

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Исследуются уединенные волны в тонком слое вязкой жидкости, стекающей по вертикальной поверхности под действием силы тяжести. Существование таких волн установлено в экспериментах [1, 2]. Там же были отмечены трудности, которые должны встретиться при теоретическом расчете. Ниже дается решение задачи об уединенных волнах методом разложения по малому параметру в двух областях с последующей склейкой, а также методом численного интегрирования. Показывается, что при каждом расходе наряду с однопараметрическим семейством периодических решений (параметр — волновое число α) существует также решение типа уединенной волны. Периодические волны переходят в последовательность уединенных волн при уменьшении волнового числа.

Положим в основу исследования уравнение для толщины слоя $h(\xi_1)$, которое получается интегрированием поперек слоя основных уравнений движения вязкой жидкости. При интегрировании предполагается, что можно пользоваться приближением пограничного слоя и принять параболический профиль для продольной скорости. В системе координат, перемещающейся вместе с волной, это уравнение имеет вид

$$(1) \quad Ghh''' + \frac{1}{5} \left[6 \left(\frac{1-z}{h} \right)^2 - z^2 \right] h' + Hh - E \frac{1+zh-z}{h^2} = 0$$

$$z = \frac{c}{U_0}, \quad G = \frac{\sigma}{\rho U_0^2 a_0}, \quad H = \frac{ga_0}{U_0^2}, \quad E = \frac{3\nu}{U_0 a_0}, \quad \xi_1 = (x-ct) a_0^{-1}$$

Здесь c — скорость волны, U_0 , a_0 — характерные значения скорости и толщины слоя. В случае уединенной волны U_0 , a_0 означают среднюю скорость и толщину невозмущенного слоя.

В работе [3] исследованы нелинейные периодические решения уравнения (1). Был применен метод разложения в ряд Фурье и получены явные выражения для формы волны, фазовой скорости, средней толщины слоя. При фиксированном числе членов, учитываемых в таком решении, точность падает с уменьшением волнового числа α вследствие того, что при малых значениях α профиль волны сильно отличается от гармонического. На фиг. 1 показаны для примера некоторые результаты прямого численного интегрирования уравнения (1) в случае периодических волн при $Re = 3a_0 U_0 \nu^{-1} = 24.44$, $\alpha = 0.107$ (линия 1), $\alpha = 0.051$ (линия 2) для слоя воды. Интегрирование проводилось на длине волны $\xi_{10} \leq \xi_1 \leq \xi_{10} + 2\pi\alpha^{-1}$. Начальная точка ξ_{10} выбиралась на гребне волны $h'(\xi_{10}) = 0$; при заданных Re , α подбирались c , a_0 и начальные данные $h(\xi_{10})$, $h''(\xi_{10})$ так, чтобы при $\xi_1 = \xi_{10} + 2\pi\alpha^{-1}$ выполнялись условия периодичности. Для значений α , лежащих в плоскости Re , α вблизи кривой нейтральной устойчивости, профили волны почти синусоидальные. С уменьшением α возрастает влияние нелинейных членов уравнения (1) и профили заметно деформируются, приобретая форму, соответствующую уединенным волнам.

Расчеты проводились с малым шагом по параметру α . Чтобы получить волну при $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$, характеристики волнового решения, соответствующего α , использовались в качестве начальных условий. При заданном значении Re такие расчеты удается провести лишь до некоторого конечного значения $\alpha_k(\text{Re})$. При $\alpha < \alpha_k$ итерационный процесс подбора начальных данных в точке ξ_{10} начинает расходиться. Таким образом, хотя в этих расчетах обнаруживается тенденция к переходу периодических волн в уединенные при уменьшении α , для определения уединенных волн требуется специальный метод решения.

Предположим, что имеется уединенная волна, так что $h \rightarrow 1$ при $\xi_1 - \xi_{10} \rightarrow \pm\infty$, где ξ_{10} — некоторая характерная точка волны. Введем замену переменной $\xi = \text{Re}^{2/3} \gamma^{-1/3} (\xi_1 - \xi_{10})$, тогда уравнение (1) приводится к виду

$$(2) \quad h^3 h''' + \delta [\omega - z^2 (h^2 - 1)] h' + h^3 - 1 - z(h - 1) = 0 \\ \delta = 45^{-1} \text{Re}^{11/3} \gamma^{-1/3}, \quad \omega = 5z^2 - 12z + 6, \quad \gamma = \sigma \rho^{-1} \nu^{-1/3} g^{-1/3}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение малого отклонения от $h=1$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Положим $h-1 = \varepsilon \exp \sigma \xi$. Линеаризируя уравнение (2) относительно ε , получаем для σ уравнение

$$(3) \quad \sigma^3 + \delta \omega \sigma + 3 - z = 0$$

При $z < 3$ уравнение (3) имеет один действительный корень $\mu < 0$ и два комплексно-сопряженных корня с положительной действительной частью $m \pm il$, $m = -1/2\mu$. В соответствии с этим можно составить два частных решения линеаризованного уравнения (2)

$$(4) \quad \varphi = \varepsilon_1 \exp \mu \xi, \quad \psi = \varepsilon_2 \exp m \xi \cos(b + l\xi)$$

с произвольными константами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, b$. Первое из этих решений $\varphi(\xi)$ уменьшается до нуля при $\xi \rightarrow \infty$, второе $\psi(\xi)$ уменьшается до нуля при $\xi \rightarrow -\infty$. В уединенной волне должен происходить непрерывный переход от $\varphi(\xi)$ к $\psi(\xi)$. Такой переход, если только он возможен, должен происходить за счет нелинейных членов уравнения (2).

Для продолжения решений (4) в нелинейную область применим метод разложения по малому параметру. Для φ запишем

$$(5) \quad \varphi = \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_1^2 \varphi_2 + \varepsilon_1^3 \varphi_3 + \dots$$

Подставляя (5) в уравнение (2) и приравнявая коэффициенты, получим

$$(6) \quad \varphi_k''' + \delta \omega \varphi_k' + (3 - z) \varphi_k = F_k$$

где правая часть F_k выражается через функции φ_m с меньшими номерами и их производные. Полагая $p = \delta z^2$ и $\varphi_k = \Phi_k \exp k\mu\xi$, найдем

$$(7) \quad \Phi_k = (k^3 \mu^3 + k \delta \omega \mu + 3 - z)^{-1} F_k \quad (k=2, 3, \dots) \\ F_2 = 2p\mu - 3 - 3\mu^3 \\ F_3 = (6p\mu - 6 - 27\mu^3) \Phi_2 + p\mu - 1 - 3\mu^3 \\ F_4 = (12p\mu - 6 - 84\mu^3) \Phi_3 - (4p\mu - 3 - 30\mu^3) \Phi_2 - (3 + 24\mu^3) \Phi_2^2 - \mu^4$$

Не нарушая общности, можно принять $\Phi_1 = 1$, так как этого всегда можно добиться выбором ε_1 . В свою очередь, уменьшение ε_1 эквивалентно сдвигу начала отсчета ξ в выражении $\exp \mu \xi$ вправо.

Для ψ запишем разложение

$$(8) \quad \psi = \varepsilon_2 \psi_1 + \varepsilon_2^2 \psi_2 + \varepsilon_2^3 \psi_3 + \dots$$

Введем обозначение $\xi = b + l\xi$; тогда коэффициенты ψ_k разложения ψ по степеням ε_2 должны иметь вид

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi_1 &= \exp m\xi \cos \xi, & \psi_2 &= \exp 2m\xi (\psi_{20} + \psi_{21} \cos 2\xi + \psi_{22} \sin 2\xi) \\ \psi_3 &= \exp 3m\xi (\psi_{31} \cos \xi + \psi_{32} \sin \xi + \psi_{41} \cos 3\xi + \psi_{42} \sin 3\xi) \end{aligned}$$

Ограничимся вычислением трех членов разложения (8). Подставляя (8) с учетом выражений (9) в уравнение (2), собирая члены при одинаковых степенях ε , а затем при одинаковых гармониках и приравнявая их нулю, выведем уравнения для ψ_{ki} . В частности, для ψ_{20}

$$(10) \quad (8m^3 + 2\delta\omega m + 3 - z) \psi_{20} = -1/2 [3 - 2pm + 3m(m^2 - 3l^2)]$$

Для других коэффициентов получим попарные системы уравнений

$$(11) \quad \begin{aligned} a_{k1}\psi_{k1} + a_{k2}\psi_{k2} &= F_{k1}, & b_{k1}\psi_{k1} + b_{k2}\psi_{k2} &= F_{k2} \\ (k=2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} a_{21} &= 8m(m^2 - 3l^2) + 2\delta\omega m + 3 - z, & a_{22} &= 8l(3m^2 - l^2) + 2\delta\omega l \\ a_{31} &= 9m(3m^2 - l^2) + 3\delta\omega m + 3 - z, & a_{32} &= (27m^2 - l^2)l + \delta\omega l \\ a_{41} &= 27m(m^2 - 3l^2) + 3\delta\omega m + 3 - z, & a_{42} &= 27l(3m^2 - l^2) + 3\delta\omega l \end{aligned}$$

При всех k, i выполняются соотношения $b_{k1} = -a_{k2}$, $b_{k2} = a_{k1}$. Для правых частей F_{ki} получаем

$$(13) \quad \begin{aligned} F_{21} &= 1/2 [3 - 2pm + 3m(m^2 - 3l^2)], & F_{22} &= 1/2 [2pl + 3l(l^2 - 3m^2)] \\ F_{31} &= 3/4 + 9/4(m^2 - 3l^2 - 3/4p)m + [9m(3m^2 - l^2) - 6pm + 6] \psi_{20} \\ F_{32} &= 1/4 + 3/4m(m^2 - 3l^2) - 1/4pm + [27/2(m^2 - 3l^2)m - 3pm + 3] \psi_{21} - \\ & - [27/2(l^2 - 3m^2) + 3p]l\psi_{22} \\ F_{41} &= 3/4l(l^2 - 3m^2) + 1/4pl + [3(l^2 - 3m^2) + 2p]l\psi_{20} + \\ & + [21/2(l^2 - 3m^2) + p]l\psi_{21} + [27/2m(m^2 - 3l^2) - 3pm + 3] \psi_{22} \\ F_{42} &= 3/4l(l^2 - 3m^2) + 1/4pl + [27/2(l^2 - 3m^2) + 3p]l\psi_{21} + \\ & + [27/2m(m^2 - 3l^2) - 3pm + 3] \psi_{22} \end{aligned}$$

Теперь попытаемся склеить решения (5) и (8) в точке $\xi = 0$. В этой точке должны выполняться условия

$$(14) \quad \varphi = \psi, \quad \varphi' = \psi', \quad \varphi'' = \psi'' \quad (\xi = 0)$$

Для удовлетворения этих условий необходимо подобрать три произвольные константы z, b, ε_2 . Что касается константы ε_1 , то ее можно выбрать с определенным произволом, так как выбор точки склеивания до некоторой степени произволен. Меняя ε_1 , будем тем самым изменять значение $\varphi(0)$, а следовательно, положение точки склеивания относительно фронта волны. В силу того что в разложениях (5), (8) учитывается лишь ограниченное число членов, этот произвол в действительности оказывается малым, и выбор подходящей точки склеивания становится существенным. Практические расчеты показывают, что такое склеивание осуществить возможно, подтверждая тем самым существование уединенной волны.

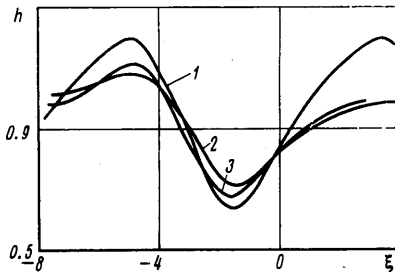
Рассмотрим конкретный пример. Имеется слой воды, для которого $\text{Re} = 24.41$, $\gamma = 2850$, $\delta = 0.08$. Зададим $\varepsilon_1 = -0.175$, тогда подбором убеждаемся, что при $z = 2.45$, $b = 4.71$, $\varepsilon_2 = 0.6$ в точке $\xi = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= -0.132, & \varphi'(0) &= 0.056, & \varphi''(0) &= -0.010 \\ \psi(0) &= -0.134, & \psi'(0) &= 0.054, & \psi''(0) &= -0.021 \end{aligned}$$

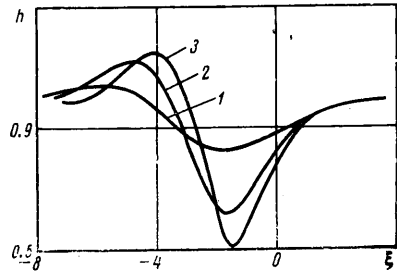
Условия склейки (14) выполняются достаточно точно. Профиль волны, рассчитываемый по формулам (5)–(13), мало отличается от численного решения.

Прямое численное решение уравнения (2) дает другой способ нахождения уединенной волны, который позволяет обойти трудоемкую процедуру подбора параметров при склейке. При заданном расходе решение (5) зависит лишь от одного параметра z . Задавая z , с помощью (5) можем найти $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ и использовать эти величины в качестве начальных данных для численного интегрирования уравнения (2) при отрицательных значениях ξ . Величину z следует подобрать таким образом, чтобы при $\xi \rightarrow -\infty$ решение $h(\xi)$ стремилось к единице. Расчет сводится к многократному численному решению задачи Коши от точки $\xi=0$ с начальными данными, соответствующими различным z .

На фиг. 1 линией 2 показана уединенная волна, полученная численно. Соответствующее значение $z=2.335$, и оно не сильно отличается от прибли-



Фиг. 1



Фиг. 2

женного значения $z=2.45$, полученного методом склеивания разложений. Видно также, что периодическая волна, являющаяся почти гармонической при $\alpha=0.107$, переходит практически в уединенную уже при $\alpha=0.051$.

На фиг. 2 показаны уединенные волны для слоя воды при $Re=15, 35, 55$ (линии 1, 2, 3). Соответствующие значения z оказываются равными 2.6075, 2.1386, 1.8926.

Автор благодарит Л. Н. Маурина за полезное обсуждение и А. М. Терещенко за помощь в проведении расчетов.

Поступила 11 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости, 1, 2. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
2. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости, 3. ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.