидкости с малыми числами Прандтля в вертикальном канале при постоянном тепловом потоке на стенке. Теплопередача, 1974, т. 96, № 4.)
7. *Yang K.-T., Jerger E. W.* First-order perturbations of laminar free-convection boundary layers on a vertical plate. Trans. ASME, 1964, vol. 86C, No. 1. (Рус. перев.: Исследование возмущений первого порядка пограничного слоя на вертикальной пластине в задаче о свободной конвекции. Теплопередача, Сер. C, 1964, т. 86, № 1.)
8. *Brodowicz K.* An analysis of laminar free convection around isothermal vertical plate. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 2.
9. *Chang K. S., Akins R. G., Bankoff S. G.* Free convection of a liquid metal from a uniformly heated vertical plate. Ind. and Engng Chem. Fundament., 1966, vol. 5, No. 1.
10. *Van-Dyke M. D.* Perturbation methods in fluid mechanics. N. Y., Akad. Press., 1964. (Рус. перев.: Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.)
11. *Churchill S. W., Chu H. H. S.* Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1975, vol. 18, No. 11.