

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Т. П. ЛЮБИМОВА

(Пермь)

В настоящее время приобретает актуальность изучение конвективных явлений в средах, обладающих свойством вязкопластичности. В работах [1, 2] исследовалась конвекция вязкопластичной среды Бингама – Шведова в плоском вертикальном слое. Работа [3] посвящена исследованию конвективного пограничного слоя в бингамовском пластике около нагретого вертикального цилиндра. Однако в этих работах рассматривалось одномерное [1, 2] или почти одномерное [3] течение. При исследовании существенно неоднородного конвективного движения вязкопластичной среды в замкнутой полости задача сильно усложняется. Модель Бингама – Шведова не позволяет единым образом описать конвективное движение во всей полости. Известные трудности связаны с определением границы раздела зон квазитвердого и вязкопластического течений. В этом случае представляется целесообразным применять реологические модели, которые, сохраняя физически важное свойство вязкопластичных сред – резкое уменьшение текучести при малых скоростях деформации, являются в то же время аналитическими. Особенно интересны реологические модели, которые допускают предельный переход к модели Бингама – Шведова. Этим требованиям удовлетворяет модель Уильямсона [4].

Реологическое уравнение жидкости Уильямсона для случая пространственного движения имеет вид

$$(0.1) \quad \tau_{ik} = \left(\mu_{\infty} + \frac{\tau_0'}{\alpha' + \sqrt{I_2}} \right) e_{ik}, \quad e_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad I_2 = \frac{1}{2} e_{ik} e_{ik}$$

Здесь τ_{ik} – тензор вязких напряжений, e_{ik} – тензор скоростей деформации, I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформации, μ_{∞} , τ_0' , α' – реологические постоянные; μ_{∞} имеет смысл вязкости при больших скоростях деформации; смысл начальной вязкости имеет комбинация $(\mu_{\infty} + \tau_0'/\alpha')$. При $\alpha' \rightarrow 0$ и $\tau_0' > 0$ уравнение (0.1) переходит в реологическое уравнение бингамовского пластика, при этом τ_0' играет роль предельного значения второго инварианта тензора напряжений, соответствующего предельному напряжению сдвига в случае одномерного течения. В пределе $\tau_0' \rightarrow 0$ получаем реологическое уравнение ньютоновской жидкости.

Можно отметить, что многие реальные вязкопластичные среды, по-видимому, лучше описываются моделью Уильямсона, чем моделью Бингама – Шведова. В действительности часто можно говорить о пренебрежении существующими при малых напряжениях скоростями деформации, а не о полном отсутствии течения.

В работе [5] проведено исследование плоскопараллельной конвекции жидкости Уильямсона между вертикальными параллельными плоскостями при подогреве снизу. Цель работы – «опробование» реологической модели на конвективной задаче, которая хорошо изучена для ньютоновской жидкости [6] и для среды Бингама – Шведова [1]. Проведенное исследование позволило сделать вывод о возможности применения реологической модели Уильямсона для описания конвективных явлений в вязкопластичных средах. В настоящей работе с помощью реологической модели Уильямсона исследуется конвекция вязкопластичной жидкости в замкнутой области.

1. Рассмотрим конвективное движение жидкости Уильямсона в горизонтальном цилиндре квадратного сечения при нагреве сбоку. Будем решать плоскую задачу в квадратной области, ограниченной вертикальными прямыми $x=0$ и $x=l$ и горизонтальными $y=0$ и $y=l$. На вертикальных границах заданы постоянные (разные) температуры. На горизонтальных участках температура меняется по линейному закону.

Введем функцию тока ψ и вихрь скорости φ , определяемые соответственно соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\varphi = \text{rot}_z \mathbf{v} = -\Delta \psi$$

Запишем уравнения конвекции жидкости Уильямсона в переменных функции тока ψ , вихря скорости φ и температуры T в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \frac{1}{P} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = H \Delta \varphi + R \frac{\partial T}{\partial x} +$$

$$+ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} -$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta T, \quad \varphi = -\Delta \psi$$

$$(1.3) \quad H = 1 + \tau_0 \left[\alpha + \sqrt{4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2} \right]^{-1}$$

На границе полости выполняется условие прилипания и задана температура:

$$(1.4) \quad \psi|_r = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_r = 0$$

$$T=0 \quad (x=0), \quad T=1 \quad (x=1)$$

$$T=x \quad (y=0), \quad T=y \quad (y=1)$$

В качестве единиц измерения выбраны следующие величины: для длины — сторона квадрата l , для времени — l^2/χ (χ — коэффициент температуропроводности), для функции тока — χ , для вихря скорости — χ/l^2 , для температуры — характерная разность температур Θ , для напряжения — $\mu_\infty \chi/l^2$. Задача содержит следующие параметры: число Рэлея $R = g\beta\Theta l^3/\nu\chi$, число Прандтля $P = \nu/\chi$ (здесь $\nu = \mu_\infty/\rho$, β — коэффициент теплового расширения), а также безразмерные реологические параметры $\tau_0 = \tau_0' l^2/\mu_\infty \chi$ и $\alpha = \alpha' l^2/\chi$.

Задача решалась численно методом сеток. Стационарные решения получались с помощью стационарной конечно-разностной схемы и по методу установления с использованием неявной схемы продольно-поперечной прогонки. В качестве начальных состояний брались распределения функции тока, соответствующие одновихревому движению в полости. Начальные распределения температуры соответствовали неподвижной прогретой боку жидкости.

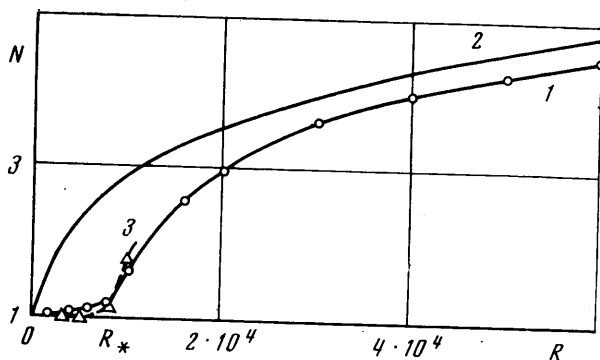
Все пространственные производные, входящие в уравнения, аппроксимировались центральными разностями. Граничные значения для φ получались из разложения φ в ряд около граничной точки с сохранением членов до второго порядка включительно. Схема имела порядок аппроксимации $O(h^2)$, где h — пространственный шаг сетки. Основные вычисления были проведены на равномерной сетке 16×16 , проверочные вычисления — на сетке 20×20 . Сравнение показывает, что различие в интегральных характеристиках не превышает 3%.

Расчеты проводились при фиксированном значении числа Прандтля $P=10$ для следующих значений реологических параметров (τ_0, α) : (10, 1), (100, 5), (250, 5), (250, 2.5). Число Рэлея варьировалось в интервале $0 \div 2 \cdot 10^5$.

Кроме полей функции тока, вихря и температуры в ходе расчетов определялись интегральные характеристики течения — экстремальное значение функции тока ψ_m , которое может служить мерой интенсивности движения, а также безразмерный тепловой поток — число Нуссельта N

$$(1.5) \quad N = \int_{\Gamma_+} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\Gamma} dl$$

Здесь нормальная составляющая градиента температуры интегрируется по той части Γ_+ общей границы Γ , где плотность теплового потока направлена внутрь области. Соответственно может быть определен и тепловой поток, выходящий из полости. В стационарном состоянии, очевидно,



Фиг. 1

эти потоки одинаковы. Тепловой поток также может служить мерой интенсивности конвективного течения.

По известным полям скорости можно условно определить области квазитвердого и вязкопластического течений. В качестве условия, выделяющего квазитвердую зону, можно принять

$$(1.6) \quad \sqrt{T_2} < \tau_0, \quad T_2 = 1/2 \tau_{ik} \tau_{ik} = H^2 I_2$$

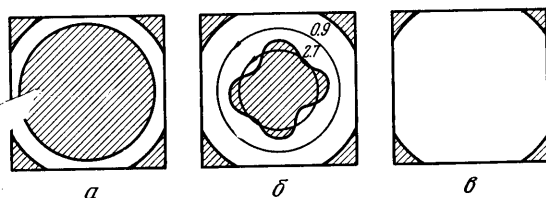
где T_2 , I_2 — вторые инварианты безразмерных тензоров напряжений и скоростей деформации, функция H определена равенством (1.3). Очевидно, что неравенство (1.6) строго определяет квазитвердую зону лишь в предельном случае среды Бингама — Шведова, т. е. при малых значениях параметра α .

2. Перейдем к обсуждению численных результатов. На фиг. 1 изображена зависимость безразмерного теплового потока от числа Рэлея для жидкости Уильямсона с параметрами $\tau_0=250$, $\alpha=5$ (кривая 1); для сравнения на той же фигуре (кривая 2) приведена зависимость $N(R)$ для ньютоновской жидкости ($\tau_0=0$). Видно, что при числах Рэлея, меньших некоторого значения R_* , тепловой поток близок к единице — конвективное движение в полости почти отсутствует. В области $R \sim R_*$ происходит резкое нарастание интенсивности движения и теплопотока. При R , значительно превышающих R_* , тепловой поток приближается к значениям, соответствующим ньютоновской жидкости.

Поскольку жидкость Уильямсона обладает хотя и малой, но ненулевой начальной текучестью, конвективное движение в ней при нагреве сбоку должно существовать при сколь угодно малых числах Рэлея. С другой стороны, поскольку реологические свойства жидкости Уильямсона близки к реологическим свойствам среды Бингама — Шведова, то, очевидно,

что интенсивность конвекции будет мала до тех пор, пока напряжения в жидкости, вызванные неоднородностью температуры, не достигнут значения, соответствующего бингамовскому пределу текучести. При переходе к среде Бингама — Шведова ($\alpha \rightarrow 0$) амплитуда конвективного движения при числе Рэлея $R < R_*$ стремится к нулю. В случае среды Бингама — Шведова число Рэлея R_* пороговое: конвективное движение при $R < R_*$ отсутствует.

Для случаев простой геометрии полости удастся определить пороговое значение числа Рэлея, при котором возникает конвективное движение вязкопластичной среды при нагреве сбоку. Рассмотрим конвективное движение среды Бингама — Шведова в горизонтальном цилиндре квадратного сечения при нагреве сбоку. Естественно предположить, что конвективное движение, возникающее при $R = R_*$, имеет узкую кольцевую зону вязкопластического течения. Это тонкое круговое кольцо вписано в квад-



Фиг. 2

ратную область и отделяет центральную квазитвердую область от угловых застойных зон. Приравнивая моменты сил трения и подъемных (конвективных) сил, можно получить соотношение

$$2\pi a^2 \tau = \frac{1}{4} R \pi a^4$$

($a = \frac{1}{2}$ — радиус тонкого вязкопластичного кольца). Отсюда находим соотношение между предельным значением второго инварианта тензора напряжений и пороговым числом Рэлея

$$(2.1) \quad R_* = 32\tau_0$$

Жидкости Уильямсона с данным τ_0 при $\alpha \rightarrow 0$ соответствует вязкопластичная среда Бингама — Шведова с предельным значением второго инварианта тензора напряжений, равным τ_0 . Если $\tau_0 = 250$ (этому значению соответствует кривая 1 на фиг. 1), то пороговое число Рэлея $R_* = 8 \cdot 10^3$. На фиг. 1 это значение отмечено на оси R . Видно, что как раз в этой области значений числа Рэлея происходит резкое увеличение интенсивности конвекции жидкости Уильямсона. Таким образом, численные результаты согласуются с формулой (2.1); согласие имеет место и для других значений τ_0 .

Точки полости, в которых выполнено неравенство (1.6), условно считались принадлежащими квазитвердым зонам. На фиг. 2 показано расположение квазитвердых зон для различных чисел Рэлея при $\tau_0 = 250$, $\alpha = 5$.

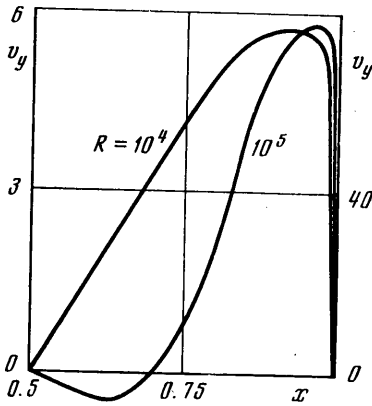
Расчеты показывают, что при числах Рэлея, меньших R_* , вся полость является квазитвердой зоной, в которой почти отсутствует течение.

При числе Рэлея $R = R_*$ значения $\sqrt{T_2}$ в узком кольцевом слое, касающемся границ полости, достигают предельного значения — появляется зона вязкопластического течения (фиг. 2, а). Область внутри жидкого кольца представляет собой зону квазитвердого вращения — значения $\sqrt{T_2}$

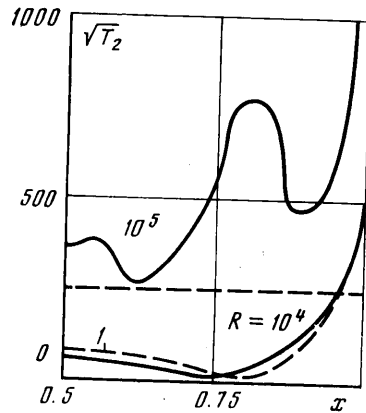
в ней меньше предельного. Вблизи углов напряжения минимальны — жидкость почти неподвижна.

С повышением числа Рэлея размеры зоны вязкопластического течения растут за счет уменьшения размеров зоны квазитвердого вращения и застойных зон вблизи углов. На фиг. 2, б показана структура квазитвердых зон при числе Рэлея $R=1.6 \cdot 10^4$. На той же фигуре изображены линии тока. Граница зоны квазитвердого вращения, как видно из рисунка, не является теперь линией тока. При стационарном движении жидкости граница зоны квазитвердого вращения остается неизменной, но образуется она в различные моменты времени разными частицами жидкости. Жидкость как бы прилипает к задней (по отношению к направлению движения жидкости) кромке зоны и отрывается от передней кромки.

При дальнейшем увеличении числа Рэлея зона квазитвердого вращения уменьшается в размерах, разбивается на отдельные зоны и исчезает



Фиг. 3



Фиг. 4

совсем. Уже при числе Рэлея $R=2 \cdot 10^4$ зоны квазитвердого вращения отсутствуют (фиг. 2, в); сохраняются лишь застойные зоны в углах.

При высоких числах Рэлея вся полость, за исключением очень малых окрестностей углов, является зоной вязкопластического течения. Как и в ньютоновской жидкости [1], движение имеет погранслоный характер. Образуется замкнутый пограничный слой и относительно малоподвижное ядро с двумя вихрями и областью слабого возвратного течения. Расчеты показывают, что градиенты скорости и напряжения в ядре все же достаточно велики — больше предельного.

На фиг. 3 приведены профили вертикальной составляющей скорости v_y в сечении $y=1/2$ в области $R \sim R_*$ ($R=10^4$, шкала слева) и в области чисел Рэлея, значительно превышающих R_* ($R=10^5$, шкала справа). При $R=10^4$ значения v_y быстро нарастают от нуля до максимального значения в узком слое вблизи стенки. Здесь градиенты скорости и напряжения максимальны, и имеет место вязкопластическое течение. В центральной части полости происходит квазитвердое вращение: компонента скорости v_y меняется линейно с x .

При числе Рэлея $R=10^5$ профиль скорости имеет вид, характерный для погранслоного движения; зона квазитвердого вращения отсутствует.

На фиг. 4 приведены распределения второго инварианта тензора напряжений в сечении $y=1/2$ для тех же значений числа Рэлея. Горизонтальный пунктир соответствует предельному напряжению τ_0 . Напряжения максимальны на стенках полости. При $R=10^5$ вдоль всего сечения $y=1/2$ напряжения больше предельного.

Как уже говорилось выше, переход к среде Бингама — Шведова наступает по мере уменьшения параметра α . На фиг. 1 рядом с кривой 1, соответствующей значениям параметров $\tau_0=250$, $\alpha=5$, показана зависимость $N(R)$ (кривая 3) для того же значения τ_0 и вдвое меньшего значения $\alpha=2.5$. Как видно, кривые в общем близки; с уменьшением α наблюдается более резкое изменение теплоточка с R в области $R \sim R_*$. Следует заметить, что с уменьшением α резко возрастает время установления стационарного режима (или количество итераций, необходимое для получения установившегося режима по стационарной схеме).

На фиг. 4 пунктиром показано распределение напряжений при $\tau_0=250$ и $\alpha=2.5$ (кривая 1). Как видно, уменьшение вдвое параметра α практически не влияет на положение границы квазитвердой зоны.

Расчеты, проведенные для других значений τ_0 , показали, что характер возникновения конвективного движения, структура квазитвердых зон, качественный вид зависимостей $\psi_m(R)$ и $N(R)$ не меняются с изменением предельного напряжения. В частности, и при других значениях τ_0 подтверждается формула (2.1) для определения R_* .

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что модель Уильямсона может быть эффективно применена для изучения конвективных вязкопластических течений в замкнутой области.

Автор благодарит Г. З. Гершуни за руководство работой.

Поступила 28 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной устойчивости жидкости Бингама. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 1.
2. Янг Вен-ей, Е. Су-чень. Свободная конвекция пластика Бингама между двумя вертикальными пластинами. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Теплопередача, 1965, т. 87, № 2.
3. Шульман З. П., Байков В. И., Зальцгендлер Э. А. Тепло- и массообмен при свободной конвекции в неньютоновских жидкостях. Минск, «Наука и техника», 1975.
4. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
5. Любимова Т. П., Лобов Н. И., Любимов Д. В. Конвективная устойчивость жидкости Уильямсона в вертикальном слое. Сб. «Гидродинамика», вып. 8. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1976, № 362.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.