

## О ФОРМАХ КОЛЬЦЕВЫХ СТРУЙ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Е. ЕПИХИН

(Москва)

Рассматривается развитие осесимметричных тонких кольцевых струй капельной жидкости, вытекающих из кольцевого отверстия под произвольным углом к оси симметрии в невозмущенную идеальную среду. Дается классификация возможных форм струй, формирующихся под действием сил поверхностного натяжения, перепада давлений снаружи и внутри, когда силой тяжести можно пренебречь. Приводится качественный анализ дифференциального уравнения для формы струи, а также некоторые результаты его прямого численного интегрирования с учетом силы тяжести.

Уравнения движения кольцевых струй были получены в работах [1-3] путем составления балансового соотношения для сил, действующих на выделенный элемент струи, а именно: массовой и центростремительной силы, сил внутренних напряжений, — а также расходного соотношения. Авторы [1, 2] получили кольцевую струю колоколообразной формы экспериментально. Вычисленная в [2] по этим уравнениям форма струи представляет собой кривую с самопересечением. Теоретический расчет кольцевых струй при различных углах вытекания сделал Тейлор [3, 4], пренебрегая силой тяжести и перепадом давлений. Расчеты форм тяжелых кольцевых струй без перепада давлений при всевозможных углах вытекания содержатся в статье [5].

Рассмотрим движение струи в декартовой системе координат  $\{O, X, Y, Z\}$  с направляющими векторами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  соответственно. Вектор  $\mathbf{i}$  направлен вдоль оси струи и образует с векторами  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  правую тройку. Начало координат лежит в плоскости выходного отверстия струи (фиг. 1). Движение ньютоновской жидкости в струе и в окружающей среде описывается уравнениями Навье — Стокса, уравнением граничных поверхностей и условиями на них [6]

$$(1) \quad D\mathbf{u} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \text{const}$$

$$D \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla, \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$(2) \quad DH_l(\mathbf{r}, t) = 0$$

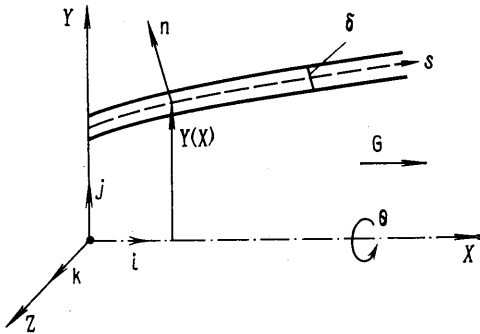
$$(3) \quad [\bar{\sigma}]_{n_l} \mathbf{n}_l = - \frac{2\gamma_l}{R_{sl}} \mathbf{n}_l \quad (l=1, 2)$$

$$(4) \quad [\mathbf{u}]_{n_l} = 0 \quad (l=1, 2)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — вектор скорости жидкости в точке  $\mathbf{r}(X, Y, Z)$ ;  $p(\mathbf{r}, t)$  — давление;  $\nu, \rho$  — кинематическая вязкость и плотность жидкости;  $\mathbf{G}$  — вектор ускорения силы тяжести;  $t$  — время;  $\bar{\sigma}_{n_l}$  — тензор напряжений на поверхности с номером  $l$ ; квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины; вектор  $\mathbf{n}_l$  — нормаль к граничной поверхности с но-

мером  $l$ ;  $R_{sl}$  — средний радиус кривизны этой поверхности в рассматриваемой точке;  $\gamma_l$  — коэффициенты поверхностного натяжения на границах струи.

Соотношения (1)–(4) должны быть дополнены условиями, учитывающими движение окружающей среды на бесконечном удалении от внешней граничной поверхности струи и условие осевой симметрии течения внутри струи. Будем считать известными краевые условия при  $X=0$  для течений жидкости и окружающей газообразной среды, а также условия при  $X \rightarrow \infty$  в случае разомкнутой полости, или условие замкнутости потока газа внутри ограниченной полости струи и, соответственно, условие регулярности решения в точке смыкания струи. Начальное условие при  $t=0$



Фиг. 1

завершает постановку начально-краевой задачи о движении кольцевой струи капельной жидкости.

Используя в качестве масштабов начальный радиус вращения срединной поверхности  $R_0$ , максимальную скорость вытекания  $U_0$  и плотность жидкости  $\rho_F$ , введем безразмерные переменные и запишем уравнения движения во внутренней ортогональной системе координат  $\{s, n, \theta\}$ , связанной со срединной поверхностью струи. В результате появятся безразмерные характерные параметры задачи:

число Вебера  $We$ , число Эйлера  $Eu$ , число Рейнольдса  $Re$ . Они имеют следующее выражение:

$$We = \frac{\rho_F U_0^2 R_0}{2\gamma_s}, \quad Eu = \frac{(p_2^e - p_1^e) R_0}{2\gamma_s}, \quad Fr = \frac{\rho_F G R_0^2}{2\gamma_s}, \quad Re = \frac{U_0 R_0}{\nu}$$

Здесь величина  $G$  обозначает ускорение силы тяжести,  $p_l^e$  ( $l=1, 2$ ) — гидростатические давления соответственно на внешней и внутренней граничных поверхностях струи,  $\gamma_s$  — среднее арифметическое коэффициентов поверхностного натяжения на межфазных поверхностях. Сделаем замену переменной  $N = n/\epsilon$  и представим решение в жидкости и в газе в виде разложений по степеням параметра  $\epsilon = Re^{-1/2}$ , считая нормальную скорость жидкости и толщину струи малыми первого порядка малости. С точностью до малых первого порядка в нулевом приближении получим следующую систему уравнений, описывающую течение жидкости в струе

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + V \frac{\partial u}{\partial N} &= \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + Fr \cos \alpha, & -\frac{u^2}{r_0} &= -\frac{\partial p}{\partial N} - Fr \sin \alpha \\ \frac{\partial}{\partial s}(Yu) + \frac{\partial}{\partial N}(YV) &= 0 \end{aligned}$$

Здесь величина  $r_0$  обозначает радиус кривизны сечения поверхности струи  $Y=Y(s)$  меридианной плоскостью. Аналогичный вид имеют уравнения движения окружающей среды в пограничном слое на внешней и внутренней поверхностях струи. Уравнения срединной и граничных поверхностей струи имеют соответственно вид

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + u \frac{\partial Y}{\partial s} = \sin \alpha u, \quad N=0$$

$$(6) \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} + u \frac{\partial \delta}{\partial s} = \pm 2V, \quad N = \pm \frac{1}{2} \delta(s, t)$$

Предположим, что газ представляет собой невязкую невозмущенную среду. Из (3) в рассматриваемом приближении следует:

$$(7) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial N} &= 0 \\ p &= p_i^e \pm \frac{2 \text{We}}{R_*} \end{aligned} \right\} \text{при } N = \pm \frac{1}{2} \delta(s, t)$$

Пусть профиль продольной скорости струи в начальном сечении  $s=0$  равномерный и мало отличается от равномерного при  $s>0$ . Поэтому в первом приближении  $u=u(s, t)$ . Для стационарных движений тонких кольцевых струй в невозмущенной идеальной среде краевую задачу (5)–(7) можно свести к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(8) \quad \begin{aligned} (Y - \text{We} u) Y'' &= 1 - Y'^2 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{\text{Fr}}{u} - \text{Eu} \cos \alpha Y \\ Y' &= \sin \alpha, \quad uu' = \text{Fr} \cos \alpha \\ Y(0) &= 1, \quad Y'(0) = \sin \alpha_0, \quad u(0) = 1 \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной  $s$ , а  $\alpha_0$  равняется начальному углу срединной поверхности с осью симметрии струи. Переходя к пространственной переменной  $X$ , получим следующую задачу:

$$(9) \quad \begin{aligned} (Y - \text{We} u) Y'' + \text{Eu} Y (1 + Y'^2)^{3/2} - (1 + Y'^2) &= \frac{\text{Fr} Y' (1 + Y'^2)}{u} \\ u &= \left( 1 + 2 \frac{\text{Fr}}{\text{We}} X \right)^{1/2} \\ Y(0) &= 1, \quad Y'(0) = \text{tg} \alpha_0 \end{aligned}$$

Штрих обозначает дифференцирование по  $X$ . Ниже исследуется форма поверхности кольцевой струи с учетом сил поверхностного натяжения, перепада давлений, а также массовой и центростремительной сил. Предположим сначала, что  $\text{Eu} \neq 0$ ,  $\text{Fr} = 0$ . Тогда уравнение (9) имеет первый интеграл, который можно представить в одной из следующих форм:

$$(10) \quad Y'^2 = - \frac{P_4(Y)}{Q_4(Y)}, \quad Y(0) = 1, \quad Y \neq \text{We}$$

$$(11) \quad 1 + Y'^2 = \frac{(Y - \text{We})^2}{(A + \frac{1}{2} \text{Eu} Y^2)^2}, \quad Y(0) = 1$$

$$P_4(Y) = \left[ Y^2 - \frac{2}{\text{Eu}} Y + \frac{2(A + \text{We})}{\text{Eu}} \right] \left[ Y^2 + \frac{2}{\text{Eu}} Y + \frac{2(A - \text{We})}{\text{Eu}} \right]$$

$$Q_4(Y) = \left( Y^2 + \frac{2A}{\text{Eu}} \right)^2 = Q_2^2(Y)$$

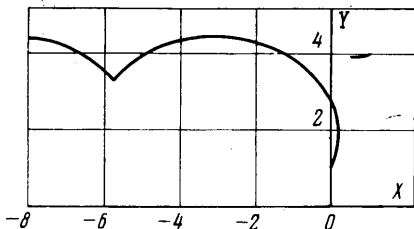
$$A = (1 - \text{We}) \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} \text{Eu}, \quad Y \neq \text{We}$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. Корни многочлена  $P_4(Y)$  либо все действительные, либо все мнимые числа, либо два из них действительные, а два мнимые. Исследование знаков дискриминантов квадратных трехчленов, входящих в  $P_4(Y)$ , а также взаимного расположения неотрицательных корней и единицы, позволяет разбить плоскость параметров  $\{Eu, We\}$  в зависимости от угла вытекания  $\alpha_0$  на ряд областей, в каждой из которых имеет место одно из неравенств

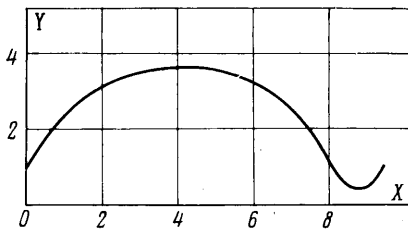
$$(12) \quad Y_1^* > 1 > Y_2^* > 0$$

$$(13) \quad Y_1^* > 1, \quad Y_2^* < 0$$

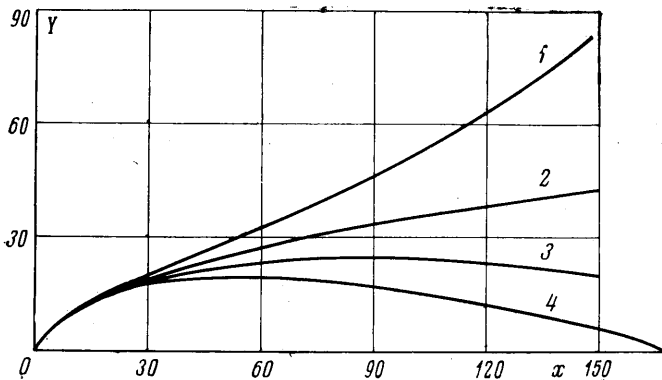
где  $Y_1^*$  обозначает наибольший положительный корень  $P_4(Y)$ , а  $Y_2^*$  — наибольший действительный корень среди оставшихся трех. Из положительности левой части уравнения (10) и  $Q_4(Y) > 0$  следует положительная



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

определенность его правой части, или  $P_4(Y) < 0$ . На интервалах полуоси  $Y > 0$ , не содержащих корней полинома  $P_4(Y)$ , этот последний знакоопределен. Отсюда следует вывод о пределах изменения решения  $Y = Y(X)$  уравнения (10). Если, например, выполнено неравенство (12), то при  $Y_1^* > Y > Y_2^*$  будет  $-P_4(Y) > 0$ , т. е. имеется периодическое решение

$$Y_1^* > Y(X) > Y_2^*, \quad Y(0) = 1$$

Если выполняется неравенство (13), то в зависимости от знака угла вытекания  $\alpha_0$ , решение уравнения (10) будет с ростом  $X$  приближаться к нулю, либо возрастать от единицы до  $Y = Y_1^*$  и уменьшаться до нуля с дальнейшим ростом  $X$ . Отсюда следуют выводы о возможных формах соответствующих струй. Это струи, представляющие собой периодические поверхности вращения, в том числе поверхность кругового цилиндра и

смыкающиеся струи. Возможны также струи смешанной формы, представляющие собой взаимные гладкие продолжения струй указанного вида. Запишем уравнение (10) в виде

$$(14) \quad \frac{Q_2(Y)Y'}{[-P_4(Y)]^{1/2}} = \pm 1$$

Если левая часть этого уравнения положительна, то в правой его части берем знак плюс, в противном случае — знак минус. Производная  $Y'$  может менять знак в точках  $Y_{1,2}^*$ , в которых она обращается в нуль. Величина  $Q_2(Y)$  может менять знак при

$$Y = \rho_* = \left(-\frac{2A}{Eu}\right)^{1/2}, \quad \left(\frac{2A}{Eu} < 0\right)$$

Если  $0 < Y_2^* < \rho_* < Y_1^*$ , или  $1 < \rho_* < Y_1^*$ ,  $Y_2^* < 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ , или  $0 < \rho_* < 1 < Y_1^*$ ,  $Y_2^* < 0$ ,  $\alpha_0 < 0$ , то имеются точки, в которых  $Y'$  обращается в бесконечность, а обратная производная  $X_{Y'}$  — в нуль и, значит, может изменить знак. Обозначим соответствующие  $\rho_*$ ,  $Y_{1,2}^*$  значения абсциссы через  $X_v$  ( $v=1, 2, \dots$ ), а также

$$S_v = \text{sign} [Q_2(Y)Y'] \quad \text{при} \quad X \in (X_v, X_{v+1})$$

Решение уравнения (10) в этих обозначениях имеет вид

$$X = X_v + S_v [J(Y) - J(\rho_*)]$$

$$J(Y) = \int_1^Y \frac{Q_2(\eta) d\eta}{[-P_4(\eta)]^{1/2}}$$

Интеграл  $J(Y)$  выражается в общем случае через эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода. Соответствующие струи представляют собой поверхности вращения с самопересечением, пример которых дан в [2]. При определенных условиях могут осуществляться также «обращенные» струи — смыкающиеся и периодические, — пример которых приведен на фиг. 2, а также обращенные струи смешанной формы.

Поверхность кольцевой струи может также пересекать цилиндрическую поверхность  $Y = We$ . Это струя, имеющая форму шарового сегмента, соответствующая углу вытекания

$$\alpha_0 = \arctg \left\{ \left[ \frac{4}{Eu^2} - (1+We)^2 \right]^{1/2} / (1+We) \right\}$$

а также струя, полученная из предыдущей отражением относительно плоскостей, проходящих через линии пересечения сферической поверхности с поверхностью  $Y = We$ . Соответствующее значение постоянной  $A$  в уравнении (11) равняется  $-1/2 Eu We^2$ .

Перечислим возможные движения кольцевых струй в вырожденном случае  $Eu = 0$ . Это разомкнутые растекающиеся струи; смыкающиеся струи; радиально растекающиеся жидкие слои, исследованные Тейлором [4].

В случае, когда  $Fr \neq 0$ , имеется необходимое условие существования точек возврата  $X_* > 0$  уравнения (9). Оно состоит в выполнении неравенства

$$\frac{1}{2 We^2} [1 + (1 + 4 Eu^2 Fr^2 We^2)^{1/2}] > Eu^2$$

Так, если  $Fr = 0$ , то это условие равносильно следующему:

$$\frac{1}{We^2} > Eu^2 \quad \text{или} \quad \cos \alpha_* = Eu^2 We^2 < 1$$

На фиг. 2, 3 приводятся результаты расчетов в случае  $Fg=0$ ,  $We=0.1$ , а число Эйлера равняется соответственно  $Eu=-0.5$ ,  $Eu=0.5$ . Они подтверждают выводы проведенного качественного исследования о существовании кольцевых струй, представляющих собой периодические поверхности вращения, а также обращенных струй периодической формы. Чтобы выяснить роль перепада давлений, было проведено численное интегрирование задачи (8) при значении числа Фруда  $Fg=100$ , когда  $Eu=0.5$ ,  $Eu=0$ ,  $Eu=-0.5$ ,  $Eu=-1$ , число Вебера  $We=1100$ . Результаты этих расчетов приводятся на фиг. 4. Можно видеть, что полость кольцевой струи смыкается быстрее при больших по абсолютной величине отрицательных значениях перепада давлений. В этих расчетах угол истечения  $\alpha_0=\pi/3$ .

В заключение автор благодарит В. Я. Шкадова за внимание к работе и критические замечания.

Поступила 18 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Hopwood F. L. Water bells. Proc. Phys. Soc. B, 1952, vol. 65, pt 1, No. 385.
3. Lance G. N., Perry R. L. Water bells. Proc. Phys. Soc. B, 1953, 1067.
4. Taylor G. I. The dynamics of thin sheets of fluid. 1. Water bells. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1959, vol. 253, No. 1274.
5. Taylor G. I. The dynamics of thin sheets of fluid. 2. Waves on fluid sheets. Proc. Roy. Soc. A., 1959, vol. 253, No. 1274.
6. Dumbarton J. H. Effect of Gravity on the shape of water bells. J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 10.