

ЗАДАЧА О РАЗЛЕТЕ КОНИЧЕСКОГО ОБЪЕМА РАСКАЛЕННОГО ГАЗА

Н. А. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, Л. В. ШУРШАЛОВ

(Москва)

Численно решена задача о разлете в окружающее пространство объемов раскаленного сжатого газа, занимающих в начальный момент неограниченные конические области.

В работе [1] были исследованы различные случаи разлета сжатого газа, заполняющего при $t=0$ плоские угловые области. В [2] была численно решена задача о развитии искрового пробоя в воздухе, которая свелась к изучению процесса разлета объема раскаленного сжатого газа, имеющего форму конуса конечной длины. С точки зрения той и другой задачи представляет интерес изучение процесса разлета объема горячего сжатого газа, занимающего неограниченную коническую область.

Действительно, переход от плоского случая [1] к осесимметричному [2] не является тривиальным. Осесимметричное течение обладает той особенностью, что для любого $t>0$ оно является двумерным во всем пространстве, в то время как в плоском случае область, в которой течение двумерно и подлежит определению, заключена вблизи угловой точки и плоскости симметрии. Поэтому здесь возникает вопрос, как ограничить расчетную область, какую для этого ввести границу и какие граничные условия на ней задавать.

С другой стороны, в задаче об искровом пробое применявшаяся расчетная сетка не позволяла достаточно подробно рассмотреть течение в окрестности вершины конической искры в моменты времени, близкие к начальному. Учитывая, что для пробоя, вызванного световой вспышкой, характерная длина искры может составлять 3 мм, в то время как минимальный радиус светового канала в фокусе равен ~ 0.1 мм [3] (отношение второго к первому $1/30$), можно принять, что, во-первых, при $t=0$, конус острый, как это и полагалось в [2], и, во-вторых, как следствие, в начальные моменты времени в окрестности вершины конуса имеет место автомодельное течение. Нахождение этого течения цель данной работы.

1. Исходные условия такой задачи следующие. В начальный момент времени $t=0$ все пространство разделено на две части конической поверхностью, внутри которой газ имеет параметры: $p=p_1$, $\rho=\rho_1$, $u=w=0$; $\gamma=\gamma_1$, а вне ее $p=p_\infty$, $\rho=\rho_\infty$, $u=w=0$, $\gamma=\gamma_\infty$, где p и ρ — давление и плотность, γ — показатель адиабаты, а u и w — компоненты скорости соответственно по нормали к оси конуса и вдоль нее. Задача состоит в нахождении газодинамических характеристик возникающего при $t>0$ течения, которое описывается обычными уравнениями газовой динамики для невязкого, нетеплопроводного, совершенного газа. Так как среди определяющих параметров задачи нет ни одного с размерностью длины, то течение автомодельное [4], поэтому все искомые функции зависят от отношений $R=r/At$, $Z=z/At$, где r и z — соответственно радиальная и осевая координаты, а $A=(p_\infty/\rho_\infty)^{1/2}$ — постоянная с размерностью скорости.

В задаче естественно возникают следующие границы: по невозмущенному газу с параметрами p_∞ , ρ_∞ , γ_∞ пойдет ударная волна, а по горячему газу с параметрами p_1 , ρ_1 , γ_1 — волна разрежения; один газ от другого будет отделен подвижной контактной поверхностью. Кроме того, внутри возмущенной области могут возникать вторичные волны. На всех этих

границах должны быть удовлетворены граничные условия, выражающие законы сохранения и условия непрерывности. На оси симметрии $r=0$ требуется удовлетворить условиям симметрии течения.

Для численного решения задачи необходимо ограничить расчетную область. Это можно сделать, например, следующим образом. Введем на конечном расстоянии от оси симметрии цилиндрическую твердую стенку и будем рассчитывать течение внутри получившейся таким образом цилиндрической трубы. При этом на стенке задается условие непротекания. Естественно, что такое введение на конечном расстоянии от оси симметрии цилиндрической стенки будет нарушать условие автомодельности течения. Эти нарушения, возникая вблизи стенки, будут распространяться с конечной скоростью в сторону оси симметрии. Рассматривая достаточно малые моменты времени t и рассчитывая достаточно подробно течение вблизи оси симметрии, получим решение соответствующей автомодельной задачи для наиболее интересной области — окрестности вершины конуса.

Оценку времени, до которого целесообразно проводить расчет, можно получить так. Пусть радиус цилиндрической трубы равен r_0 , а радиальная скорость возникающих у стенки возмущений — U . Будем считать допустимым, чтобы возмущения от стенки подходили к оси симметрии не ближе чем на расстояние $r_0/2$. Тогда следует ограничиться рассмотрением времен $t \leq t_* = r_0 / (2U)$. Скорость U , вообще говоря, заранее не известна, так как это скорость движения ударной волны, отразившейся от стенки. Однако для получения приближенной оценки можно вместо нее взять максимальную скорость звука, возникающую в течении. Для случая разлета раскаленного газа она равна $a_* = (\gamma_1 p_1 / \rho_1)^{1/2}$. Уточнить величину допустимого t_* можно в результате пробных расчетов.

2. Поставленная таким образом задача решалась конечно-разностным методом [5, 6]. Основная ударная волна, контактная поверхность и передний фронт волны разрежения, распространявшейся по сжатому газу, выделялись в качестве граничных линий подвижной сетки. Область между ними, а также между твердой стенкой и осью симметрии разбивалась на полосы в общем случае переменной ширины. Расчетная сетка бралась сгущенной вблизи оси симметрии для лучшего представления решения в наиболее интересной области. Сгущение сетки проводилось также вблизи контактной поверхности со стороны области горячего газа, поскольку из-за больших скоростей распространения возмущений соответствующая область становится очень протяженной.

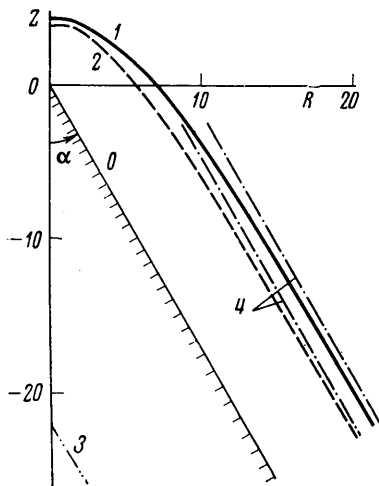
Рассматриваемая задача оказалась довольно трудной для численного решения. Это связано с тем, что для искрового пробоя в воздухе характерны весьма большие температуры ($\sim 10^4 \div 10^5$ К) и давления ($\sim 10^2 \div 10^4$ атм) при низкой начальной плотности газа в зоне пробоя порядка плотности невозмущенного воздуха. Кроме того, угол раствора конуса 2α обычно довольно мал ($\alpha \sim 5 \div 30^\circ$). При таких параметрах возмущенная область даже при введении стенки оказывается очень протяженной, а существенные детали течения имеют место на очень малых расстояниях. Все это предопределяет использование неравномерной расчетной сетки. При получении приводимых ниже результатов применялась сетка из 42×20 расчетных ячеек, причем первая цифра относится к разбиению по радиальной координате. Минимальный размер ячеек по радиусу вблизи оси симметрии составлял примерно $r_0/400$. Часто целесообразно было один и тот же вариант просчитывать дважды с разными сетками, обеспечивающими более подробное представление решения в разных областях. Расчеты с сетками с большим и меньшим числом разбиений по r и по z показали, что сетка из 42×20 ячеек дает достаточно хорошие результаты.

Существенной вычислительной трудностью задачи является также расчет движения ударной волны и контактной поверхности вблизи оси симметрии. В начальный момент времени эти поверхности подходят к оси симметрии под довольно малым углом α , причем так, что возникающее при $t > 0$ течение является расходящимся от оси. Физически ясно, что вследствие этого как ударная волна, так и контактная поверхность должны очень быстро изменить свою форму так, чтобы подходить к оси симметрии под прямым углом. Однако при небольших α для адекватного представления этого физического механизма в вычислительном процессе необходимо брать очень мелкую расчетную сетку, крайне невыгодную с точки зрения затрат машинного времени. Так обстоит дело, если непосредственно применять методику [6]

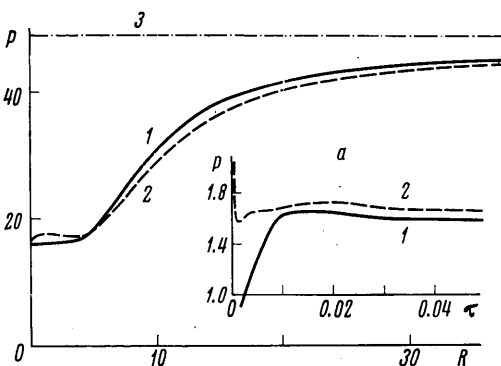
расчета движения характерной поверхности вдоль некоторого неподвижного луча. По этой методике движение поверхности вдоль луча $r = \text{const}$ определяется формулой

$$(2.1) \quad z_s^{n+1} = z_s^n + \Delta t (V_1 \Delta l_2 / \sin \beta_1 + V_2 \Delta l_1 / \sin \beta_2) / (\Delta l_1 + \Delta l_2)$$

где z_s^{n+1} и z_s^n — соответственно новое и старое значения координаты z рассматриваемой поверхности, Δt — шаг по времени, Δl_1 и Δl_2 — длины прилегающих к лучу звеньев поверхности, V_1 и V_2 — скорости движения этих звеньев по нормали к ним, β_1 и β_2 — углы, которые образуют нормали к звеньям с положительным направлением оси r (отсчитываются от оси r против часовой стрелки). Таким образом, движение



Фиг. 1



Фиг. 2

точки поверхности вдоль луча определяется как некоторое среднее из движений, прилегающих к этому лучу отрезков.

В случае оси симметрии ($r=0$) естественно положить $\Delta l_2 = \Delta l_1$, $V_2 = V_1$, $\beta_2 = \pi - \beta_1$. Тогда (2.1) примет вид

$$(2.2) \quad z_s^{n+1} = z_s^n + \Delta t V_1 / \sin \beta_1$$

Как видно из (2.1) и (2.2), единственным механизмом, изменяющим угол наклона поверхности к оси симметрии, является скорость V прилегающих к оси звеньев. Этот механизм весьма слаб; например, в случае ударной волны малой интенсивности скорости звеньев близки к соответствующим скоростям звука и мало меняются в процессе счета. В результате изменение угла подхода ударной волны к оси симметрии (при условии, что в начальный момент времени этот угол был мал) будет проходить неоправданно медленно даже при применении мелкой расчетной сетки.

Ниже предлагается правило расчета движения ударной волны и контактной поверхности вблизи оси симметрии, показавшее свою эффективность при расчетах и основанное как на физических соображениях, так и на некоторых, известных априори математических свойствах решения. Предлагается в формуле (2.1) полагать $\Delta l_2 = \Delta l_1$, $V_2 = V_1$, $\beta_2 = \pi/2$, т. е. брать формулу для расчета в виде

$$z_s^{n+1} = z_s^n + \Delta t V_1 (1/\sin \beta_1 + 1)/2$$

Фактически это означает взятие среднего между значением, определяемым по формуле (2.2), и значением, полученным из предположения, что поверхность подходит к оси симметрии под прямым углом. В результате скорость движения точки поверхности вдоль оси заметно уменьшается, давая более правильное отражение физической картины явления. В то же время это находится в соответствии с известным предельным свойством конечно-разностного решения, заключающимся в том, что при увеличении числа разбиений угол подхода ударной волны и контактной поверхности β_1 должен обязательно стремиться к $\pi/2$. Разумеется, такой подход оправдан лишь в условиях, описанных выше, когда течение является расходящимся от оси. Для сходящихся к оси течений это, вообще говоря, неверно: угол между ударной волной или контактной поверхностью и осью симметрии может, очевидно,

оставаться острым. К сказанному выше остается добавить, что изложенное здесь правило приложимо не только к расчету течения вблизи оси симметрии, но и вблизи плоскости симметрии для плоских течений и может быть обобщено для любого луча, к которому указанные границы подходят под малыми углами.

3. Остановимся теперь на результатах численного решения рассматриваемой задачи. Было просчитано пять различных вариантов. В первых четырех из них рассматривался разлет конического объема раскаленного газа, для которого $\rho_1 = \rho_\infty$, $\gamma_1 = 1.24$ (эффективный показатель адиабаты для горячего газа [3]) при различных начальных давлениях и углах раствора конуса: 1) ÷ 3) $p_1/p_\infty = 10^2$, $\alpha = 30, 20, 10^\circ$; 4) $p_1/p_\infty = 10^3$, $\alpha = 30^\circ$. Показатель адиабаты окружающего газа γ_∞ был выбран равным 1.4. В последнем пятом варианте был рассмотрен разлет холодного газа, у которого $\gamma_1 = 1.4$, $\rho_1/\rho_\infty = p_1/p_\infty = 10^2$, $\alpha = 30^\circ$. Поскольку качественно результаты расчета первых четырех вариантов оказались близки, то далее подробно обсуждаются лишь первый и последний варианты.

На фиг. 1 в переменных R, Z показана конфигурация характерных границ, возникающих в течении. На ней обозначены: линией 1 — ударная волна, 2 — контактная поверхность, 3 — передний фронт волны разрежения, распространяющейся по горячему газу. Линией 0 отмечено начальное положение поверхности разрыва параметров. Прямые 4 показывают, каким было бы положение ударного фронта и контактной поверхности в случае плоского одномерного распада; строго говоря, они отмечают предельное положение этих границ при бесконечно большом удалении от оси симметрии. Однако, как видно из графика, уже на конечных расстояниях, приведенных на фиг. 1, положение этих границ начинает мало отличаться от предельного и, следовательно, предлагаемый подход обеспечивает получение решения практически во всей области.

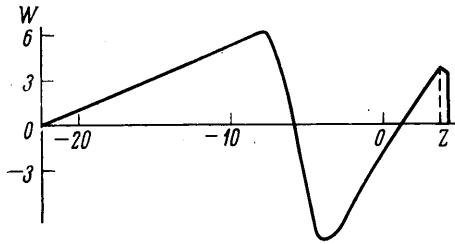
На фиг. 2 показан характер изменения давления $P = p/p_\infty$ вдоль характерных поверхностей: линией 1 — для ударной волны, 2 — для контактной поверхности, прямой 3 — их предельные значения при удалении в бесконечность. Как видно, давление на этих границах вблизи оси симметрии оказывается много меньше того значения, которое реализуется при плоском одномерном распаде (для $p_1/p_\infty = 10^2$ при α , равном 30, 20 и 10° , соответственно в 2,9, 4 и 6 раз, примерно такие же соотношения имеют место и для $p_1/p_\infty = 10^3$). Давление на контактной поверхности вблизи оси симметрии больше давления на ударном фронте, а вдали от нее меньше. При $r \rightarrow \infty$ они сближаются, стремясь к общему предельному значению. Во всех четырех вариантах наблюдается падение давления на контактной поверхности в малой окрестности оси симметрии — эффект, происходящий на расстояниях очень малых по сравнению с протяженностью всей расчетной области. Вблизи оси симметрии распределение давления на ударной волне близко к постоянному, слегка уменьшаясь при приближении к оси. Поведение ударной волны в этой зоне примерно такое же, как при нерегулярном отражении ударной волны от твердой стенки в случае больших углов падения, близких к 90° .

При проведении расчетов автомодельных течений методом «установления» [1], когда задача решается в физических переменных, а результаты перестраиваются в автомодельные координаты, всегда возникает вопрос о сходимости решения разностных уравнений к искомому автомодельному режиму и о скорости осуществления этого процесса.

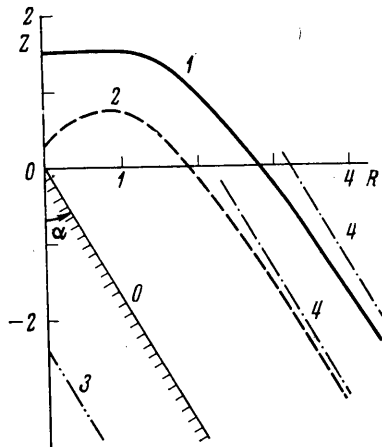
На фиг. 2 приведен график a , дающий ответ на эти вопросы в рассматриваемом здесь случае. На нем показано изменение со временем $\tau = t/t_0$ ($t_0 = r_0/A$) давления на ударной волне (линия 1) и контактной поверхности (2) в точках, лежащих на оси симметрии $r=0$. Расчеты показали, что наиболее медленная сходимость наблюдается для параметров течения

именно вблизи оси симметрии. Видно, что на начальном участке имеет место весьма быстрое приближение к предельному значению, сменяющееся затем относительно медленным «выравниванием» получающихся значений. Приведенные на этом графике величины являются наиболее медленно сходящимися, однако и они сходятся к предельным значениям очень быстро.

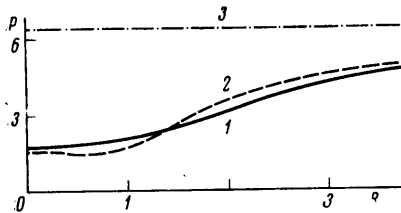
На фиг. 3 показано распределение по оси z осевой компоненты скорости $W=w/A$. Пунктиром отмечено положение контактной поверхности. Видно, что зона между контактной поверхностью и ударной волной очень узкая и распределение скорости в ней напоминает то, которое имеет место при расширении сферического или цилиндрического поршня. Здесь роль поршня выполняет быстро расширяющийся горячий газ. Для распределения скорости в области за контактной поверхностью характерно следующее. Вначале происходит разгон скорости в волне разрежения. Здесь распределение ее по координате линейное. В этой волне газ расширяется столь сильно, что на ее «хвосте» образуется вторичная ударная волна, которая препятствует даль-



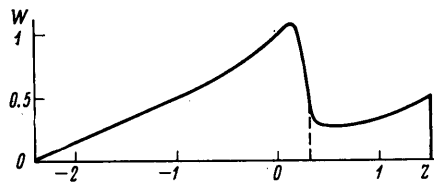
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

нейшему расширению газа. Скорость резко замедляется, движение газа даже обращается внутрь горячей зоны. Непосредственно за контактной поверхностью профиль скорости спадающий. Таким образом, имеют место как бы три слоя движущегося раскаленного газа. Один, оторвавшийся от основной массы, движется за контактной поверхностью, расширяясь в окружающее пространство и двигая перед собой узкую полосу холодного газа в ударном слое. Другой движется в противоположную сторону, сталкиваясь с третьим, разгоняющимся в волне разрежения.

При разлете в окружающее пространство конических объемов холодного сжатого газа наблюдаются несколько иные закономерности.

На фиг. 4 показана конфигурация характерных границ для последнего, пятого варианта. Здесь приняты прежние обозначения. Прежде всего при таких исходных параметрах, как в этом варианте, все скоро-

сти распространения возмущений гораздо меньше, чем в предыдущих случаях, соответственно меньше и размеры области. Контактная поверхность отстает от фронта ударной волны, которая движется как бы сама по себе. Вблизи оси у контактной поверхности наблюдается прогиб, аналогичный изученному в [1] и связанный с характером образующейся в течении вторичной ударной волны. Указанными факторами объясняется то, что изображенные на фиг. 5 распределения давления вдоль контактной поверхности и ударного фронта имеют обратный характер по сравнению с аналогичными распределениями в случае горячего газа (фиг. 2). Здесь давление на ударной волне вблизи оси симметрии больше, а вдали от нее — меньше давления на контактной поверхности. Давление на контактной поверхности не имеет характерного спада вблизи оси симметрии, как это было раньше; оно здесь практически постоянно. Распределение давления по ударной волне более плавное; на нем не сказывается влияние контактного разрыва.

На фиг. 6 дано распределение осевой компоненты скорости $W=w/A$ вдоль оси симметрии для этого «холодного» случая. Видно, что вторичная ударная волна здесь не столь сильна. Зоны с отрицательными скоростями не наблюдается. Зато эта волна расположена непосредственно вблизи контактной поверхности, что приводит к резкому торможению последней и образованию прогиба (поскольку вторичная волна имеет наибольшую интенсивность вблизи оси симметрии, участки контактной поверхности вблизи оси замедляются сильнее). Контактная поверхность отстоит далеко от ударной волны, и в зоне между ними скорость имеет «взрывной» профиль с максимумом на ударном фронте.

Таким образом, применение двумерной численной схемы [5, 6] и методики нахождения решения, предложенной здесь, позволяет получить полное решение этой интересной газодинамической задачи, найти все характерные границы и параметры течения в возмущенной области для широкого диапазона исходных параметров. Данный подход и данное решение могут быть обобщены и уточнены за счет более строгого учета свойств воздуха при высоких температурах и расчета процессов излучения.

Авторы благодарят Г. Г. Черного, по инициативе которого было проведено это исследование.

Поступила 30 VI 1976.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шуршалов Л. В.* Об одном классе двумерных нестационарных течений с ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
2. *Архангельский Н. А.* К расчету течения, возникающего при искровом пробое в воздухе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
3. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
4. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965.
5. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47, вып. 3.
6. *Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.