

О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ  
КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ  
В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

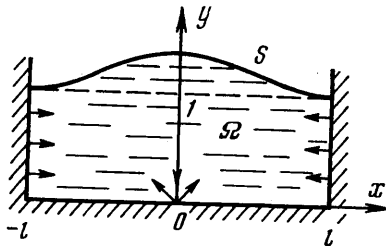
В. С. ТЕМКИНА

(Харьков)

Рассматривается плоская задача о форме свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости при установившемся истечении из прямоугольного канала через тонкую щель с одновременной равномерной подачей жидкости через боковые стенки. Учитываются силы тяжести и поверхностного натяжения.

Нелинейная задача о совместном определении свободной поверхности и поля скоростей жидкости решается методом итераций. Исследуется сходимость итераций к решению задачи при малых значениях параметров. Получено в замкнутом виде решение линеаризованной задачи при малой мощности стока и малой ширине канала, которое сравнивается с решением задачи в полной постановке. Приводятся графики свободной поверхности жидкости при различных значениях параметров, полученные в результате численного решения нелинейной задачи.

**1. Постановка задачи. Метод итераций.** В точке  $(0,0)$  плоской области течения  $\Omega$  (фиг. 1) расположен сток мощности  $\alpha$ . Свободная поверхность  $S$  жидкости, описываемая функцией  $y=1+f(x)$ , и потенциал скорости  $\varphi$



Фиг. 1

удовлетворяют следующей системе уравнений и граничных условий [1, 2], записанных в безразмерной форме

$$(1.1) \quad \Delta\varphi(X)=0, \quad X=(x, y), \quad -l \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq 1+f(x)$$

$$(1.2) \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{x=\pm l} = \mp \frac{1}{2}$$

$$\varphi \sim \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r=(x^2+y^2)^{1/2} \rightarrow 0$$

$$(1.3) \quad \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = Bf + \frac{W}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 + c, \quad f' = \frac{df}{dx}$$

$$(1.4) \quad f'(l) = f'(-l) = 0, \quad f(l) = f(-l) = 0$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к границе области  $\Omega$ ,  $B = \rho gh^2 / \sigma$  — число Бонда ( $B > 0$ ),  $W = BF$  — число Вебера,  $F = \alpha^2 / gh^3$  — число Фруда,  $\rho$  — плот-

ность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — уровень жидкости около боковой стенки, принимаемый в качестве характерного размера,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $s$  — длина дуги линии свободной поверхности, отсчитываемая от оси  $y$ ,  $c$  — неизвестная постоянная,  $l$  — полуширина канала.

В работе [3] был предложен метод итераций для численного построения свободной поверхности при установившемся движении тяжелой жидкости. При этом для расчета поверхности жидкости на каждой итерации применялся метод установления в сочетании с методом дробных шагов.

Рассматриваемый ниже метод итераций для случая капиллярной жидкости аналогичен методу, примененному в работах [4, 5]. Каждая итерация состоит из двух этапов: 1) решение нелинейной краевой задачи (1.3), (1.4), описывающей свободную поверхность  $S_i$  при заданной скорости жидкости  $\partial\varphi_{i-1}/\partial s$  на поверхности; 2) нахождение на заданной поверхности  $S_i$  касательной производной  $\partial\varphi_i/\partial s$ , где  $\varphi_i$  является решением задачи Неймана (1.1), (1.2).

Краевая задача (1.3), (1.4) при любой достаточно гладкой функции  $\partial\varphi/\partial s$  имеет единственное решение, которое может быть найдено методом пристрелки. Вследствие симметрии решения эта задача рассматривается на отрезке  $[0, l]$ , причем ищется гладкое на оси симметрии решение,  $f'(0) = 0$ .

Для нахождения касательной составляющей скорости на каждой итерации в [4, 5] использовалось интегральное уравнение относительно  $\partial\varphi/\partial s$ , полученное с помощью дифференцирования формулы Грина для области с бесконечной гладкой границей. В рассматриваемом в данной работе случае области с кусочно-гладкой границей также удается построить такое уравнение благодаря специальному выбору ядра в интегральном представлении гармонической функции.

**2. Интегральное уравнение.** Рассмотрим задачу Неймана (1.1), (1.2). Для граничных значений гармонической в области  $\Omega$  функции и ее нормальной производной имеет место известное соотношение, являющееся следствием формулы Грина

$$(2.1) \quad p\varphi(X) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_Y} \varphi(Y) ds_Y + \int_{\partial\Omega} G(X, Y) \frac{\partial\varphi(Y)}{\partial n} ds_Y$$

Здесь  $p=1$  при  $X \in \Omega$ ,  $p=1/2$  при  $X \in \partial\Omega$  (кроме угловых точек) и  $p=1/4$ , когда  $X$  — одна из четырех угловых точек области  $\Omega$ ,  $G(X, Y)$  — любое фундаментальное решение уравнения Лапласа в области  $\Omega$ .

С учетом симметрии движения жидкости относительно оси  $y$  достаточно рассматривать задачу на правой половине области течения, т. е. в области  $\Omega' = \{(x, y) | 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 1+f(x)\}$ . В качестве ядра в интегральной формуле (2.1) выберем функцию Грина задачи Неймана для оператора Лапласа в полуполосе  $0 \leq x \leq l, 0 \leq y < \infty$

$$G(x, y; \xi, \eta) = G_0(x-\xi, y-\eta) + G_0(x+\xi, y-\eta) + G_0(x-\xi, y+\eta) + G_0(x+\xi, y+\eta)$$

Функция

$$G_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left( \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y - \cos \frac{\pi}{l} x \right)$$

построена с помощью метода отражений в работе [6]. Легко проверить, что функция Грина  $G(x, y; \xi, \eta)$  при  $(x, y) \in \Omega'$  удовлетворяет однородным

условиям Неймана

$$(2.2) \quad \left. \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=l} = \left. \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0$$

Учитывая граничные условия (1.2) и свойства ядра (2.2), получим окончательно интегральное представление потенциала скорости в виде

$$(2.3) \quad \frac{1}{2} \varphi(s_x) = - \int_0^{s_0} \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_x} \varphi(s_y) ds_y - \frac{1}{2} \int_0^1 G(x, y; l, \eta) d\eta + 2G_0(x, y)$$

Здесь  $s_x$  и  $s_y$  — отсчитываемая от оси симметрии длина дуги свободной поверхности в точках  $X$  и  $Y$ ,  $s_x, s_y \in [0, s_0]$ .

Таким образом, при использовании указанной функции Грина получается интегральное уравнение только на свободной поверхности жидкости. Кроме того, при дважды непрерывно дифференцируемой поверхности  $S$  это уравнение имеет ядро, непрерывное на всем промежутке интегрирования, включая его концы (так как предполагается, что  $f'(l) = f'(0) = 0$ ). Это связано с тем, что при применении метода отражений область  $\Omega$  заменяется бесконечной полосой с дважды непрерывно дифференцируемой границей, полученной с помощью многократного отражения поверхности  $S$  относительно твердых стенок. Следовательно, обе части уравнения (2.3) можно дифференцировать по дуге  $s_x$  так же, как и в случае гладкого контура.

Пусть  $F_0(x, y)$  — гармоническая функция, сопряженная  $G_0(x, y)$ , т. е. обе функции удовлетворяют условиям Коши — Римана

$$(2.4) \quad \frac{\partial G_0}{\partial x} = - \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial G_0}{\partial y} = \frac{\partial F_0}{\partial x}$$

Пользуясь этими соотношениями, проинтегрируем первое слагаемое в правой части формулы (2.3) по частям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi(s_x) = & \int_0^{s_0} [F_0(x-\xi, y-\eta) - F_0(x+\xi, y-\eta) - F_0(x-\xi, y+\eta) + \\ & + F_0(x+\xi, y+\eta)] \varphi'(s_y) ds_y - \frac{1}{2} \int_0^1 G(x, y; l, \eta) d\eta + 2G_0(x, y) + \text{const} \end{aligned}$$

Продифференцировав обе части этого равенства по дуге  $s_x$  при  $0 \leq x < l$  и пользуясь опять соотношениями (2.4), получим уравнение относительно касательной производной потенциала скорости

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi'(s_x) - 2 \int_0^{s_0} \left[ \frac{\partial G_0(x-\xi, y-\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial G_0(x+\xi, y-\eta)}{\partial n_x} - \right. \\ \left. - \frac{\partial G_0(x-\xi, y+\eta)}{\partial n_x} + \frac{\partial G_0(x+\xi, y+\eta)}{\partial n_x} \right] \varphi'(s_y) ds_y = \\ = - \int_0^1 \frac{\partial G(x, y; l, \eta)}{\partial s_x} d\eta + 4 \frac{\partial G_0(x, y)}{\partial s} \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2.4), преобразуем интеграл в правой части формулы (2.5) при  $x \in [0, l]$

$$(2.6) \quad \int_0^l \frac{\partial G(x, y; l, \eta)}{\partial s_x} d\eta =$$

$$= 2x_s' [F_0(x-l, y-1) - F_0(x-l, y+1)] - 2y_s' [G_0(x-l, y-1) - G_0(x-l, y+1)],$$

$$F_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi y}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2l} \right]$$

Как видно из формулы (2.6), правая часть уравнения (2.5) непрерывна на промежутке  $[0, l]$  и может быть доопределена по непрерывности на правом конце этого промежутка. Ядро этого уравнения непрерывно при  $x \in [0, l]$ .

Пользуясь методами теории потенциала, можно показать, что уравнение (2.5) при любой квадратично суммируемой правой части имеет решение, притом единственное. Это решение будет непрерывной функцией при дважды непрерывно дифференцируемой поверхности  $S$ .

3. Сходимость итераций. Запишем уравнение (1.3) в виде

$$f'' - Bf = \frac{W}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + c + \delta(f), \quad \delta(f) = f'' - \frac{f''}{(1+f'^2)^{1/2}}$$

или

$$f = - \int_0^l g(x, \xi) \left[ \frac{W}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + c + \delta(f) \right] d\xi$$

$$g(x, \xi) =$$

$$= \begin{cases} B^{-1/2} [\exp(2l\sqrt{B}) - 1] \operatorname{ch} \sqrt{B}x [\exp(\sqrt{B}\xi) + \exp(\sqrt{B}(2l-\xi))], & x \leq \xi \\ B^{-1/2} [\exp(2l\sqrt{B}) - 1] \operatorname{ch} \sqrt{B}\xi [\exp(\sqrt{B}x) + \exp(\sqrt{B}(2l-x))], & x \geq \xi \end{cases}$$

Здесь  $g(x, \xi)$  — функция Грина краевой задачи  $f'' - Bf = 0$ ,  $f'(0) = f'(l) = 0$ .

Выбрав постоянную  $c$  из условия  $f(l) = 0$ , получим

$$f = \int_0^l [g(l, \xi) - g(x, \xi)] \omega(\xi) d\xi, \quad \omega = \frac{W}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + \delta(f)$$

Оператор  $Q$ , определяемый этим уравнением ( $f = Q\omega$ ), является непрерывным оператором, действующим из пространства  $C$  непрерывных функций в банахово пространство  $M$  дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям  $f(l) = 0$ ,  $f'(0) = f'(l) = 0$ , с нормой  $\|f\|_M = l^{-2} \max |f| + l^{-1} \max |f'| + \max |f''|$ .

Обозначим через  $A$  оператор, сопоставляющий поверхности  $f \in M$  функцию  $\varphi_s'$ , где  $\varphi_s' \in C$  — решение интегрального уравнения (2.5),  $A: M \rightarrow C$ . Оператор  $A$  является непрерывным, если поверхность  $S$  не касается дна канала. Достаточное условие для этого  $\|f\|_M < 1/l^2$ .

С использованием этих обозначений запишем задачу (1.1) — (1.4) в виде нелинейного операторного уравнения

$$f = Tf, \quad T = Q \left( \frac{WA}{2} + \delta \right)$$

*Теорема.* Для любого  $l$ , такого, что

$$(3.1) \quad \frac{\operatorname{ch}(\pi/l)}{\pi \operatorname{ch}^3(\pi/l)} < 1 - q_0, \quad 0 < q_0 < 1$$

найдется достаточно малое  $\varepsilon > 0$ , такое, что при всех  $W < \varepsilon$  и некотором  $R$  существует единственная неподвижная точка оператора  $T$  в шаре  $\|f\|_M \leq R$ .

Доказательство следует из оценок

$$\begin{aligned} \|Q\omega\|_M &\leq N(l, B) \|\omega\|_C \\ \|\delta(f)\|_C &\leq R^2 c_1(R) \quad (\|f\|_M \leq R) \\ \|\delta(f_1) - \delta(f_2)\|_C &\leq R c_2(R) \|f_1 - f_2\|_M \quad (\|f_1\|_M \leq R, \|f_2\|_M \leq R) \end{aligned}$$

$$\|\varphi_s'\|_C \leq \frac{a_1}{1-k}, \quad \|\varphi_s'(f_1) - \varphi_s'(f_2)\|_C \leq$$

$$\leq \left( \frac{a_2}{1-k} + \frac{a_1 k_1}{(1-k)^2} \right) \|f_1 - f_2\|_M$$

$$N(l, B) = \frac{1}{Bl^2} \left[ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{Bl}/2)} \right] + \frac{\exp(\sqrt{Bl}) - 1}{2\sqrt{Bl}(\exp \sqrt{Bl} + 1)} + 2$$

Здесь  $N$  — ограниченная функция при всех  $l$  и  $B$ ;  $c_1(R) \rightarrow 0$  и  $c_2(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow 0$

$$a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{l \operatorname{sh}(\pi/l)} + a_2 R, \quad k = \frac{\operatorname{ch}(\pi/l)}{\pi \operatorname{sh}^3(\pi/l)} + k_1 R$$

$a_2$  и  $k_1$  ограничены при  $\|f_1\| \leq R$  и  $\|f_2\| \leq R$ .

Для краткости опускаем здесь достаточно громоздкое доказательство этих оценок.

Из указанных оценок видно, что при  $l$ , удовлетворяющем неравенству (3.1), можно выбрать  $R$  так, чтобы

$$R c_1(R) \leq 1/2N, \quad R c_2(R) \leq q/2N \quad (q < 1), \quad R < 1/l^2, \quad R < q_0/k_1$$

Тогда при достаточно малом  $W$

$$\frac{W}{2} \|QAf\|_M \leq \frac{R}{9}, \quad \|Q\delta(f)\|_M \leq \frac{R}{9} \quad (\|f\|_M \leq R)$$

$$\frac{W}{2} \|Q(Af_1 - Af_2)\|_M \leq \frac{q}{2} \|f_1 - f_2\|_M$$

$$\|Q(\delta(f_1) - \delta(f_2))\|_M \leq \frac{q}{2} \|f_1 - f_2\|_M$$

Следовательно, оператор  $T$  переводит шар  $\|f\|_M \leq R$  в себя и является сжимающим в этом шаре, т. е. имеет в нем единственную неподвижную точку, которая может быть найдена с помощью метода итераций.

Отметим, что теоретическое исследование близких задач о форме свободной поверхности идеальной жидкости с учетом поверхностных сил при малых значениях параметров проводилось в работах [7, 8].

**4. Асимптотические формулы.** Представляя решение задачи (1.1) — (1.4) при малых  $W$  в виде

$$f(x) = W f_1(x) + W^2 f_2(x) + \dots$$

получим для  $f_1(x)$  выражение

$$(4.1) \quad f_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^l [g(l, \xi) - g(x, \xi)] \varphi'^2(\xi) d\xi$$

Здесь  $\varphi'$  — решение интегрального уравнения (2.5) для плоской поверхности  $S: f_0=0$ . В этом случае интегральное уравнение упрощается и принимает вид

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \varphi' - K\varphi' &\equiv \varphi'(x) - 2 \int_0^l \left[ \frac{\partial G_0(x+\xi, 2)}{\partial y} - \frac{\partial G_0(x-\xi, 2)}{\partial y} \right] \varphi'(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-l)}{2l} \right] - \frac{1}{l} \left[ \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} - \cos \frac{\pi}{l} x \right]^{-1} \sin \frac{\pi}{l} x \end{aligned}$$

При небольших  $l$  интегральный оператор  $K$  в уравнении (4.2) будет малым по норме, и решение можно принимать приблизительно равным правой части. Действительно

$$\begin{aligned} \|K\varphi'\|_c &\leq \frac{\operatorname{sh}(2\pi/l)}{2l} \max_{\xi \in [0, l]} |\varphi'(\xi)| \int_0^l \left| \frac{1}{\operatorname{ch}(2\pi/l) - \cos[\pi(x+\xi)/l]} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\operatorname{ch}(2\pi/l) - \cos[\pi(x-\xi)/l]} \right| d\xi \leq \frac{\operatorname{ch}(\pi/l)}{\pi \operatorname{sh}^3(\pi/l)} \|\varphi'\|_c = \\ &= \frac{4}{\pi} e^{-2\pi/l} (1 + 4e^{-2\pi/l} + \dots) \|\varphi'\|_c \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при  $l \ll 1$  линейное приближение решения задачи имеет вид

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \int_0^l [g(l, \xi) - g(x, \xi)] \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi-l)}{2l} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{l} \frac{\sin(\pi\xi/l)}{\operatorname{ch}(\pi/l) - \cos(\pi\xi/l)} \right\} d\xi + O(e^{-2\pi/l}) \end{aligned}$$

Эту формулу можно упростить, выделив в явном виде главную часть асимптотического представления  $\varphi'$  при малых  $l$

$$(4.4) \quad \varphi' = -x/2l + O(l^{-1} \exp(-\pi/l))$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части (4.2) имеет порядок  $O(l^{-1} \exp(-\pi/l))$ . Покажем, что первое слагаемое имеет вид  $-x/l + O(\exp(-2\pi/l))$ . Действительно

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-l)}{2l} \right] + \frac{x}{2l} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-l)}{2l} \right] - \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi(x-l)}{2l} \right] \right| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 1 - \operatorname{th} \frac{\pi}{l} \right) \frac{|\operatorname{ctg}[\pi(x-l)/2l]|}{1 + \operatorname{ctg}^2[(x-l)/2l] \operatorname{th}^2(\pi/l)} \leq \frac{1 - \operatorname{th}(\pi/l)}{2\pi \operatorname{th}(\pi/l)} < \\ &< \frac{1 - \operatorname{th}(\pi/l)}{2\pi \operatorname{th}(\pi/l)} = \frac{1}{\pi} e^{-2\pi/l} (1 + e^{-2\pi/l} + \dots), \quad 0 < \lambda < l \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой конечных приращений и неравенством

$$|a|/(1+a^2b^2) \leq 1/2|b|, \quad \forall a, b$$

Из полученных оценок следует формула (4.4).

Подставив (4.4) в формулу (4.1), получим приближенное выражение для формы свободной поверхности в виде

$$(4.5) \quad Wf_1(x) = \frac{F}{8} \left[ \frac{l^2 - x^2}{l^2} - \frac{2}{l\sqrt{B}} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{B}l - \operatorname{ch} \sqrt{B}x}{\operatorname{sh} \sqrt{B}l} \right] + \\ + O\left(\frac{1}{l} e^{-\pi/l}\right) \equiv f_{11}(x) + O\left(\frac{1}{l} e^{-\pi/l}\right)$$

Оценки в формулах (4.3) и (4.5) понимаются в смысле нормы пространства  $M$  (см. п. 3).

**5. Обсуждение результатов.** Исходя из нелинейной системы уравнений и граничных условий (1.1)–(1.4) были проведены вычисления на ЭВМ М-222 по методу итераций.

Краевая задача (1.3), (1.4) для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения решалась методом пристрелки с неизвестным параметром  $c$ . С помощью метода Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага интегрировалась система дифференциальных уравнений

$$\beta_s' = Bf + \frac{W}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 + c, \quad x_s' = \cos \beta, \quad f_s' = \sin \beta$$

эквивалентная уравнению (1.3), с нулевыми начальными условиями. Здесь  $\beta$  — угол между касательной к поверхности  $S$  и осью  $x$ .

При вычислениях использовался тот факт, что семейство решений  $f(x; c)$  этой задачи Коши (вместе с первой производной  $f_x'$ ) монотонно зависит от  $c$ . Параметр  $c$  выбирался из краевого условия  $f'(l) = 0$ . Затем условие  $f(l) = 0$  удовлетворялось путем сдвига полученного решения вдоль оси  $y$ .

Задача Неймана (1.1), (1.2) заменялась эквивалентным интегральным уравнением (2.5) относительно  $\varphi_s'$ . Это интегральное уравнение решалось по методу Крылова–Боголюбова [9] с числом узлов  $m=30$ . Вычисления, проведенные для контроля с 15 узлами, показали хорошее совпадение результатов.

Решение задачи в полной постановке, полученное численно, сравнивалось при небольших  $l$  с решением, даваемым приближенными формулами (4.3) и (4.5), и при больших  $l$  — с решением задачи об истечении жидкости из бесконечного слоя [4, 5].

При числе Фруда  $F=1$  формула (4.3) дает приемлемую точность (относительная погрешность  $\sim 0.2\%$  при  $B=1$  и  $1.3\%$  при  $B=10$ ), когда ширина канала равна его глубине ( $l=0.5$ ). В случае  $l=1$  эта формула дает точность порядка  $1\%$  при  $B=1$  и  $4.3\%$  при  $B=10$ . Решение, полученное по формуле (4.5), отличается от точного решения задачи в случае  $l=0.5$  приблизительно на  $1\%$  при  $B=1$  и на  $2.3\%$  при  $B=10$ . Это отличие составляет при  $B=1$  и  $10$  соответственно  $10$  и  $13\%$ , когда  $l=1$ .

Таким образом (это следует также из приведенных выше оценок), формула (4.5) дает точность, несколько меньшую по сравнению с (4.3), однако формула (4.3) требует вычисления квадратуры, в то время как (4.5) дает приближенное решение задачи в замкнутом виде.

Функция  $f_{11}(x)$ , определяемая формулой (4.5), положительна и монотонно убывает по  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ) при всех  $B$  и  $l$ , так как

$$f_{11}'(x) = \frac{F}{4l} \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{B}x}{\operatorname{sh} \sqrt{B}l} - \frac{x}{l} \right] \leq 0$$

Тогда

$$\max_{x \in [0, l]} f_{11}(x) = f_{11}(0) = \frac{F}{8} \left[ 1 - \frac{2}{l\sqrt{B}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{B}l}{2} \right]$$

Отсюда видно, что функция  $f_{11}(x)$  ограничена равномерно по  $B$  ( $0 \leq B < \infty$ ) и

$$\max_{x \in [0, l]} f_{11}(x) \sim \frac{W}{96} l^2$$

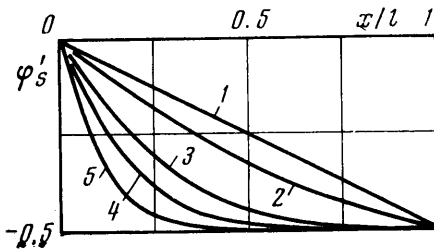
при  $B l^2 \ll 1$ . Таким образом, при ширине канала, стремящейся к нулю, поверхность жидкости приближается к плоскости  $y=1$ . Следует подчеркнуть, что это — эффект влияния капиллярных сил (скорость жидкости на свободной поверхности остается конечной).

Влияние ширины канала на вид зависимости скорости частиц жидкости на свободной поверхности  $S$  от координаты  $x$  показано на фиг. 2 для случая  $B=1, W=1$  (кривым 1–5 соответствуют  $l=0.5, 1, 2, 3, 5$ ). При  $l=0.5$  (ширина канала равна его глубине) график скорости практически совпадает с линейной функцией (4.4).

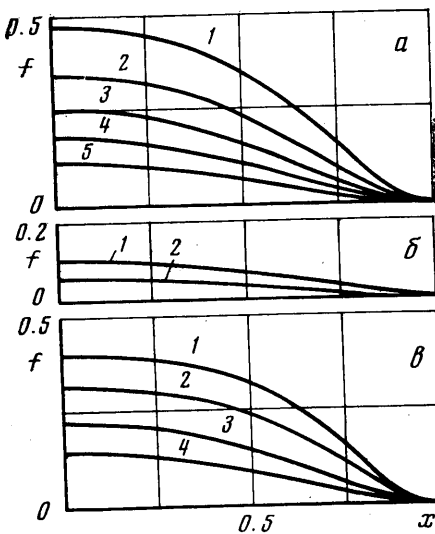
На фиг. 3 приведены графики отклонения свободной поверхности от плоскости  $y=1$  при  $l=1$ . Подъем жидкости над плоскостью увеличивается

при возрастании числа  $F$  и фиксированном числе  $B$  (фиг. 3, а, где  $B=1$ , значениям  $F=30, 25, 20, 15, 10$  соответствуют кривые 1–5). Влияние числа Бонда на форму свободной поверхности жидкости при фиксированном числе Фруда показано на фиг. 3, б, где  $F=1$  и кривым 1, 2 соответствуют значения  $B=50, 10$ , и на фиг. 3, в, где  $F=5$  и кривым 1–4 соответствуют значения  $B=10, 8, 5, 3$ .

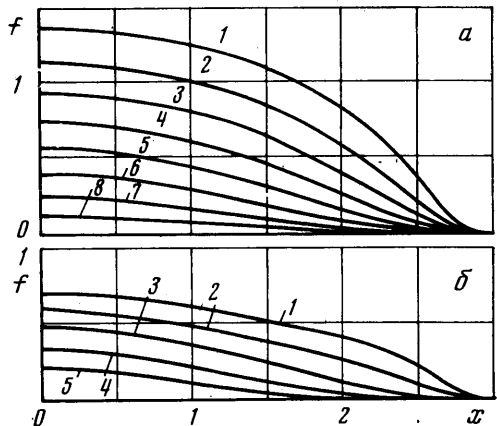
Некоторые результаты вычислений для достаточно большой ширины канала ( $l=3$ ) приведены



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



на фиг. 4, а, где кривым 1–8 соответствуют значения  $W=16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2$ ,  $B=1$ , и б, где кривым 1–5 соответствуют значения  $W=30, 25, 20, 15, 10$ ,  $B=5$ . Как и в случае  $l=1$ , при фиксированном значении  $B$  подъем поверхности жидкости над плоскостью  $y=1$  монотонно увеличивается с ростом  $W$ . Расчеты проведены до максимальных чисел Вебера, для которых при вычислениях имела место сходимость итераций.

Как и следовало ожидать из физических соображений, при достаточно большой ширине канала найденная свободная поверхность аппроксимирует поверхность, образующуюся при установившемся истечении жидкости из бесконечного слоя [4, 5]. При этом стенка канала больше влияет на картину течения в условиях слабого гравитационного поля, т. е. при небольших значениях числа Бонда. Например, в случае  $B=5$  бесконечная свободная поверхность хорошо приближается к конечной уже при полуширине канала  $l=3$  (при  $F=1$  максимальное отличие этих поверхностей не превышает 0.5%). В случае  $B=1$  бесконечная поверхность приближается с той же точностью к конечной, начиная с  $l=7$  (при  $F=1$  и  $l=7$  отличие поверхностей не превышает 0.25%, в то время как при  $l=5$  и 3 оно составляет 3 и 10% соответственно).

При всех рассмотренных значениях параметров полученная в результате расчетов свободная поверхность жидкости лежит выше плоскости  $y=1$  и имеет максимум на оси симметрии. Последний факт легко устанавливается из рассмотрения краевой задачи (1.3), (1.4).

В п. 3 доказана сходимость итераций для малых значений параметров, исходя из плоской поверхности  $S$ . При проведении расчетов плоскость  $y=1$  принималась за начальное приближение только для небольших чисел Вебера ( $W \sim 1$ ). При постепенном увеличении числа  $W$  за начальное приближение принималась поверхность, найденная при предыдущем значении  $W$ . Как показали вычисления, проведенные таким образом итерации сходятся при достаточно больших значениях чисел Бонда и Вебера.

Поступила 2 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. Антонцев С. Н., Васильев О. Ф., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. Численный расчет водослива. В сб. «Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск, «Наука», 1966.
4. Темкина В. С. Плоская задача об истечении жидкости из бесконечного слоя. В сб. «Вопросы гидродинамики и теплообмена в криогенных системах», вып. 4. Харьков, 1974.
5. Темкин Л. А., Темкина В. С., Щербина Г. В. Численное решение некоторых задач динамики жидкости со свободной поверхностью. В сб. трудов республиканской научной конференции «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». Канев, 1974, стр. 346–354.
6. Темкина В. С. О первом приближении в задаче об установившемся истечении жидкости с учетом поверхностных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
7. Щербина Г. В. О форме свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Сб. науч. тр. физ.-техн. ин-та низких температур АН УССР, 1969, вып. 1.
8. Эренбург В. Б. Плоская стационарная задача со свободной границей и крайним углом для уравнений Эйлера. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 14. Новосибирск, 1973.
9. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приближенное решение задачи Дирихле. Докл. АН СССР, Сер. А, 1929, № 12.