

РАСЧЕТ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ
ВЯЗКОГО ГАЗА С ПОМОЩЬЮ
НЕЯВНОЙ ДИВЕРГЕНТНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ, А. В. ПАНАСЕНКО

(Москва)

К настоящему времени известен ряд работ, где изучаются вопросы одномерного нестационарного движения вязкого сжимаемого газа. В [1-3] на основе асимптотического анализа уравнений Навье - Стокса учтено влияние эффектов вязкости и теплопроводности на формирование свойств течения. Использование явных и полунявных разностных схем для уравнений Навье - Стокса позволило определить на конкретных примерах эффекты вязкости и теплопроводности [4-6]. В работе [7] был дан пример численного расчета отражения ударной волны от холодной стенки на основе использования уравнений кинетической теории газа.

В данной работе предлагается использование неявной дивергентной разностной схемы для сквозного расчета одномерных нестационарных течений вязкого газа. Метод демонстрируется на примерах: а) расчета формирования профиля ударной волны; б) расчета распада контактного разрыва; в) расчета течения перед теплопроводным поршнем, толкаемым в газ; г) расчета отражения вязкой ударной волны от теплопроводной и теплоизолированной стенки.

1. Постановка задачи. Система уравнений, описывающая нестационарное течение одномерного, вязкого, сжимаемого, теплопроводного газа, в дивергентной форме имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\Omega f) = X$$

$$f = \begin{bmatrix} \rho \\ M \\ E \end{bmatrix}; \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 1)\varepsilon & u - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & (\gamma - 1)\varepsilon & u - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho};$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma/\text{Pr} - \frac{4}{3}) \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$M = \rho u, \quad E = \rho(\varepsilon + u^2/2), \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

Здесь x - эйлера координата; t - время; u - скорость; ρ - плотность; ε - внутренняя энергия; $\gamma = C_p/C_v$ - отношение теплоемкостей; Pr - число Прандтля. Предполагается, что коэффициенты динамической вязкости μ и теплопроводности λ являются степенными функциями внутренней энергии.

Система (1.1) записана в безразмерных переменных:

$$t = t' \rho_0 u_0^2 / \mu_0, \quad x = x' \rho_0 / \mu_0, \quad u = u' / u_0, \quad \varepsilon = \varepsilon' / u_0^2$$

$$\rho = \rho' / \rho_0, \quad \mu = \mu' / \mu_0, \quad \text{Pr} = C_p \mu_0 / \lambda_0, \quad \gamma = 1.4$$

(штрихи относятся к размерным величинам, индекс «0» — к невозмущенным параметрам; в случае задачи о распаде контактного разрыва $u_0 = \sqrt{p_0/\rho_0}$, в остальных случаях u_0 — скорость газа за фронтом ударной волны; M_0 — число Маха ударной волны).

Сформулируем следующие начальные условия. В задаче а) по левую сторону от разрыва задаются параметры по формулам ударного перехода, справа от разрыва задаются известные невозмущенные параметры; ударная волна при этом распространяется слева направо с известной скоростью. В задаче б) по обе стороны от контактного разрыва задаются известные значения ρ , ε ; при этом $u=0$. В задаче в) задаются известные невозмущенные параметры в системе координат, связанной с поршнем. В задаче г) перед стенкой задается известный невозмущенный профиль вязкой ударной волны.

Граничные условия зададим следующим образом: на левой границе расчетной области — невозмущенные начальные параметры; на правой границе, в случае задач а) и б), невозмущенные параметры, в случае задач в) и г) — условие непротекания и постоянства температуры стенки или тепловой изоляции:

$$(1.2) \quad u=0, \quad \varepsilon=\varepsilon_w=\text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0$$

Разностная аппроксимация уравнений (1.1) и граничных условий (1.2) осуществляется на четырехточечном шаблоне в соответствии с идеями работ [8-10]. Полученная таким образом разностная схема является абсолютно устойчивой на линейном аналоге и обладает порядком аппроксимации $o(\tau+h^2)$, где τ — шаг по временной, а h — по пространственной координатам. Схема реализуется скалярными прогонками.

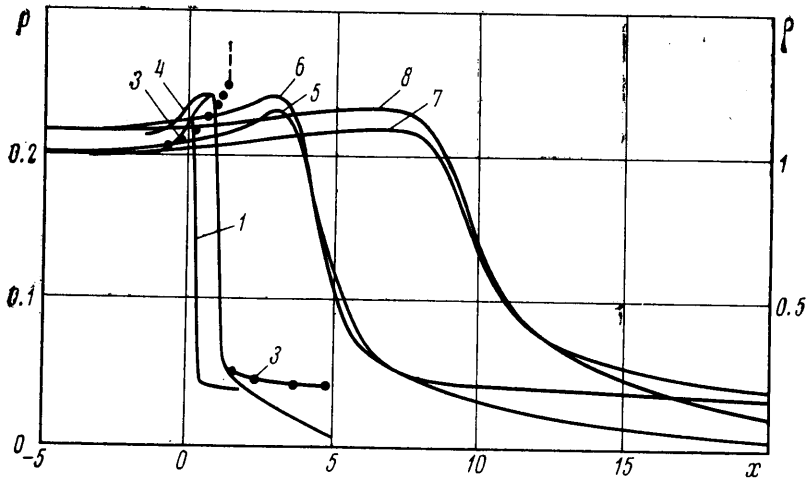
2. Результаты численных расчетов. С целью проверки метода и для получения начального распределения параметров в задаче г) был рассмотрен распад разрыва с параметрами, связанными соотношениями на прямой ударной волне.

При малых временах в процессе перехода к стационарному решению замечено 10–20%-ное превышение уровня параметров за идеальной ударной волной, которое при $t=20-100$, в зависимости от интенсивности разрыва, исчезает, и решение выходит на аналитический профиль вязкой ударной волны [11]. Замеченная аномалия связана с уменьшением скорости движения линии отмеченных частиц при $t>0$, что приводит к накоплению газа за ней и соответственно увеличению ρ и p . В дальнейшем этот процесс, по мере формирования профиля вязкой ударной волны затухает.

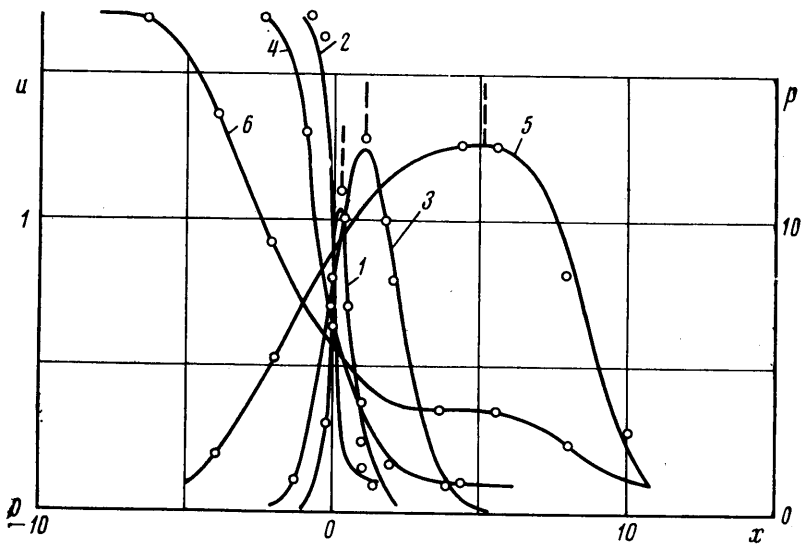
Приведенный пример представляет собой немонотонное решение уравнений Навье — Стокса, полученное из монотонных начальных условий при совместном действии дифференциальных операторов L_1 и L_2 (L_1 — газодинамический оператор, L_2 — оператор вязких членов), каждый из которых, действуя порознь, приводит к монотонному решению. Важность этого примера в том, что он заставляет с осторожностью относиться к таким монотонным операторам, как сглаживание и искусственная вязкость, интенсивно используемым при численном решении уравнений идеальной газовой динамики.

По просьбе авторов аналогичный результат был получен А. И. Игошиным при расчете распада разрыва, аналогичного вышеприведенному, с выделением линии отмеченных частиц.

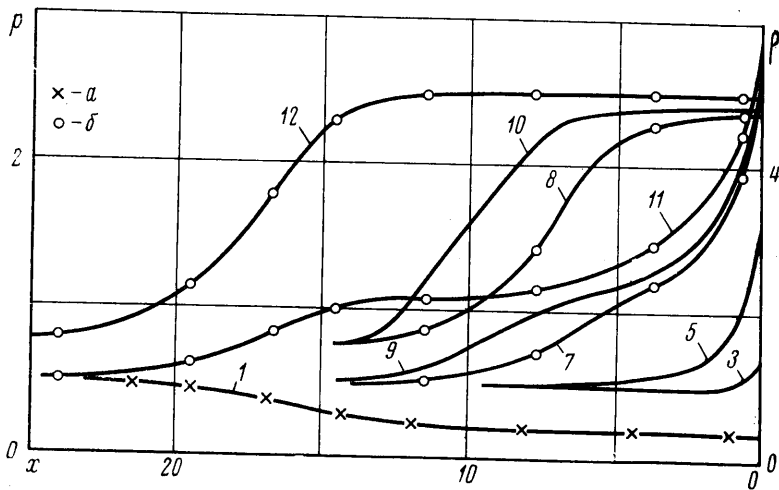
С целью иллюстрации сказанного на фиг. 1 для $Pg=0.75$, $\mu=1$, $M_0=10$, $\gamma=1.4$ приведены профили давления p (четные индексы) и плотности ρ (нечетные индексы) в различные моменты времени. Время отсчитывается



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

от начала распада, расположенного при $x=0$, и соответствует: $1-t=0.348$, $3,4-t=1.39$, $5,6-t=5$, $7,8-t=10$. Точками нанесены результаты расчета с выделением линии отмеченных частиц, положение которой отмечено пунктиром.

Задача о распаде контактного разрыва представляет интерес для теории ударной трубы. При ее асимптотическом рассмотрении в вязком газе показано, что при малых временах имеет место разрыв p , ρ , $\partial u/\partial x$ [1]. В работе [5] при получении численного решения отмеченная особенность выделялась. Представляет интерес получить численное решение без выделения особенности.

На фиг. 2 для $Pr=1$; $\mu=\varepsilon$; $p_1/p_0=\rho_1/\rho_0=17$ приведены профили давления и скорости. Выбор начала отсчета и нумерация кривых аналогична фиг. 1 с заменой плотности на скорость: $1,2-t=0.25$; $3,4-t=1$; $5,6-t=4$. Пунктиром изображено положение линии отмеченных частиц, точками нанесены результаты работы [5]. Видно, что при решении методом сквозного счета максимальная ошибка возникает в окрестности линии отмеченных частиц, носит локальный характер и исчезает при $t\sim 1$.

В качестве третьего примера решена задача об отражении вязкой ударной волны от теплопроводной и теплоизолированной стенки. С целью выяснения влияния первоначальной структуры ударной волны на процесс отражения рассмотрена на аналогичных режимах задача о движении в газ поршня.

На фиг. 5—5 приведены результаты численного решения упомянутых задач. Заметим, что для сопоставления результатов по задачам в) и г) необходимо условиться о временной привязке решений. За $t=0$ в задаче об отражении ударной волны принят момент прихода на стенку точки максимального градиента плотности в предположении невозмущенности профиля, а в задаче о поршне — начало его движения.

Из физических соображений ясно, что следует ожидать качественного различия результатов при сильных и слабых интенсивностях падающих ударных волн, а также в зависимости от теплового режима стенки. При сильных скоростях движения ударной волны (поршня) следует ожидать формирование около теплопроводной стенки интенсивных тепловых фронтов, которые являются аккумуляторами массы. В связи с этим развитие газодинамических фронтов должно запаздывать, и значительный интерес представляет фаза разделения теплового и газодинамического фронтов. По мере уменьшения интенсивности падающей ударной волны (скорости движения поршня) эти эффекты должны ослабевать. Так, например, для случая $M_0=2$; $Pr=0.75$; $\mu=\varepsilon$ (фиг. 3) разделение фронтов происходит уже при $t\sim 30$, в то время как для случая $M_0=5$; $Pr=0.75$; $\mu=\varepsilon$ (фиг. 5) это время равно $t\sim 80$. При этом максимальные значения плотности превосходят плотность идеального отражения соответственно в ~ 2.5 и ~ 10 раз. Давление за фронтом отраженной ударной волны при разделении выходит на давление при идеальном отражении, даваемого формулой [12]:

$$(2.1) \quad \frac{p_w}{p_1} = \frac{(3\gamma-1)p_1/p_2 - \gamma + 1}{(\gamma-1)p_1/p_2 + \gamma + 1}$$

Здесь p_1/p_2 — перепад давления на падающей на стенку ударной волне.

Отмеченная аккумуляция массы приводит к замедлению скорости движения отраженной ударной волны, которое асимптотически исчезает при $t \rightarrow \infty$.

На фиг. 3 для случая теплопроводной стенки ($\varepsilon_w = \varepsilon_2$) приведены профили давления p (четные индексы) и плотности ρ (нечетные индексы). Координата $x=0$ соответствует стенке (поршню). Номера кривых соот-

ветствуют следующим моментам времени: $1-t=-10$, $3-t=0$, $5-t=2.5$, $7, 8-t=12.5$, $9, 10-t=16.25$, $11, 12-t=27.5$. На кривой 1 (обозначения а) нанесено сравнение с аналитическим профилем вязкой ударной волны [11]. На кривых 7, 8, 11, 12 (обозначения б) нанесено решение задачи в) для теплопроводной стенки. Видно, что результаты по поршню практически совпадают при временах $t > 10$ с результатами задачи об отражении ударной волны. Отмеченное в расчетах опережение формирования профиля отраженной ударной волны в случае задачи г) не превышало 1% при $t > 10$.

Для сильных ударных волн уместно отдельно рассмотреть малые (фиг. 4) и большие (фиг. 5) времена. Как и выше, нечетные индексы нумеруют кривые плотности, четные — кривые давления. Пунктиром нанесено взаимодействие ударной волны с теплоизолированной стенкой, сплошными линиями — с теплопроводной ($\epsilon_w = \epsilon_2$). На фиг. 4 номера кривых соответствуют следующим моментам времени: $1, 2-t=-22.5$, $3-6-t=-7.5$, $7, 8-t=-2.5$, $9-12-t=0$, $13-16-t=3.75$. Точками на кривых 1, 2 нанесен аналитический профиль вязкой ударной волны [11], когда она находится на достаточном удалении от стенки.

Кривые фиг. 4 наглядно показывают качественное отличие взаимодействия ударной волны со стенкой в зависимости от ее теплового режима. В случае теплопроводной стенки наблюдается интенсивное формирование тепловой волны, вызывающей дополнительный приток массы газа к стенке и замедляющей тем самым процессы формирования газодинамической ударной волны. В отличие от этого в случае теплоизолированной стенки тепловой фронт не образуется, и на кривой 15 уже можно заметить все основные черты будущей газодинамической ударной волны.

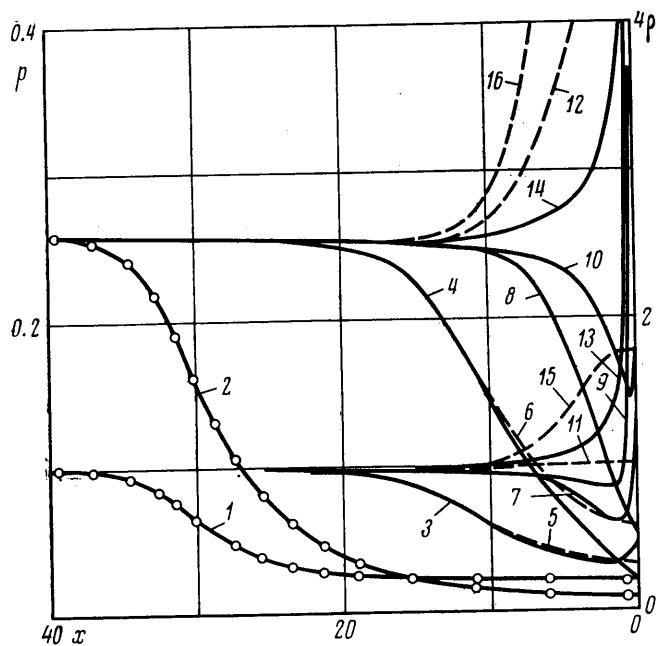
Кривые фиг. 5 соответствуют следующим моментам времени: $1-4-t=-17.5$, $5-8-t=35$, $9-12-t=75$, $13, 14-t=103.75$.

Здесь точками нанесено решение задачи в). Анализ кривых показывает, что при временах $t > 17$ результаты задач в) и г) для теплопроводной стенки совпадают. Опережение процессов формирования отраженной ударной волны в случае задачи г) не превышает 1%. Тепловой фронт продолжает оказывать существенное влияние на течение во всей области до времен $t \sim 80$. К этому моменту времени газодинамический фронт обгоняет тепловой, и наступает разделение фронтов, при этом давление на стенке достигает значения, определяемого из (2.1). В случае теплоизолированной стенки процесс формирования ударной волны заканчивается ко временам $t \sim 15$, и параметры на стенке выходят на значения, соответствующие идеальной теории отражения.

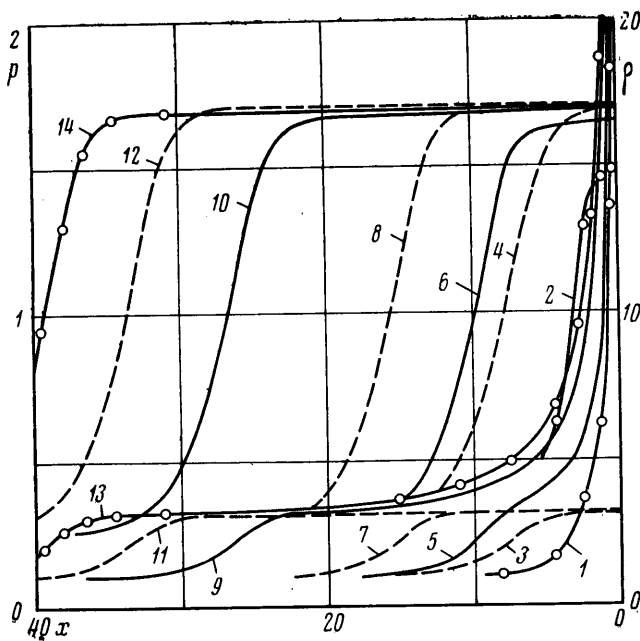
Таким образом, процесс отражения ударной волны в этом случае происходит быстрее, чем для теплопроводной стенки, причем скорости фронтов отраженных ударных волн в дальнейшем уравниваются. Это объясняется аккумуляцией массы на стенке и внутри тепловой волны, влияние которой на формирование газодинамического фронта уменьшается, что связано с существенно меньшей скоростью распространения теплового фронта (в пределе при $t \rightarrow \infty$).

Из совпадения с хорошей степенью точности результатов по задачам в) и г) следует, что на процессы отражения ударной волны в вязком теплопроводном газе структура ударной волны определяющего влияния не оказывает. Поэтому область применимости уравнений Навье — Стокса для количественного и качественного анализа процессов типа отражения ударной волны может быть расширена на достаточно сильные интенсивности ударных волн.

Приведенные выше результаты позволяют сделать вывод о возможности применения описанного подхода к решению нестационарных вяз-



Фиг. 4



Фиг. 5

ких задач с особенностями. Обобщение метода на двумерные нестационарные вязкие задачи такого типа может быть проведено на основе предложенной в [10] неявной дивергентной разностной схемы переменных направлений.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении в газ тонкой полубесконечной пластины со сверхзвуковой скоростью. В приближении пограничного слоя эта задача впервые рассмотрена в [12]. Ее численное решение проводилось рядом авторов [11], однако эти решения относятся либо к приближению пограничного слоя, либо к заключительной стационарной фазе (в случае уравнений Навье – Стокса). При рассмотрении этой задачи в рамках теории пограничного слоя встречаются значительные математические трудности [11], которые были преодолены лишь недавно в [14].

Данная задача представляет собой пример с особенностью в начальных данных и с особенностью в районе передней кромки пластины. В связи с этим численное решение поставленной задачи при достаточно больших числах Рейнольдса в рамках полной системы уравнений Навье – Стокса и его сравнение с решением для пограничного слоя является хорошим тестом для отработки и выяснения возможностей методов сквозного счета.

Расчеты проводились при числе Маха $M_0=2$, $Pr=0.72$, $\epsilon_w=\epsilon_0$. Ввиду ограниченности расчетного поля на верхней и правой границах расчетной сетки требовалось обращение в нуль производных от расчетных функций. Шаги по продольной и поперечной координатам выбирались из условий достаточной аппроксимации образующегося нестационарного пограничного слоя. Шаг по поперечной координате задавался по формуле $\Delta y_n = \Delta y (1 + \delta)^n$, где $n=0, 1, \dots$, номер точки в поперечном направлении; $\delta \ll 1$ – задаваемая величина (при $Re_L=10^3$; $\delta=0.05$; $\Delta y=0.008$); число точек по координате x бралось равным 22, из них 5 точек приходилось перед пластиной. Число Рейнольдса $Re_L = \rho_0 u_0 L / \mu_0$, где L – длина пластины, равная единице. В поперечном направлении бралось 12 точек. Максимальное значение временного шага на нестационарной фазе, при котором решение было устойчивым, удовлетворяло условию $\tau \sim \Delta y$.

На фиг. 6 приведено сравнение зависимостей продольной скорости u при $x=0.6$ от общепринятой в автомоделных задачах пограничного слоя координаты

$\eta = \int_0^y \rho \, dq \sqrt{Re_L} / \sqrt{x}$, полученных в данной работе и по результатам [14]. Точками 3

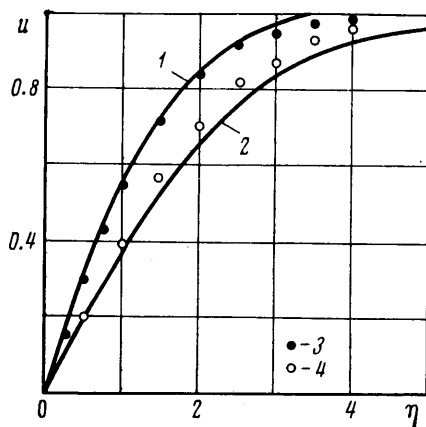
нанесено решение Рэлея [11] при $\theta = x/tu_0 = 1$, а точками 4 – результаты работы [14] при $\theta = 0.4$. Соответствующие результаты решения полной системы уравнений Навье – Стокса при $Re_L = 10^3$ (кривая 1 – $\theta = 1$, кривая 2 – $\theta = 0.4$) хорошо согласуются с асимптотическим решением. Обращает на себя внимание факт отличия продольной скорости на внешней границе пограничного слоя от $u_0 = 1$, что связано с эффектами вязкого взаимодействия, конечным образом проявляющимися при $Re_L = 10^3$. Однако максимальное расхождение между решениями не превышает 7%, что свидетельствует о возможности определения предельных решений ($Re_L \rightarrow \infty$) сингулярных задач данным методом.

Авторы благодарят Ю. А. Демьянова, Л. А. Чудова и А. И. Игошина за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 19 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
2. Демьянов Ю. А. О влиянии теплопроводности на формирование течений газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
3. Демьянов Ю. А., Элькин Л. И. Влияние начальной фазы отражения ударной волны от стенки на установление процессов течения и теплообмена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
4. Полежаев В. И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.



Фиг. 6

5. Игошин А. И. Формирование одномерных течений теплопроводного вязкого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
6. Scala S. M., Gordon P. Reflection of a shock wave at surface. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 6.
7. Кудиш И. И., Рыков В. А. Отражение ударной волны от твердой стенки. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 5.
8. Березин Ю. А., Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Об одной неявной схеме расчета течения вязкого теплопроводного газа. Численные методы механики сплошной среды, 1972, т. 3, № 4.
9. Березин Ю. А., Ковеня В. М. Расчеты магнитогазодинамического обтекания тел. Численные методы механики сплошной среды, 1973, т. 4, № 4.
10. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Об одной консервативной разностной схеме для решения стационарных уравнений динамики. 4 Всес. конференция по динамике разреженного газа, Москва, 1975. Сб. аннотаций, М., 1975.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
13. Stewartson K. On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, p. 2.
14. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Применение метода интегральных соотношений к решению сингулярного уравнения параболического типа, встречающегося в теории пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 2.