

ВЕТВЛЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

И. П. АНДРЕЙЧИКОВ

(Ростов-на-Дону)

Изучаются вторичные стационарные течения (вихри Тейлора) вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися концентрическими цилиндрами. Определяется область волновых чисел α и чисел Рейнольдса R , в которой существует несколько вторичных режимов движения жидкости. Исследуется ветвление этих режимов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя концентрическими цилиндрами радиусов r_1, r_2 , вращающимися с угловыми скоростями ω_1, ω_2 . Будем искать периодические вдоль оси z' цилиндров вращательно-симметричные стационарные течения, имеющие нулевой расход жидкости через поперечное сечение.

В этих условиях одним из решений $u = \{u_r, u_\theta, u_z, q\}(r, z')$ уравнений Навье — Стокса при всех числах Рейнольдса $R = \omega_1 r_1^2 / \nu$ является течение Куэтта

$$(1.1) \quad u_\theta = \{0, u(r), 0, q_0(r)\}$$
$$u(r) = ar + b/r, \quad q_0(r) = R \int u^2(r)/r dr$$
$$a = (\rho^2 \Omega - 1)/(\rho^2 - 1), \quad \rho = r_2/r_1, \quad \Omega = \omega_2/\omega_1, \quad b = 1 - a$$

Предположим, что параметры Ω, ρ фиксированы и удовлетворяют условию $a < 0$. Тогда для всех волновых чисел α , исключая некоторое счетное множество, критическое значение $R_*(\alpha)$ является точкой бифуркации течения Куэтта (граница устойчивости течения Куэтта относительно бесконечно малых возмущений для каждого α определяется числом $R_{**}(\alpha) = \min R_*(k\alpha), k=1, 2, \dots$). При R , близких к R_* , нелинейная система имеет единственное (см. [1-3]) с точностью до сдвига $2\pi/\alpha$ -периодическое вдоль оси цилиндров решение, отличное от течения Куэтта (1.1), сливающееся с ним при $R \rightarrow R_*$. Это решение аналитически зависит от параметра $|R - R_*|^{1/2}$, его расчет методом Ляпунова — Шмидта сделан в [4].

Особое множество значений α , для которых общая теория [1, 2] не предсказывает бифуркации течения Куэтта, определяется уравнением $R_*(n\alpha) = R_*(m\alpha)$, где n, m — целые числа ($n \neq m$). Будем рассматривать волновые числа α из некоторой окрестности значения α_0 , удовлетворяющего соотношению

$$(1.2) \quad R_*(\alpha_0) = R_*(2\alpha_0)$$

Соответствующее α_0 собственное значение обозначим R_0 . Вторичное течение ищем в виде

$$(1.3) \quad u(r, z') = u_0(r) + v(r, z), \quad z = \alpha z'$$

$$(1.4) \quad \alpha = \alpha_0 + \delta$$

Уравнение для определения вектора $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta, v_z, p\}(r, z)$ запишем в форме

$$(1.5) \quad A\mathbf{v} + RK\mathbf{v} + \delta A_1\mathbf{v} + \delta^2 A_2\mathbf{v} = R[B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \delta B_1(\mathbf{v}, \mathbf{v})]$$

$$A\mathbf{v} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \alpha_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \alpha_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) + \alpha_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_z - \alpha_0 \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial z} v_z \end{array} \right\}$$

$$K\mathbf{v} \equiv \left\{ \frac{2u}{r} v_\theta, - \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) v_r, 0, 0 \right\}$$

$$A_1\mathbf{v} \equiv \left\{ 2\alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r, 2\alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_\theta, 2\alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_z - \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} v_z \right\}$$

$$A_2\mathbf{v} \equiv \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_r, \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_\theta, \frac{\partial^2}{\partial z^2} v_z, 0 \right\}$$

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r + \alpha_0 v_z \frac{\partial}{\partial z} v_r - \frac{1}{r} v_\theta^2 \\ v_r \frac{\partial}{\partial r} v_\theta + \alpha_0 v_z \frac{\partial}{\partial z} v_\theta + \frac{1}{r} v_r v_\theta \\ v_r \frac{\partial}{\partial r} v_z + \alpha_0 v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$B_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \equiv \left\{ v_z \frac{\partial}{\partial z} v_r, v_z \frac{\partial}{\partial z} v_\theta, v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z, 0 \right\}$$

Решения уравнения (1.5) будем искать в гильбертовом пространстве H : замыкании по норме L_2 множества гладких соленоидальных вращательно-симметричных 2π -периодических по z векторов \mathbf{v} с исчезающими при $r=1$, ρ компонентами v_r, v_θ, v_z .

2. Исследование ветвления вблизи α_0^1 . Предположим, что собственное значение (1.2) линеаризованного уравнения (1.5) при $\delta=0$ не более чем двукратно. Собственную функцию εv_1 представим в форме

$$(2.1) \quad \varepsilon v_1(r, z) = \varepsilon (h\varphi_1(r, z) + g\varphi_2(r, z))$$

$$(2.2) \quad \varphi_j = \{\varphi_{jr}(r) \cos jz, \varphi_{j\theta}(r) \cos jz, \varphi_{jz}(r) \sin jz, p_j(r) \cos jz\}$$

$$(2.3) \quad h^2 + g^2 = 1, h \geq 0$$

Амплитуда ε задана и считается малой. Векторы φ_1, φ_2 , имеющие вид (2.2) [1,2], нормированы равенствами $\|\varphi_j\|_H = 1$.

¹ Расположение фазовых кривых векторного поля вблизи особой точки приведено в [3].

Решение уравнения (1.5) будем искать в виде рядов по параметрам δ, ε

$$(2.4) \quad v = \varepsilon \sum_{h=1}^{\infty} v_h, \quad v_h / (\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2})^{h-1} \rightarrow 0 \quad (\delta, \varepsilon \rightarrow 0)$$

$$R = R_0 + \sum_{h=1}^{\infty} R_0^{(h)}, \quad R_0^{(h)} / (\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2})^{h-1} \rightarrow 0 \quad (\delta, \varepsilon \rightarrow 0)$$

Подставляя эти ряды в (1.5) и приравнявая члены одинакового порядка малости в обеих частях равенства, получим последовательность уравнений

$$(2.5) \quad \begin{aligned} A v_1 + R_0 K v_1 &= 0 \\ A v_2 + R_0 K v_2 &= -R_0' K v_1 - \delta A_1 v_1 + \varepsilon R_0 B(v_1, v_1) \end{aligned}$$

Первое уравнение (2.5) однородно и служит для определения собственного значения R_0 и собственных векторов (2.2).

Второе уравнение (2.5) неоднородно. Условиями его разрешимости является ортогональность в H правой части решениям φ_1^*, φ_2^* соответствующего сопряженного однородного уравнения. Зависимость векторов φ_1^*, φ_2^* от z аналогична (2.2). Пользуясь этим обстоятельством, представим условия разрешимости в виде

$$(2.6) \quad \begin{aligned} -h R_0' (K \varphi_1, \varphi_1^*)_H - \delta h (A_1 \varphi_1, \varphi_1^*)_H + \varepsilon R_0 h g (B^0(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_1^*)_H &= 0 \\ -g R_0' (K \varphi_2, \varphi_2^*)_H - \delta g (A_1 \varphi_2, \varphi_2^*)_H + \varepsilon R_0 h^2 (B(\varphi_1, \varphi_1), \varphi_2^*)_H &= 0 \\ B^0(\varphi_1, \varphi_2) &= B(\varphi_1, \varphi_2) + B(\varphi_2, \varphi_1) \end{aligned}$$

Уравнения (2.6) и соотношения (2.3) определяют величины R_0', h, g в зависимости от параметров ε, δ .

При $\varepsilon = 0$ система (2.3), (2.6) имеет два решения

$$(2.7) \quad \begin{aligned} R_0' &= -\delta \gamma_1, \quad h = 1, \quad g = 0, \quad \gamma_1 = (A_1 \varphi_1, \varphi_1^*) / (K \varphi_1, \varphi_1^*) \\ R_0' &= -\delta \gamma_2, \quad h = 0, \quad g = \pm 1, \quad \gamma_2 = (A_1 \varphi_2, \varphi_2^*) / (K \varphi_2, \varphi_2^*) \end{aligned}$$

соответствующие ветвям нейтральных кривых $R_*(\alpha), R_*(2\alpha)$.

Характер нейтральных кривых в рассматриваемой задаче позволяет считать $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 < 0$. Эти неравенства соответствуют тому, что с ростом волнового числа α критические значения числа Рейнольдса $R_*(\alpha)$ убывают на левой ветви нейтральной кривой и растут на правой ветви.

Для $\varepsilon > 0$ уравнения (2.6) представим в эквивалентной форме

$$(2.8) \quad R_0' = -\delta(h^2 \gamma_1 + g^2 \gamma_2) + \varepsilon h^2 g (b_1 + b_2)$$

$$(2.9) \quad h[-\delta \gamma g + \varepsilon (b_1 g^2 - b_2 h^2)] = 0$$

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \quad b_1 = R_0 \frac{(B^0(\varphi_1, \varphi_2), \varphi_1^*)_H}{(K \varphi_1, \varphi_1^*)_H}, \quad b_2 = R_0 \frac{(B(\varphi_1, \varphi_1), \varphi_2^*)_H}{(K \varphi_2, \varphi_2^*)_H}$$

Система уравнений (2.3), (2.9) всегда имеет решение $h = 0, g = \pm 1$. Это решение соответствует ответвлению π / α -периодического вторичного течения. Для определения характера ветвления течения Куэтта здесь необходимо рассматривать последующие члены разложений (2.4). Соответствующие построения дают

$$R = R_0 - \delta \gamma_2 + \delta^2 a_1 + \varepsilon^2 a_2 + O(\delta^3, \varepsilon^4)$$

где a_1, a_2 — некоторые постоянные.

Другие решения суть точки пересечения полуокружности (2.3) и кривой второго порядка, определяемой уравнением

$$(2.10) \quad \frac{(g - \delta\gamma/2\epsilon b_1)^2}{(\delta\gamma/2\epsilon b_1)^2} - \frac{\text{sign}(b_1 b_2) h^2}{(\delta\gamma/2\epsilon \sqrt{|b_1 b_2|})^2} = 1$$

Число этих решений и их зависимость от параметров ϵ , δ легко исследуется графически.

Для малых значений $\xi = \epsilon / \delta\gamma$ из (2.3), (2.8), (2.10) имеем

$$(2.11) \quad R_0' = -\delta\gamma_1 - \delta\gamma b_1 b_2 \xi^2 + O(\xi^4)$$

При $b_1 b_2 \neq 0$ из (2.11) следует, что характер ветвления течения Куэтта зависит от знака δ , т. е. для малых $|\alpha - \alpha_0|$ по одну сторону от значения волнового числа α_0 развивается закритический вторичный $2\pi/\alpha$ -периодический режим, по другую сторону — докритический.

Отметим, что в случае $b_1 b_2 = 0$ картина меняется. Можно показать, что развитие $2\pi/\alpha$ -периодического вторичного течения происходит при числах Рейнольдса

$$R = R_0 - \delta\gamma_1 + \delta^2(c_1 + c_2 \xi^2) + O(\delta^3, \xi^4)$$

где c_1 , c_2 — некоторые постоянные. Отсюда следует, что характер ветвления течения Куэтта при малых $|\delta|$ не зависит от знака δ . Этот случай, по-видимому, имеет место в условиях $\rho \rightarrow 1$, $\Omega \rightarrow 1$, для которых доказано [6] существование закритического ветвления при всех α .

Ветвление вторичных режимов движения жидкости происходит при соотношениях параметров $|\delta\gamma / \epsilon b_1| = 1$. Действительно, для малых h при

$$(2.12) \quad |\delta\gamma / \epsilon b_1| = 1 - (1/2 + b_2/b_1)h^2 - (1/8 + b_2/2b_1)h^4 + O(h^6)$$

равенство (2.8) принимает вид

$$(2.13) \quad R_0' = -\delta\gamma_2 + \delta\gamma \frac{b_2}{b_1} h^2 + O(h^4)$$

т. е. при $|\delta\gamma / \epsilon b_1| = 1$ от π/α -периодического течения ответвляется $2\pi/\alpha$ -периодический режим. При этом из (2.11) — (2.13) следует, что ветвления течения Куэтта и π/α -периодического течения имеют противоположный характер.

Таким образом, в зависимости от соотношения величин b_1 , b_2 представляются два основных случая.

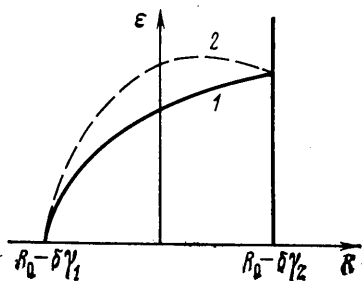
Первый случай: $b_1 b_2 < 0$. При $R = R_0 - \delta\gamma_1$ от течения Куэтта ответвляется $2\pi/\alpha$ -периодическое вторичное течение. Для $\delta > 0$ оно развивается в закритической области и сливается с π/α -периодическим режимом при $R = R_0 - \delta\gamma_2$. Зависимость амплитуды ϵ от числа Рейнольдса R показана на фиг. 1. Сплошная линия 1 соответствует картине ветвления при $1/2 + b_2/b_1 < 0$, линия 2 — при $1/2 + b_2/b_1 > 0$. Картина ветвления для $\delta < 0$ получается заменой R на $-R$ на фиг. 1. При $\delta = 0$ система (2.3), (2.10) несовместна: собственное число $R_*(\alpha_0)$ не является точкой ответвления вторичного потока, отличного от π/α_0 -периодического.

Второй случай: $b_1 b_2 > 0$. Для $\delta \neq 0$ $2\pi/\alpha$ -периодические режимы ответвляются от течения Куэтта при $R = R_0 - \delta\gamma_1$ и от π/α -периодического течения при $R = R_0 - \delta\gamma_2$. Они развиваются соответственно в областях

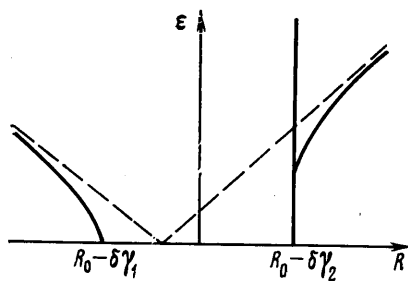
$R < R_0 - \delta\gamma_1$ и $R > R_0 - \delta\gamma_2$ и имеют асимптоты

$$(2.14) \quad \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{1+b_2/b_1}{b_1 b_2}} \left(R - R_0 + \delta\gamma_2 + \delta\gamma_1 \frac{1/2 + b_2/b_1}{1 + b_2/b_1} \right)$$

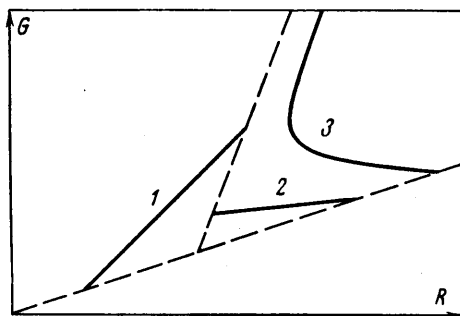
Картина ветвления при $\delta > 0$ показана на фиг. 2. Для $\delta = 0$ бифуркация течения Куэтта описывается прямыми (2.14): при $\alpha = \alpha_0$ от течения Куэтта ответвляется (кроме π/α_0 -периодического течения) пара $2\pi/\alpha_0$ -пе-



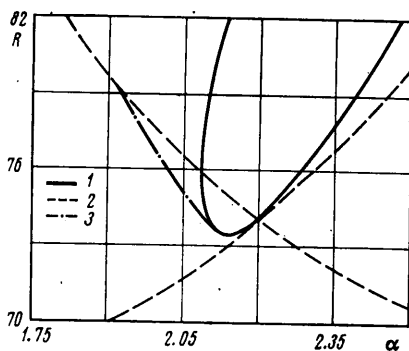
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

риодических режимов. Эти режимы отличаются знаками g . Один из них ответвляется в закритическую область, другой — в докритическую.

3. Расчет вторичных течений. Построение вторичных течений проводится численными методами [7]. Периодические вдоль оси цилиндров решения нелинейных уравнений разыскиваются в виде рядов Фурье. Вычисления выполнены для двух гармоник ($m=2$). Основанием для такого рассмотрения является исследование [7] влияния высших гармоник ($m=3, 4$) на решения с конечными амплитудами. Расчеты проведены для $\rho=2$, $\Omega=0$.

Характеризовать течения будем величиной вращающего момента G (см. [4, 7]). В безразмерной форме

$$G = R \left(1 - \frac{d}{dr} u_{00}(r) \Big|_{r=1} \right)$$

где $U_{00}(r)$ — средняя угловая скорость частицы жидкости.

На фиг. 3 представлены графики вращающего момента G в зависимости от числа Рейнольдса R при различных значениях α . Пунктиром даны линии, соответствующие течению Куэтта и π/α -периодическому режиму.

Для $\alpha > \alpha_0$ от течения Куэтта ответвляются устойчивое $2\pi/\alpha$ -периодическое вторичное течение (линия 1) при $R=R_*(\alpha)$ и π/α -периодический режим при $R=R_*(2\alpha)$. Последний режим неустойчив относительно $2\pi/\alpha$ -периодических возмущений. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса R оба режима существуют одновременно до значения $R_1(\alpha)$. При $R=R_1(\alpha)$ эти режимы сливаются в π/α -периодическое течение, которое продолжает существовать для $R > R_1(\alpha)$. Оно устойчиво относительно $2\pi/\alpha$ - и π/α -периодических возмущений для $R=R_1(\alpha)$ и, следовательно, при малых $R-R_1 > 0$: в точке ветвления (слияния) происходит «обмен» устойчивостью $2\pi/\alpha$ - и π/α -периодических течений.

Здесь и ниже заключения об устойчивости делаются на основе возмущения решений, полученных в виде рядов Ляпунова — Шмидта, и справедливы для малых $|R-R_*|$, или для малых амплитуд. Поэтому полученные выводы об устойчивости верны во всяком случае при малых $|\alpha-\alpha_0|$, где все ветвления наблюдаются при малых амплитудах. Пользуясь случаем, автор благодарит С. Н. Овчинникову, которая обнаружила изменение характера потери устойчивости течения Куэтта и выполнила расчеты устойчивости вторичных течений.

Для малых $\alpha-\alpha_0 < 0$ при $R=R_*(2\alpha)$ от течения Куэтта ответвляется устойчивое π/α -периодическое вторичное течение. С ростом числа Рейнольдса R это течение развивается, и в точке $R=R_1(\alpha)$ от него ответвляется неустойчивый $2\pi/\alpha$ -периодический режим (линия 2). Для чисел Рейнольдса $R > R_1$ π/α -периодическое течение продолжает существовать, а $2\pi/\alpha$ -периодический неустойчивый режим сливается с течением Куэтта при $R=R_*(\alpha)$.

Фиг. 3 показывает, что рассматриваемые значения параметров $\rho=2$, $\Omega=0$ соответствуют первому случаю ветвления, описанному в п. 2. При этом вычисления дают $\alpha_0=2.20$, $R_0=74.2$.

Таким образом, для малых $|\alpha-\alpha_0|$ или для $\alpha > \alpha_0$ имеет место «мягкое» возникновение и развитие вторичных режимов. Здесь всегда устойчив лишь один из обнаруженных режимов: с ростом числа Рейнольдса либо от устойчивого π/α -периодического течения ответвляется неустойчивый $2\pi/\alpha$ -периодический режим, либо устойчивое $2\pi/\alpha$ -периодическое течение сливается с неустойчивым π/α -периодическим режимом, который с момента слияния становится устойчивым.

Если разность $\alpha-\alpha_0 < 0$ не мала, то ситуация меняется. Начиная с некоторых значений α , ветвлений вторичных режимов не обнаружено. Характер развития $2\pi/\alpha$ -периодического вторичного течения при $\alpha=2.00$ изображен на фиг. 2, кривая 3. π/α -Периодический устойчивый режим, ответвляясь при $R=R_*(2\alpha)$, продолжается в закритическую область. $2\pi/\alpha$ -периодическое течение возникает при $R=R_*(\alpha)$ и существует для $R < R_*(\alpha)$. Оно неустойчиво при малых $|R-R_*|$ и продолжается до значений $R=R_2(\alpha)$ — нижнего критического числа Рейнольдса. Дальнейшее развитие этого течения происходит при $R > R_2(\alpha)$, в том числе и при $R > R_*(\alpha)$. Такая ситуация имеет место вплоть до значений $\alpha=\alpha_1=1.92$. Для волновых чисел $\alpha < \alpha_1$ оба режима ответвляются в закритическую область.

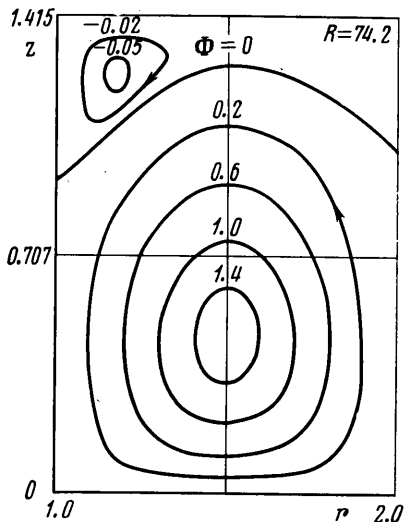
На фиг. 4 изображены линия $R=R_1(\alpha)$ ветвления вторичных режимов (кривая 1), нейтральные кривые $R=R_*(\alpha)$ и $R=R_*(2\alpha)$ (кривые 2), линия $R=R_2(\alpha)$ соответствующая минимальным критическим числам Рейнольдса (кривая 3). Эти линии согласно фиг. 3 определяют зоны одновременного существования одного или пары $2\pi/\alpha$ -периодических вторич-

ных течений и π/α -периодического режима: линии 1–3 описывают характер ветвления на интервалах волновых чисел (2.20, 2.50), (2.08, 2.20), (1.92, 2.08) соответственно.

Эти результаты указывают на существование вихрей Тейлора большой интенсивности (большие амплитуды) для одинаковых чисел Рейнольдса при существенно различных волновых числах, что позволяет предполагать возможность гистерезисных переходов на такие режимы при возмущениях конечной амплитуды.

Отметим, что рассмотренная область волновых чисел α лежит вдали от минимума α_* нейтральной кривой (в условиях п. 3 $\alpha_* = 3.14$, а $\alpha_0 = 2.20$). Для экспериментов в этой области необходимы специальные условия, исключающие возмущения с волновыми числами из соответствующей окрестности α_* .

В заключение опишем переход от $2\pi/\alpha$ -периодического стационарного течения к π/α -периодическому при изменении числа Рейнольдса ($\alpha = 2.22$). Сначала центр вихря в ячейке Тейлора смещается в сторону прямого радиального течения. Обратное радиальное течение слабеет, возникает зона застоя и образуется слабый небольшой вихрь с противоположным направлением вращения (фиг. 5). Его интенсивность и размеры растут. Затем оба вихря становятся равноправными и симметричными — возникает две ячейки Тейлора.



Фиг. 5

Поступила 30 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О бифуркации вращательных течений жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 2.
2. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
4. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. Усп. матем. н., 1972, т. 27, вып. 5.
6. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Устойчивость и бифуркация течения Куэтта в случае узкого зазора между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.
7. Андрейчиков И. П. Расчет вторичного течения между вращающимися цилиндрами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.