

## **УСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ТЕПЛООБМЕНОМ**

**С. А. ГАПОНОВ**

(Новосибирск)

В работе исследуется влияние охлаждения проницаемой поверхности на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на ней. Показано, что в отличие от случая непроницаемой поверхности глубокое охлаждение может понизить критическое число Рейнольдса. В области параметров возмущения обнаружены общие точки непрерывного и дискретного спектров.

1. Проблеме влияния охлаждения поверхности на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на непроницаемых телах посвящено много работ. Первые исследования [1, 2] показали, что охлаждение поверхности повышает устойчивость пограничного слоя. Лизом и Линем (см. [1]) было установлено, что при достаточно сильном охлаждении пограничный слой становится полностью устойчивым относительно двумерных возмущений. Последующие исследования [2] подтвердили этот вывод и показали, что небольшого дополнительного охлаждения достаточно, чтобы увеличить критическое число Рейнольдса трехмерных возмущений до величин, недостижимых в практических условиях.

Указанные выше результаты были получены на основе приближенно-го (асимптотического) метода решения уравнений устойчивости. За последние годы многие из выводов приближенной теории были подтверждены прямыми численными решениями уравнений устойчивости [3-8]. Вместе с тем были получены новые важные результаты. В работе [5] было показано, что при увеличении числа Маха в сверхзвуковом пограничном слое возбуждается несколько неустойчивых частот. Первая (самая низкая) соответствует частоте, исследованной в ранних работах [1, 2, 9]. Вторая неустойчивая частота появляется при  $M=2.2$  (теплоизолированный случай). Оказалось, что охлаждение не оказывает стабилизирующего влияния на вновь обнаруженные частоты.

В [7] предложен численный метод решения задачи о полной стабилизации и проведен расчет во всем диапазоне чисел Маха. Показано, что наряду с неустойчивой частотой, исследованной раньше асимптотическими методами, в пограничном слое может возбудиться вторая неустойчивая частота. Эта частота не принадлежит классу частот, исследованных в [5]. На основании этих исследований можно сделать вывод, что в случае больших сверхзвуковых скоростей результаты расчета критических температур (соответствующих полной стабилизации первой частоты) подтвердили выводы [2]. В случае больших сверхзвуковых скоростей показана неприменимость метода расчета, использованного в [2].

Влияние проницаемости поверхности на устойчивость пограничного слоя исследовалось только в случае дозвуковых скоростей [10-12]. Полученные в этих работах результаты указывают на сильное влияние пористости материала на устойчивость пограничного слоя. Совместное влия-

ние охлаждения и проницаемости до настоящего времени не исследовалось.

2. Устойчивость пограничного слоя рассматривалась относительно бесконечно малых возмущений вида  $q(y)\exp[i\alpha(x-ct)]$ , амплитуды которых удовлетворяют уравнениям [2]. Другие упрощения — линейная зависимость динамической вязкости от температуры, равенство числа Прандтля единице — связаны в основном с расчетами стационарного пограничного слоя. Такое рассмотрение упрощает программирование и уменьшает расход машинного времени, не отражаясь существенно на результатах. Известно [9], что влияние числа Прандтля в пределах 0.72–1.0 и различных законов для зависимости вязкости от температуры слабое (особенно для небольших сверхзвуковых скоростей) и оно касается только абсолютных (количественных) значений характеристик устойчивости. В данной работе проведено тщательное исследование только для двумерных возмущений. Задача о трехмерных возмущениях в математическом отношении может быть сведена к двумерному случаю аналогично [1, 2].

Система уравнений [2], описывающая устойчивость сверхзвукового пограничного слоя относительно двумерных возмущений, имеет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \rho[i\alpha(U-c)f + U'\alpha\Phi] + i\alpha\pi/\kappa M^2 &= f''\mu/R \\ \rho i\alpha^2(U-c)\Phi + \pi'/\kappa M^2 &= \Phi''\mu/R \\ \rho[i\alpha(U-c)\theta + T'\alpha\Phi] + (\gamma-1)(i\alpha f + \alpha\Phi') &= \theta''\kappa\mu/R \\ i\alpha(U-c)r + \rho'\alpha\Phi + \rho(i\alpha f + \alpha\Phi') &= 0 \\ \pi/p &= r/\rho + \theta/T \end{aligned}$$

Здесь  $U$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $p$  — стационарные распределения продольной скорости, температуры, плотности, вязкости, давления ( $p$  постоянно);  $f$ ,  $\alpha\Phi$ ,  $\pi$ ,  $r$ ,  $\theta$  — амплитуды возмущений продольной и нормальной скоростей, давления, плотности и температуры;  $\alpha c$  — волновое число и фазовая скорость возмущения;  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $R$  — показатель адиабаты, число Прандтля и число Рейнольдса. Система (2.1) записана в безразмерном виде. В качестве характерных величин приняты параметры потока на внешней границе пограничного слоя и толщина пограничного слоя  $\delta$ .

В [13] показано, что для большинства металлических покрытий возмущения температуры на поверхности равны нулю. Если поверхность проницаема только в нормальном к ней направлении, а диаметры пор малы, оправдано предположение работ [10, 11] о равенстве нулю продольной составляющей возмущения скорости и пропорциональности возмущений нормальной скорости возмущениям давления на поверхности. Дополнительные граничные условия следуют из предположения о затухании возмущений в бесконечности.

Таким образом

$$(2.2) \quad f(0) = \theta(0) = 0, \quad \alpha\Phi(0) + K\pi(0)/\gamma M^2 = 0$$

$$(2.3) \quad f(\infty) = \theta(\infty) = \Phi(\infty) = 0$$

Аналогично [11] коэффициент  $K$  берется в виде

$$(2.4) \quad K = nZ^{-1} [Z_0 - X_1 \operatorname{th}(\lambda H)] [Z_0 \operatorname{th}(\lambda H) - X_1]^{-1}$$

Здесь  $n$  — пористость,  $\lambda = (Z_1 Y_1)^{1/2}$ ,  $Z_0 = Z_1/\lambda$ ,  $X$  — коэффициент пропорциональности между возмущениями давления и нормальной составляющей скорости под пористым покрытием (см. [11]).

Величины  $Z_1$ ,  $Y_1$  определяются равенствами

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Z_1 &= i\alpha c \frac{I_0(\sqrt{i\alpha c R r_1/T_w})}{I_2(\sqrt{i\alpha c R r_1/T_w})} \\ Y_1 &= -i\alpha c \frac{M^2}{T_w} \left[ \kappa + (\kappa - 1) \frac{I_2(\sqrt{i\alpha c R \alpha r_1/T_w})}{I_0(\sqrt{i\alpha c R \alpha r_1/T_w})} \right] \end{aligned}$$

Соотношения (2.5) отличаются от аналогичных выражений в [11] наличием в знаменателях аргумента функций Бесселя и  $Y_1$  температуры стенки  $T_w$ . Это связано с тем, что вязкость ( $\nu \sim T^2$ ) и скорость звука ( $a \sim \sqrt{T}$ ), входящие в соотношения работы [11], берутся при температуре поверхности. В (2.5) параметры  $M$ ,  $R$  и другие составлены на основании свойств потока на внешней границе пограничного слоя.

Величина  $X_1$  может принимать различные значения в зависимости от характеристик среды под проникаемым покрытием. Ниже приведено соотношение для  $X_1$  в случае, когда под пористым покрытием находится объем (например, камера отсасывания) покоящегося газа того же состава, что и в пограничном слое. Принимается, что  $T_w$  — температура газа,  $L$  — линейный размер камеры в  $y$ -направлении, противоположная стенка камеры относительно пористой непроницаема. Решая уравнения устойчивости в области этого объема, можно получить линейную связь между возмущениями давления и нормальной составляющей скорости и определить  $X_1$ . Для больших значений  $\alpha R$  хорошо выполняется равенство

$$(2.6) \quad X_1 = i\alpha c/nT_w \gamma \operatorname{th}(\gamma L), \quad \gamma = \alpha \sqrt{1 - M^2 c^2/T_w}$$

Соотношение (2.6) показывает, что при  $M^2 c^2/T_w > 1$  величина  $X_1$  обращается в бесконечность при  $i\gamma L = k\pi$  ( $k$  целое,  $i = \sqrt{-1}$ ), а величина  $K$  определяется формулой

$$(2.7) \quad K = (n/Z_0) \operatorname{th}(\lambda H)$$

Если  $i\gamma L = (k + 1/2)\pi$ , то  $X_1 = 0$ , а

$$(2.8) \quad K = n/Z_0 \operatorname{th}(\lambda H)$$

Хотя предельные соотношения (2.7) и (2.8) справедливы в дискретном числе точек, в реальных ситуациях ими можно пользоваться более часто. Для рассматриваемой в данной работе задачи, когда диаметры пор малы, имеет место неравенство  $[Z_0] \ll 1$ , поэтому будет оправдано использование (2.8) при расчете  $K$ .

Если реальная часть  $\lambda H$  велика, то  $\operatorname{th}(\lambda H) \approx 1$ , выражения (2.7) и (2.8) совпадают и имеют вид

$$(2.9) \quad K = n/Z_0$$

Следует отметить, что значение  $K$ , определяемое соотношениями (2.7) — (2.9), зависит только от частоты возмущения

$$(2.10) \quad \omega = \alpha c/R$$

Это можно показать, используя (2.10), выражения для  $Z_0$  и  $\lambda H$  и введя в рассмотрение два числа Рейнольдса

$$(2.11) \quad R_a = R r_1 = U_\infty a/\nu_\infty, \quad R_h = R H = U_\infty h/\nu_\infty$$

Здесь  $a$  — радиус пор,  $h$  — длина поры (толщина пористого покрытия).

3. Расчеты по влиянию охлаждения проницаемой поверхности на устойчивость пограничного слоя на ней проведены для случая  $M=1.6$ ,  $\sigma=1.0$ ,  $\kappa=1.4$ ,  $R_a=50$ ,  $n=3$  с использованием соотношения (2.8).

Исследование влияния охлаждения на устойчивость пограничного слоя на непроницаемой поверхности при  $M=1.6$  проводилось в [2]. Было показано, что при  $T_w=1.073$  пограничный слой полностью устойчив относительно двумерных возмущений.

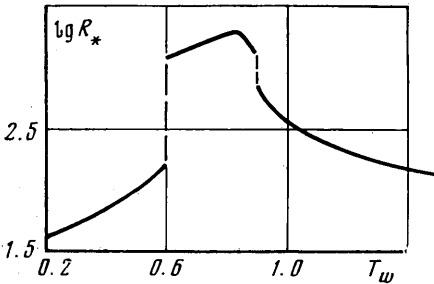
Согласно проведенным в данной работе исследованиям в случае проницаемой поверхности полная стабилизация охлаждением не достигается.

Это видно из приведенных на фиг. 1–3 результатов. Число Рейнольдса  $R$  построено по толщине

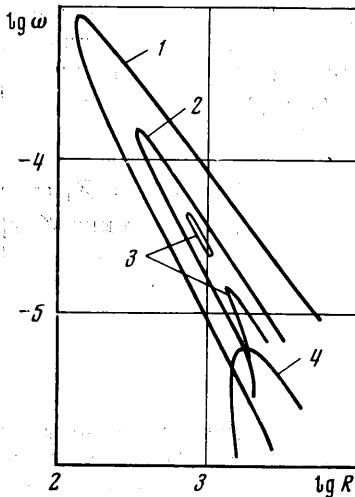
$$(3.1) \quad \delta = \sqrt{2\nu_\infty X/U_\infty}$$

Здесь  $X$  — расстояние от передней кромки пластины.

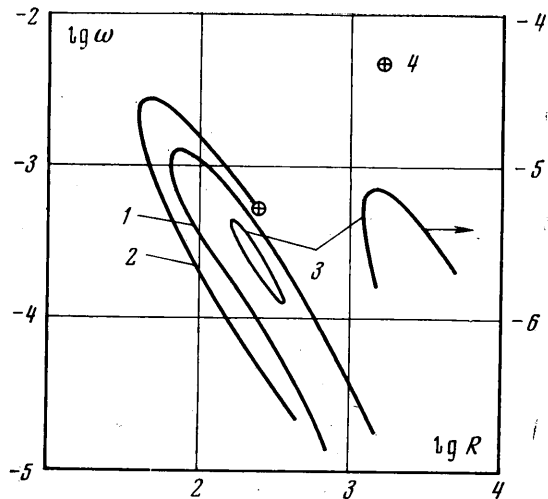
На фиг. 1 показана зависимость критических чисел  $R_*$  (минимальные значения  $R$ , соответствующие потере



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

устойчивости). Видно, что во всем диапазоне температур  $T_w$  значения  $R_*$  не обращаются в бесконечность, т. е. пограничный слой полностью не стабилизируется охлаждением даже в случае двумерных возмущений. Более того, в области низких температур наблюдается понижение устойчивости с охлаждением поверхности.

Результаты, приведенные на фиг. 1, показывают резкое увеличение  $R_*$  вблизи  $T_w \approx 0.9$  и уменьшение вблизи  $T_w = 0.6$ . Это явление хорошо объясняется кривыми нейтральной устойчивости, приведенными на фиг. 2 и 3. Кривым 1–4 на фиг. 2 соответствуют значения  $T_w = 1.5, 1.0, 0.9, 0.7$ , кривым 1–3 на фиг. 3 —  $T_w = 0.2, 0.387, 0.603$ . При  $T_w = 0.9$  происходит раздвоение кривой нейтральной устойчивости: одна из них замкнута и быстро исчезает при дополнительном охлаждении, вторая, с большим значением  $R_*$ , продолжает существовать в промежутке  $0.6 < T_w < 0.9$ . Вбли-

зи  $T_w=0.6$  вновь появляется замкнутая кривая нейтральной устойчивости. С понижением  $T_w$  замкнутая область неустойчивости расширяется и смыкается с незамкнутой. Сформированная таким образом кривая нейтральной устойчивости движется в область более низких значений  $R$  с понижением  $T_w$ .

В отношении приведенных результатов нужно отметить следующее. Для низких значений  $R$  (в областях  $T_w > 0.9$ ,  $T_w < 0.6$ )  $\omega$  достаточно велико для выполнения приближенного равенства  $\text{th}(\lambda H) \approx 1$  и  $K$  не зависит от  $X_1$ . Для больших значений  $R_*$  (в области  $0.6 < T_w < 0.9$ ) выполнялись неравенства  $M^2 c^2 / T_w < 1$ ,  $|X_1| < |Z|$  и в определенном смысле оправдано использование (2.8) при вычислении  $K$ .

Второй результат, полученный в данной работе, состоит в том, что на проницаемой поверхности при охлаждении в области параметров устойчивости существуют общие точки непрерывного (возмущения не равны нулю при  $y = \infty$ ) и дискретного (возмущения равны нулю при  $y = \infty$ ) спектров. Такая точка была обнаружена для случая  $T_w = 0.2$  и обозначена на фиг. 3 цифрой 4. В этой точке фазовая скорость распространения возмущений  $c = 1 - 1/M$ . Этот вывод может оказаться более общим и иметь место не только в случае пограничного слоя на проницаемой поверхности.

Наличие общей точки непрерывного и дискретного спектров при конечных значениях  $R$  может играть важную роль во взаимодействии внешних возмущений с колебаниями внутри пограничного слоя и для перехода решения из непрерывного спектра в решение из дискретного спектра. Впервые попытка продолжить решение, соответствующее непрерывному спектру, в область более высоких значений  $R$  как решение дискретного спектра сделана в [5]. Однако там вопрос о существовании обнаруженных в данной работе точек не исследовался и построенные решения (как функции продольной координаты) при значении  $x$ , соответствующем нейтральной устойчивости относительно дискретного спектра, терпят разрыв.

Таким образом, проведенные в работе исследования показывают, что охлаждение проницаемой поверхности может как повысить, так и понизить устойчивость пограничного слоя. В сверхзвуковом пограничном слое могут существовать в области параметров устойчивости общие точки непрерывного и дискретного спектров при конечных значениях чисел Рейнольдса.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Университета Западного Онтарио в Канаде. Автор благодарен заведующему кафедрой профессору Д. Блеквеллу за предложение исследовать эту проблему.

Поступила 22 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Dunn D. W., Lin C. C. On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 7.
3. Mack L. M. Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer. In: Methods Computat. Phys., vol. 4. New York — London, Acad. Press., 1965.
4. Brown W. B. Stability of compressible boundary layers. AIAA Journal., 1967, vol. 5, No. 10.
5. Mack L. M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary — layer transition. AIAA Journal., 1975, vol. 13, No. 3.
6. Гапонов С. А., Маслов А. А. Устойчивость сжимаемого пограничного слоя при дозвуковых скоростях. Изв. СО АН СССР, 1971, № 3. Сер. техн. н., вып. 1.
7. Гапонов С. А., Маслов А. А. Численное решение задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя. ПМТФ, 1972, № 2.
8. Маслов А. А. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя по отношению к трехмерным возмущениям. ПМТФ, 1974, № 1.

9. *Van Drist E. R.* Calculation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid on a flat plate with heat transfer. *J. Aeronaut. Sci.*, 1952, vol. 19, No. 12.
  10. *Гапонов С. А.* Влияние свойств пористого покрытия на устойчивость пограничного слоя. *Изв СО АН СССР*, 1974, № 3, Сер. техн. н., вып. 1.
  11. *Гапонов С. А.* Влияние сжимаемости газа на устойчивость пограничного слоя над проницаемой поверхностью при дозвуковых скоростях. *ПМТФ*, 1975, № 1.
  12. *Burden H. W.* Effect of wall porosity on the stability of parallel flows over compliant boundaries. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, Ser. 2, 1973, vol. 18, No. 11.
  13. *Дрыжов А. С., Маслов А. А.* О граничных условиях для температурных возмущений в задачах устойчивости течений сжимаемого газа. *Изв. СО АН СССР*, 1972, № 8, Сер. техн. н., вып. 2.
-