

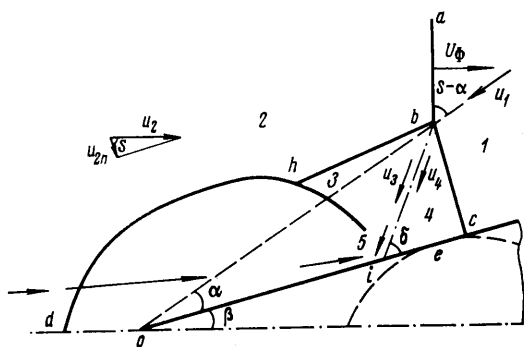
К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ДАВЛЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В. Н. ЛЯХОВ

(Москва)

Проводится сравнительный анализ результатов физических [1-4] и математических экспериментов [5-8] с целью выяснения механизма дополнительного подъема давления за фронтом маховской волны. Исследуются возможности и диапазоны применения упрощенных моделей течения для оценки давления в некоторых характерных точках поверхности отражения (например, клина, цилиндра или сферы).

1. Явление нестационарного взаимодействия ударной волны с неподвижным твердым телом определяется числом Маха M_Φ , характеризующим интенсивность падающей ударной волны ab (фиг. 1), показателем адиабаты среды $\gamma = c_p/c_v$ и геометрией поверхности тела.



Фиг. 1

плоской волны с твердой поверхностью для углов падения $0 \leq S \leq S_I$ (S_I — критический угол; при $S > S_I$ не существует решения теории 1). Назовем теорией II рассмотрение процессов в окрестности тройной точки b при маховском отражении. Если предположить газ идеальным, а фронты волн ab , bc и bh плоскими, то в диапазоне $S_{II} \leq S \leq 90^\circ$ определяется решение теории II и находится давление P_{II} за маховской волной bc [9]. Случаю $S = S_{II}$ соответствует стационарная маховская конфигурация, когда $\alpha = 0$, а $P_{II} = P_I$. Оценка давления на поверхности клина за фронтом волны bc проводится в предположении перпендикулярности ее к поверхности отражения. На самом деле волны бывают искривлены, поэтому вместо последнего условия иногда пользуются экспериментально полученным значением угла α [1, 3]. Надо заметить, что в обоих случаях величины давлений P_{II} близки друг к другу.

Теория II рассматривает течение в системе координат, движущейся с точкой b . В этом случае в скачки ab и bc втекает поток со скоростью $u_1 = U_\Phi / \sin(S - \alpha)$, где $U_\Phi = M_\Phi a_1$ — скорость фронта волны ab относительно клина, a_1 — скорость звука среды 1 (индекс 1 относится к параметрам среды перед волной ab ; клин покоится в среде 1). Условия параллельности векторов скоростей u_3 и u_4 (скорости относительно точки b потоков 3 и 4, движущихся вдоль контактного разрыва bi) и равенства давлений $P_3 = P_4$ (давление в областях 3 и 4) замыкают систему уравнений, описывающих скачки ab , bc и bh . После исключения некоторых неизвестных величин остается одно трансцендентное уравнение, корень которого находится численно. В результате определяется давление $P_{II} = P_4$ на фронте маховской волны, а затем и все остальные параметры (в частности, требуемые для дальнейшего анализа значения u_3 , u_4 , a_3 , a_4 и угол δ (фиг. 1)).

При взаимодействии с клином геометрия задается углом β или углом падения $S = \pi/2 - \beta$ (фиг. 1). В случае сложной геометрии тела течение в окрестности точки отражения определяется местным значением угла падения S и кривизной поверхности.

Для удобства изложения назовем теорией I теорию регулярного отражения [9], которая определяет давление P_I в точке взаимодействия

2. В рассматриваемых процессах эпюры давлений на поверхности клина, полученные в численных расчетах [5-8], имеют три характерных уровня: 1) в окрестности вершины клина o — давление P ; 2) в районе точки пересечения с клином падающей или маховской волны (обозначим величины давлений соответственно P_R и P_M); 3) при маховском отражении в окрестности точки i (точки пересечения линии контактного разрыва bi с поверхностью клина) — уровень P_m . В случаях отражений волн умеренной интенсивности ($M_\Phi \leq 1.8$) рассматриваемая эпюра имеет минимум в средней части, причем при углах S , близких к S_t , значения P_R и P_M больше P_i . При маховском отражении увеличение $M_\Phi \geq 2$ приводит к появлению дополнительного максимума давления P_m в окрестности точки i и P_i становится больше P_M . Этот эффект наблюдался экспериментально [1-4], и был получен теоретически [5-8] (об особом характере течения в окрестности точки упоминалось еще в [9]). В работах [1, 5, 6] это повышение давления объясняется в рамках теории II следующим образом. Поток области 3 (фиг. 1), имеющий относительно точки i скорость $\Delta u = u_3 - u_4$, тормозится и изменяет свое направление внутри угла bio . Вследствие этого возникает волна сжатия, которая при некоторых условиях [6] формирует всиячий скачок, приходящий в точку h и вызывающий излом отраженной волны bhd . Таким образом, давление сначала повышается на фронте маховской волны до $p = P_M$, а затем (в области 5) происходит дополнительный подъем до $p = P_m$. Далее по поверхности клина устанавливается уровень давления, определяемый обтеканием передней части тела потоком с числом Маха $M_2 = U_2/a_2$.

Анализ результатов физических [1-4] и математических [5-8] экспериментов, представленных на фиг. 2-5, позволяет провести оценки давлений в указанных выше характерных точках с помощью данных теории II и понять характер течения в областях 3-5 при различных величинах определяющих параметров M_Φ , γ и β . В работе [1] максимальное давление P_m оценивается по следующей формуле:

$$(2.1) \quad P_a/P_{II} = 1 + \gamma \Delta M^2, \quad \Delta M = \Delta u/a_3$$

В работах [5, 6] использовались соотношения изэнтропического и неизэнтропического (через прямой скачок) торможения [10]

$$(2.2) \quad P_b/P_{II} = \begin{cases} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \Delta M^2\right)^{1/(\gamma-1)} & (\Delta M \leq 1) \\ \left(\frac{\gamma}{\mu} \Delta M^2\right)^{1/(\gamma-1)} / (\mu \Delta M^2 - \nu)^{1/(\gamma-1)} & (\Delta M > 1) \end{cases}$$

$$\mu = 2\gamma/(\gamma+1), \quad \nu = (\gamma-1)/(\gamma+1)$$

Нестационарный характер рассматриваемых процессов учитывается в работе [7] соотношением, описывающим торможение газа движущимся скачком уплотнения, который возникает при натекании потока 2 с числом Маха $M_2 = U_2/a_2$ (фиг. 1) на бесконечную плоскость, совпадающую с поверхностью os . При этом «гасится» лишь нормальная составляющая $M_{2n} = M_2 \cos S$

$$(2.3) \quad P_c/P_2 = 1 + \Phi_c/2 + \sqrt{\Phi_c(\mu + \Phi_c/4)}$$

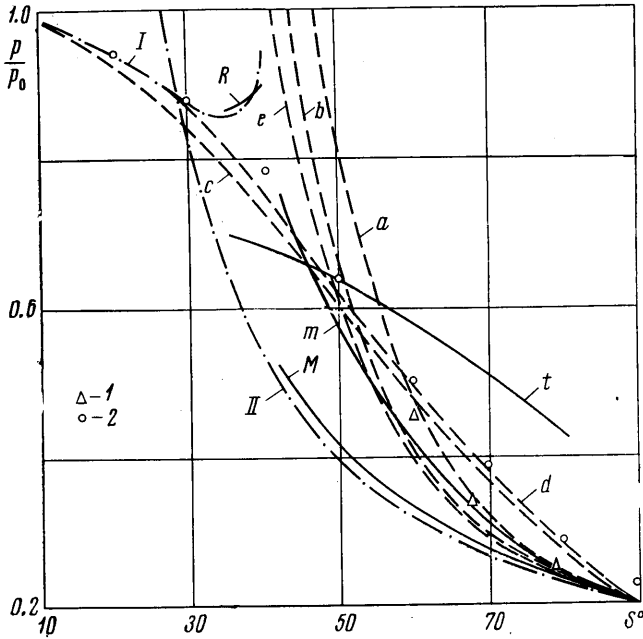
$$\Phi_c = \frac{(\gamma M_{2n})^2}{\mu} = \frac{(P_{21}-1)^2 \cos^2 S}{P_{21}(\nu P_{21} + 1)}$$

Здесь $P_{21} = P_2/P_1 = \mu M_\Phi^2 - \nu$; индекс 2 характеризует параметры за фронтом падающей ударной волны ab . Физический смысл рассматриваемой модели заключается в том, что в потоке 2 существует струйка газа (изо-

бражена слева на фиг. 1), которая, втекая через нестационарную волну dh , теряет при этом часть импульса, определяемого нормальной составляющей числа Маха M_{2n} . Аналогичный механизм повышения давления можно предположить, рассматривая торможение потока 3 с числом Маха ΔM нестационарной волной hi

$$(2.4) \quad P_d/P_{II} = 1 + \Phi_d/2 + \sqrt{\Phi_d(\mu + \Phi_d/4)}, \quad \Phi_d = (\gamma \Delta M \sin \delta)^2 / \mu$$

Выражение (2.3) может быть использовано для оценки изменения максимального давления P_m при отражении взрывной (криволинейной) волны



Фиг. 2

от плоскости. В этом случае величина S также характеризует местный угол падения волны.

Заметим, что в описанных моделях течения из-за нестационарности ударных волн (hd или hi) достаточно выполнения условий $M_2 > 0$ или $\Delta M > 0$.

Анализ результатов теории II показывает, что $\Delta M \approx 0.2$, поэтому для малых значений ΔM можно воспользоваться выражением давления торможения в несжимаемой жидкости [10]

$$(2.5) \quad P_e/P_{II} = 1 + \gamma \Delta M^2 / 2$$

3. По результатам математических экспериментов, представляющих собой численные решения краевых задач об отражении ударной волны от клина [5, 6, 8], сплошными линиями t , R , M , m на фиг. 2—4 нанесены величины P_i , P_R , P_M , P_m , отнесенные к значению P_0 , которое характеризует давление при отражении ударной волны от параллельной ей плоскости [9]

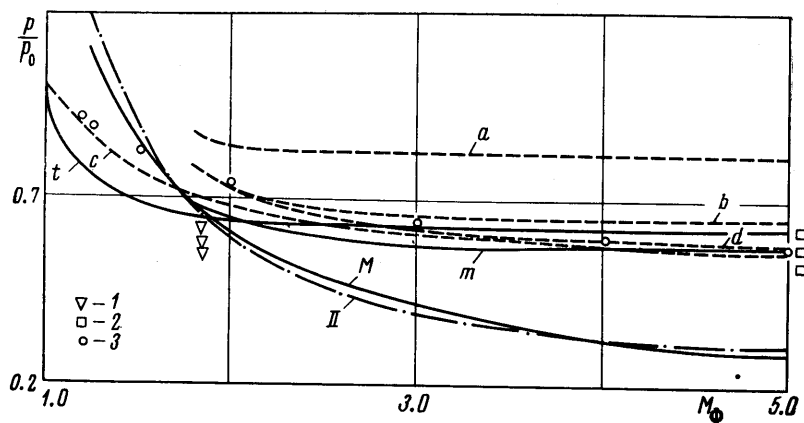
$$(3.1) \quad P_0 = P_2 \frac{(2\nu+1)P_{21}^{-\nu}}{1+\nu P_{21}}$$

Отметим, что это соотношение получается из (2.3) при $S=0$.

Представленные результаты математических экспериментов получены интегрированием системы уравнений с частными производными, описывающей невязкое и нетеплопроводное движение совершенного газа. Дифференциальные уравнения аппроксимировались конечно-разностными со вторым порядком точности. Скачки в поле течения не выделялись, и решение проводилось методом сквозного счета.

Данные теорий I и II нанесены штрихпунктирными линиями I и II (P_I, P_{II}). Остальные пунктирные кривые a, b, c, d, e соответствуют пяти различным моделям течения (2.1) — (2.5), в той или иной мере описывающим максимальное давление P_m .

Из сравнения кривых на фиг. 2 ($M_\infty=3, \gamma=1.4$) следует, что численно полученная величина P_m , характеризующая первый подъем давления, ко-



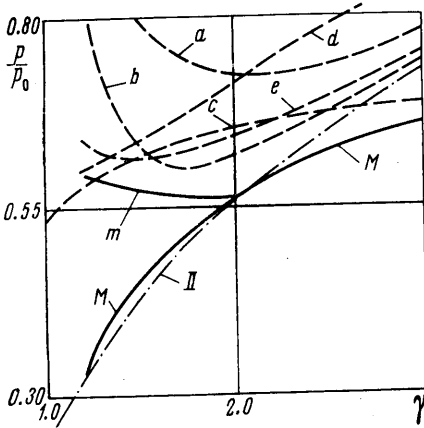
Фиг. 3

торый осуществляется во фронте маховской волны bc , близка к уровню P_{II} , определяемому теорией II (сравнить кривые M и II). В области регулярного взаимодействия ($S \leq S_I = 39.3^\circ$) значения P_R , определяющие давление в окрестности точки взаимодействия, полученные в численном решении [6], также близки к $P_I(S)$. Здесь следует отметить, что, как и в теории I, наблюдается [6] немонотонность зависимости $P_R(S)$ при $S \rightarrow S_I$.

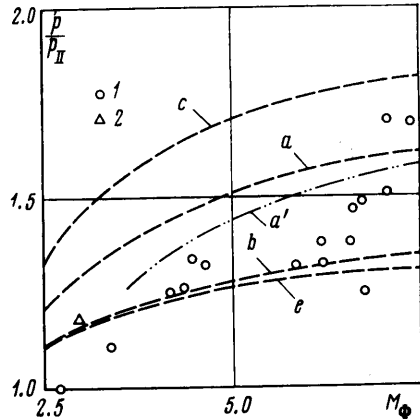
Сплошная кривая $P_m(S)$ характеризует уровень дополнительного подъема давления, реализующегося в области 5. Видно, что максимальное давление P_m с точностью до 6% можно оценивать по формулам (2.3), (2.4) в диапазоне углов $42^\circ \leq S \leq 50^\circ$, при $50^\circ \leq S \leq 65^\circ$ — по формулам (2.2), (2.5), а в диапазоне углов $65^\circ \leq S \leq 90^\circ$ — по формуле (2.1). Физический смысл формулы (2.1) здесь не ясен, так как она соответствует определению давления в критической точке движущегося затупленного тела по теории Ньютона [10], которая, однако, справедлива при $\Delta M \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 1$. Кривые I и II пересекаются при $S = S_{II} = 28.5^\circ$, что соответствует стационарной маховской конфигурации. На фиг. 2 символами 1 нанесены данные эксперимента [4], характеризующие уровень P_m . Символами 2 представлены значения максимального давления P_m , полученные в математическом эксперименте [7] при отражении ударной волны от цилиндра. Угол S в этом случае заключен между фронтом волны и касательной к поверхности (изображенной на фиг. 1 пунктиром) в точке пересечения линии фронта с контуром тела (в точке e). Эти данные хорошо аппроксимируются выражениями (2.3) или (2.4). Заметим, что при отражении ударной волны от цилиндра

величины P_R , P_M и P_m близки к аналогичным значениям в случае отражения от сферы [7].

На фиг. 3 приведены аналогичные зависимости для $S=50^\circ$ и $\gamma=1.4$, характеризующие маховское отражение ударной волны от клина (решение теории I существует при $M_\Phi \leq 1.13$). Видно, что дополнительный подъем P_m возникает при $M_\Phi \geq 1.8$, а величины P_M и P_{II} , как и на фиг. 2, близки друг к другу. Экспериментальные данные [4] и численные решения полной



Фиг. 4



Фиг. 5

краевой задачи [5, 6, 8] свидетельствуют о том, что величина давления за фронтом маховской волны близка к данным теории II, т. е. $P_M \approx P_{II}$ (см. кривые M и II на фиг. 2—4). При больших значениях M_Φ ход кривых m и M горизонтален, поэтому выводы, сделанные при анализе кривых на фиг. 2, можно распространить на случай $2 \leq M_\Phi < \infty$. Для сравнения символами 1 и 2 нанесены экспериментальные данные работы [3], причем символы 2 относятся к $M_\Phi=6$. Видно, что данные для $M_\Phi=6$ хорошо согласуются с величиной P_m , полученной в математическом эксперименте [6]. Символами 3 нанесены значения P_m , полученные при отражении ударной волны от цилиндра [7]. В рассматриваемом случае наилучшую оценку величины P_m на клине дает формула (2.3), на цилиндре — (2.4).

Если отраженная волна dh присоединена к вершине клина, то значение P_i легко рассчитывается по углу клина и величине M_2 . В случае отошедшего нестационарного скачка (изображенного на фиг. 1), величину P_i оценить сложнее. В этом случае при $M_\Phi \leq 1.1$ значение P_i (кривая t на фиг. 3) отличается от значения давления изэнтропического торможения потока не более чем на 2÷5%, т. е. интенсивностью отраженной волны dh (фиг. 1) можно пренебречь. При увеличении M_Φ необходимо учитывать отраженную волну, и, как видно из фиг. 2, при $M_\Phi=3$ и $S=45 \pm 5^\circ$ значение P_i близко к величине P_c (кривая c). Эта оценка справедлива и для других значений M_Φ (см. фиг. 3).

Влияние показателя адиабаты γ на параметры течения при $M_\Phi=3$ и $S=50^\circ$ характеризуют кривые на фиг. 4. Дополнительное повышение давления наблюдается при $\gamma \leq 2$ (решение теории I существует при $\gamma \leq 1.02$). При $\gamma \geq 2.3$ давление P_{II} превышает величину давления на фронте маховской волны, полученную в численном расчете [8], т. е. $P_{II} > P_M$. Различные участки зависимости $P_m(\gamma)$ с точностью до 7% описываются соответствующими (фиг. 4) отрезками кривых b , c , d или e .

На фиг. 5 символами 1 нанесены экспериментальные значения максимального давления P_m на поверхности клина (отнесенные к P_{II}), полученные в [1] при $\gamma=1.4$ и $S=66^\circ$. Символом 2 отмечена величина P_m из математического эксперимента [6] (см. фиг. 2). Кривая a' представлена из работы [1], в которой она построена с помощью формулы (2.1). Отличие кривой a , тоже определяемой выражением (2.1), от кривой a' заключается, по-видимому, в различных значениях P_{II} , ΔM , δ , так как в настоящей работе использовалась замкнутая теория II, а в [1] эти значения определялись по экспериментальному значению угла α . Видно, что данные [1], за исключением некоторых выпавших точек, лежат в области, ограниченной кривыми $a(a')$ и b . Это согласуется с положением кривых на фиг. 2 при $S=66^\circ$ и является подтверждением того, что выводы, сделанные при анализе кривых на фиг. 2, можно распространить на большие значения M_ϕ .

Ниже приведены значения P_0 и M_2 , а также данные теории II для режимов, соответствующих фиг. 2—5.

		$M_\phi=3$		$\gamma=1.4$	
		S°	ΔM	δ°	
		30	1.60	1.5	
		40	1.18	11.6	
		50	0.87	21.9	
		60	0.59	32.4	
		70	0.36	42.8	
		80	0.13	53.4	
		90	0	64.2	
$S=50^\circ, \gamma=1.4$					
M_ϕ	P_0/P_1	M_2	ΔM	δ°	
1.8	10.5	0.84	0.45	13.7	
2.2	20.5	1.07	0.63	17.4	
2.6	34.2	1.23	0.76	20.1	
3.0	51.7	1.36	0.87	21.9	
4.0	111.0	1.55	1.02	24.7	
5.0	191.4	1.67	1.12	26.1	
$M_\phi=3, S=50^\circ$					
γ	P_0/P_1	M_2	ΔM	δ°	
1.2	58.9	1.77	1.29	24.9	
1.4	51.7	1.36	0.88	21.9	
1.6	48.4	1.11	0.63	20.4	
2.0	45.6	0.82	0.38	19.3	
2.5	44.5	0.62	0.23	19.3	
3.0	44.2	0.50	0.16	19.6	
$S=66^\circ, \gamma=1.4$					
M_ϕ	P_{II}/P_1	M_2	ΔM	δ°	
3	14.78	1.36	0.46	38.7	
4	26.22	1.55	0.54	41.2	
5	40.92	1.67	0.59	42.5	
6	58.87	1.70	0.66	43.3	
7	80.08	1.77	0.67	43.7	

В заключение следует отметить, что представленные на фиг. 2—5 результаты дают возможность в ряде практически важных случаев оценить характер и величину распределения давления на поверхности тела при падении на него ударной волны без проведения расчетов сложной краевой задачи.

Эти результаты помогают понять, как меняется характер течения газа при изменении величин M_ϕ , γ и β .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gvozdeva L. G., Bazhenova T. V., Predvoditeleva O. A., Fokeev V. P.* Pressure and temperature at the wedge surface for Mach reflection of strong shock waves. *Astronaut. Acta*, 1970, vol. 15, No. 5.
2. *Merritt D. L.* Mach reflection on a cone. *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, No. 6.
3. *Макаревич Г. А., Предводителева О. А., Лисенкова Г. С.* Отражение ударной волны от клина. *Теплофизика высоких температур*, 1974, т. 12, № 6.
4. *White D. R.* An experimental survey of the Mach reflection of shock waves. *Proc. 2-nd Midwestern Conf. Fluid Mechanics*, 1952. Ohio State Univ.—Engng Experiment Station, 1952, Bul. No. 149.
5. *Белошицкий А. В., Крикунов В. В., Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н.* Исследование различных газодинамических течений с помощью явных разностных схем сквозного счета. *Научн. тр. Ин-та механ. МГУ*, 1973, № 30.
6. *Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н.* Численное решение задачи дифракции ударной волны на клине. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1974, № 6.
7. *Ляхов В. Н.* Нестационарные нагрузки при дифракции ударной волны. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 4.
8. *Ляхов В. Н.* Математическое моделирование маховского отражения ударных волн в средах с различными показателями адиабаты. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 3.
9. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
10. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика. М., «Высшая школа», 1965.