

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА РАЗВИТИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

Н. И. АКАТНОВ

(Ленинград)

Учет влияния турбулизации на развитие струи рассматривался в работах [1-3]. В настоящей работе используется метод, отличающийся тем, что масштаб турбулентности внешнего потока предполагается значительно большим масштаба турбулентности в струе или в слое смешения. Используя это допущение, можно решать отдельно уравнения баланса энергии для турбулентности внешнего потока и турбулентности струи. Решения, полученные на основании этого предположения, находятся в качественном согласии с опытными данными.

1. Для описания изотермического турбулентного течения в плоской струе или в слое смешения используем систему уравнений в виде

$$(1.1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_E \frac{du_E}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(1.2) \quad u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} = \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial e}{\partial y} \right) - W$$

Здесь  $u, v$  — проекции средней скорости на оси  $x, y$ ;  $\varepsilon$  — коэффициент турбулентной вязкости в выражении для касательного напряжения трения  $\tau_{xy} = \rho \varepsilon \partial u / \partial y$ ;  $e = \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle / 2$  — среднекинетическая энергия турбулентности единицы массы жидкости;  $u', v', w'$  — проекции пульсационной составляющей скорости на оси  $x, y, z$ ;  $W$  — диссипация турбулентности в тепло за счет сил вязкости;  $u_E$  — скорость спутного потока. Величины  $\varepsilon$  и  $W$ , необходимые для замыкания системы уравнений, выразим согласно гипотезам Колмогорова соотношениями

$$(1.3) \quad \varepsilon = \sqrt{e} L$$

$$(1.4) \quad W = e \sqrt{e} / L$$

Здесь  $L$  — масштаб турбулентности. Если рассматривать соотношения (1.3), (1.4) как чисто формальные, то в этом случае они лишь заменяют задачу об определении величин  $\varepsilon$  и  $W$  задачей определения масштаба турбулентности  $L$ . Масштаб  $L$ , который в струйных течениях может считаться постоянным в данном сечении струи, будем разыскивать с помощью соображений размерности.

В качестве характерных величин, определяющих осредненное движение, выберем максимальную производную  $(\partial u / \partial y)_m$  и толщину струи, которую можно определить как  $\delta_1 = \Delta u_m / (\partial u / \partial y)_m$ , где  $\Delta u_m = u_{\max} - u_{\min}$ . Здесь  $u_{\max}$  и  $u_{\min}$  — максимальная и минимальная скорости в данном сечении струи. Поскольку учитывается баланс энергии пульсационного движения, добавим еще две характерные величины:  $\sqrt{e_m}$ , где  $e_m$  — максимальное значение  $e$  в данном сечении, и  $\delta_2$  — толщину области пульсационного движения. Согласно  $\pi$ -теореме теории размерности из пяти (включая  $L$ ) ки-

нематических величин можно образовать три независимых безразмерных комплекса. Обозначив  $\sqrt{e_m}/(\partial u/\partial y)_m = l_i$ , выражения для  $L$  можно представить в виде

$$(1.5) \quad L = l_1 f_1(\delta_1/\delta_2, l_1/\delta_1)$$

$$(1.6) \quad L = \delta_1 f_2(\delta_1/\delta_2, l_1/\delta_2)$$

$$(1.7) \quad L = \delta_2 f_3(\delta_1/\delta_2, l_1/\delta_1)$$

При подстановке (1.5)–(1.7) в (1.3), (1.4) функции  $f_i$  играют роль эмпирических коэффициентов, которые чаще всего считаются постоянными. Однако непосредственная проверка, а также результаты некоторых работ [4, 5] показывают, что ни одно из соотношений (1.5)–(1.7) при подстановке в (1.3) не обеспечивает одинаковости  $f_i$  даже для основных наиболее простых случаев струйных течений.

Вместе с тем использование (1.5) в (1.3) для разных течений указывает на зависимость  $f_1$  от  $\delta_1/\delta_2$ . Исходя из этого, а также заменяя отношение  $\sqrt{e_m}/(\partial u/\partial y)$  средним значением отношения  $\sqrt{e}/(\partial u/\partial y)_m$  на толщине  $\delta_1$  (эта величина более удобна для дальнейших обобщений), примем выражение для  $\varepsilon$  в виде

$$(1.8) \quad \varepsilon(x, y) = \gamma (\delta_1/\delta_2)^n \left( \frac{1}{\delta_1} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{e}}{(\partial u/\partial y)} dy \right) \sqrt{e}$$

Здесь  $\gamma$ ,  $n$  — эмпирические коэффициенты,  $y_1$ ,  $y_2$  — координаты  $y$  точек в данном сечении струи, где  $u - u_{\min} = 0.1\Delta u_m$  и  $u - u_{\min} = 0.9\Delta u_m$ ,  $\delta_1 = y_1 - y_2$ ,  $\delta_2 = y_3 - y_4$ ,  $y_3$ ,  $y_4$  — координаты  $y$  точек, в которых  $e/e_m = 0.05$ . Применяя (1.8) для описания струйных течений с простыми профилями скорости, производную  $\partial u/\partial y$  под знаком интеграла можно заменить средним значением  $0.8\Delta u_m/\delta_1$  и вынести из-под знака интеграла. В случае осесимметричного течения осреднение  $\sqrt{e}/(\partial u/\partial y)$  в (1.8) следует проводить по кольцу шириной  $\delta_1$ .

Подстановка (1.7) в (1.4) приводит к выражению

$$(1.9) \quad W = c e \sqrt{e_m}/\delta_2$$

Здесь  $c = f_3^{-1}$ . Как показано в [6, 7], при использовании  $\delta_2$  в (1.9) коэффициент  $c$  несколько меняется от случая к случаю, но в небольших пределах, и для него может быть подобрано универсальное значение. Система (1.1), (1.2) в совокупности с (1.8), (1.9) становится замкнутой и при использовании ее для описания плоской и круглой струй, слоя смещения и плоского следа при хорошем согласии профилей скорости, энергии турбулентности и напряжения трения эмпирические коэффициенты оказываются равными:  $c = 2.55$ ,  $n = 0.6$  для всех течений;  $\gamma = 0.59$  для плоских течений и  $\gamma = 0.56$  для круглой струи. Эти значения эмпирических коэффициентов далее используются для расчетов неавтономной плоской струи с учетом и без учета турбулизации. Выражение (1.8) по существу близко к гипотезе, принятой в работе [8], и отличается учетом отношения  $(\delta_1/\delta_2)$ .

2. Будем рассматривать истечение струи из бесконечно длинной щели высотой  $2H$  в спутный поток, имеющий скорость  $u_E$ . Начало прямоугольной системы координат поместим в середине выходного сечения щели, ось  $x$  направим вдоль оси симметрии течения. Как обычно примем, что струя имеет начальный и основной участки. В выходном сечении скорость струи постоянна и равна  $u_i$ , поэтому на начальном участке по краям потенциального ядра образуются слой смещения.

Границей слоя смешения со стороны ядра струи будем считать координату  $y_{0.995}$ , равную координате  $y$ , точки в которой  $u-u_E=0.995(u_I-u_E)$ . Точка, где  $y_{0.995}=0$ , соответствует концу начального участка, и в этой точке  $x=x_*$ . Автономные профили скорости и энергии турбулентности вычислялись в сечении  $x=x_*$  и использовались в качестве начальных профилей при интегрировании уравнений (1.1), (1.2) на основном участке. На начальном и основном участках граничные условия имеют соответственно вид

$$(2.1) \quad u=u_I, v=0, e=e_I, y=0$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= u_E, e = e_E, y = \infty \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \\ u &= u_E, \quad e = e_E, \quad y = \infty \end{aligned}$$

Для удобства интегрирования на начальном и основном участках вводились новые переменные ( $\xi = \xi(x)$  и  $\eta = y/\xi$ ). Производные по  $x$  и  $y$  выражаются следующим образом:

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{d\xi}{dx} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{1}{\xi}$$

После подстановки (2.3) в (1.1), (1.2) принимаем

$$(2.4) \quad \xi^k \frac{d\xi}{dx} = \gamma (\delta_1/\delta_2)^n \frac{\sqrt{e_m}}{u_I(\eta_1 - \eta_2)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{e} d\eta}{(u_m - u_E)}$$

Здесь  $u_m = u(x, 0)$  на начальном и основном участках;  $\eta_1, \eta_2$  соответствуют координатам  $y_1, y_2$ . На начальном участке  $k=0$  во всех случаях; на основном участке  $k=0$ , если  $u_E=0$ ,  $k=1$ , если  $u_E \neq 0$ . Переход к переменным  $\xi, \eta$  на начальном участке приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям. На основном участке уравнения остаются в частных производных, но толщина струи по переменной  $\eta$  оказывается одинаковой для всех  $x$  и не зависит от отношения  $u_E/u_I$  и от  $e_E$ , что позволяет при численных расчетах подобрать границы изменения переменной  $\eta$  лишь 1 раз. Это обстоятельство делает преобразование (2.3) при условии (2.4) очень удобным для численных расчетов. Уравнения, обыкновенные и в частных производных, решались методом прогонки с итерациями по неявной схеме. Расчеты выполнялись на ЭВМ М-220.

Толщина  $\delta_2$  согласно определению должна измениться в 2 раза при переходе от слоя смешения к основному участку в сечении  $x=x_*$ . Поскольку на самом деле такого скачка в изменении  $\delta_2$  быть не может, использовалась формула, обеспечивающая плавное изменение  $\delta_2$  от начального участка к основному. В самом конце начального участка при  $x=x_*$  на оси струи  $e=e(x, 0)=0$ . На переходном участке при  $x>x_*$  происходит сравнительно быстрое возрастание величины  $e(x, 0)$  до значения  $\approx 0.85e_m(x)$ , которое соответствует автономному распределению на основном участке. Для  $\delta_2$  использовалось выражение

$$(2.5) \quad \delta_2 = y_{0.05} [1 + e(x, 0)/0.85e_m(x)]$$

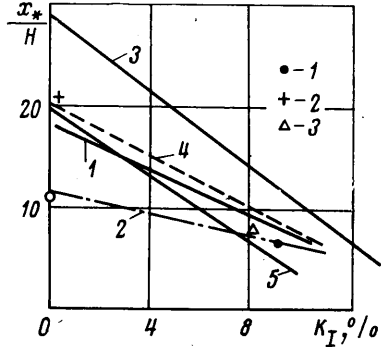
Здесь величина  $y_{0.05}$  равна координате  $y$ , где  $e/e_m=0.05$ .

Если считать, что при  $x=0$  толщина слоя смешения равна нулю ( $\xi=0$ ), то длина начального участка при  $m_0 = u_E/u_I = 0$  и 0.5 оказывается равной соответственно  $x/H = 18$  и 28 (фиг. 1, линии 1 и 3). Фактическая длина начального участка для этих двух случаев по опытным данным [9, 10] (на

фиг. 1 точка 1 для  $m_0=0$  и точка 2 для  $m_0=0.5$ ) оказывается существенно меньше. Расхождение — следствие предположения  $\xi=0$  при  $x=0$ .

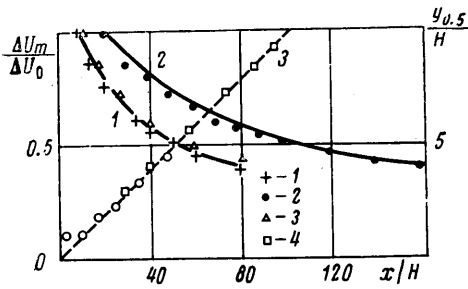
На самом деле за кромкой сопла образуется сложный профиль скорости, который в данном случае должен быть заменен автомодельным профилем с некоторой начальной эффективной толщиной  $\xi_0$ . Для расчетов основного участка были взяты длины начальных участков по опытным данным на фиг. 1. На фиг. 2 сплошными линиями построены вычисленные распределения  $(u_m - u_E)/(u_I - u_E)$  при  $m_0=0$  (линия 1) и  $m_0=0.5$  (линия 2). Точками 1—3 нанесены опытные данные соответственно работ [9—11]. Штриховой линией нанесен график  $y_{0.5}/H$ , а точками 4 — опытные данные [11, 12]. На фиг. 3 сплошной линией построен график  $V^2_{se}(x, 0)/u_m$  при  $m_0=0$ , а точками 1, 2 — опытные данные [11, 12]. Как видно, при заданном значении  $\xi_0$  согласие с опытом удовлетворительное.

Теория [8] успешно применяется для расчета пристенных пограничных слоев с градиентами давления. Сходство гипотез (1.8), (1.9) с используемыми в [8] позво-

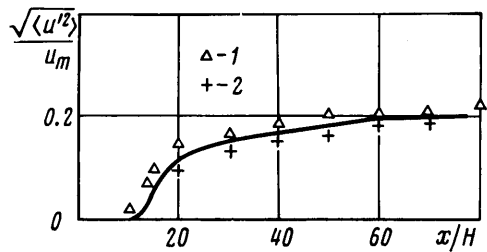


Фиг. 1

ляет предполагать, что изложенный выше метод дает удовлетворительные результаты при расчетах струйных течений с градиентами давлений. Были проведены расчеты для случая  $u_E = u_{E0} + m'(x - x_*)$  при  $m' = du_E/dx = \text{const}$ . Расчеты показывают, в частности, что коэффициент структуры  $\kappa$  в формуле Прандтля  $\epsilon_m = \kappa \Delta u_m y_{0.5}$ , который обычно считается постоянным, при  $m' < 0$  уменьшается с уменьшением  $m'$  и возрастает при  $m' > 0$  при возрастании  $m'$ . Возрастание  $\kappa$  при  $m' > 0$  происходит резче, чем уменьшение при  $m' < 0$ . Этот результат находится в качественном согласии с опытными данными [13].



Фиг. 2



Фиг. 3

3. При учете влияния турбулизации начального участка струи  $e_I \neq 0$  или спутного потока  $e_E \neq 0$  рассмотрим особый случай, когда масштаб турбулентности потока, внешнего по отношению к пограничному слою, много больше масштаба турбулентности самого пограничного слоя.

Этот случай чаще всего и реализуется на практике, поскольку при малом масштабе турбулентности должно произойти быстрое ее вырождение вблизи турбулизующей сетки или решетки. Допустим, что масштаб турбулентности  $L_E$  бесконечно велик. Тогда турбулентность внешнего потока не будет затухать вдоль оси  $x$ . Будем считать, что турбулентность внешнего потока может диффундировать с коэффициентом диффузии  $\epsilon$ .

Этот случай чаще всего и реализуется на практике, поскольку при малом масштабе турбулентности должно произойти быстрое ее вырождение вблизи турбулизующей сетки или решетки. Допустим, что масштаб турбулентности  $L_E$  бесконечно велик. Тогда турбулентность внешнего потока не будет затухать вдоль оси  $x$ . Будем считать, что турбулентность внешнего потока может диффундировать с коэффициентом диффузии  $\epsilon$ .

Представим энергию турбулентности в слое смешения в виде

$$(3.1) \quad e = e_i + e_e$$

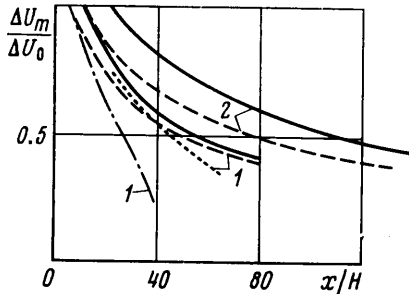
Здесь  $e_e$  — энергия турбулентности с масштабом внешнего потока,  $e_i$  — энергия турбулентности, индуцированной в слое смешения. Подставляя (3.1) в (1.2), получим отдельные уравнения для  $e_e$  и  $e_i$ . Уравнение для  $e_e$  будет совпадать с уравнением для скорости (1.1) при  $du_E/dx=0$ . Если известно решение уравнения (1.1), то для  $e_e$  решение можно записать в виде

$$(3.2) \quad e_e = e_E + (u - u_E)(e_i - e_E)/(u_i - u_E)$$

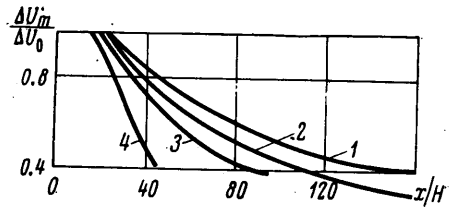
Для основного участка при таком же предположении получим

$$(3.3) \quad e_e = e_E$$

Уравнение для  $e_i$  имеет вид (1.2). Длина  $\delta_2$  определяется по кривой  $e_i$ . Зависимость  $e_i$  от  $e_e$  осуществляется через коэффициент  $\epsilon$  (1.8), куда



Фиг. 4



Фиг. 5

входит суммарная энергия  $e$  (3.1). Длины начального участка  $x/H$  в зависимости от степени турбулентности  $K_I = \sqrt{e_i}/u_i \cdot 100\%$  для случаев  $m_0=0, 0.3$  и  $0.5$  показаны на фиг. 1 линиями 1, 5, 3. Точка 1 обозначает опытные данные [14] ( $m_0=0$ ), а точка 3 — данные [15] ( $m_0=0.3$ ).

При большой степени турбулентности  $K_I \sim 8-10\%$  теоретическая длина ядра оказывается близкой к опытной. По-видимому, турбулизирующая решетка, обычно устанавливаемая в опытах в непосредственной близости от выходного сечения сопла, уменьшает толщину пограничного слоя вблизи кромки сопла. В целом турбулизация ядра струи приводит к его укорочению. На основном участке влияние начальной турбулизации постепенно исчезает.

Турбулизация внешнего потока  $e_E = \text{const}$  приводит к быстрому утолщению струи и соответственно быстрому ее затуханию. Результаты расчетов для  $K_I=0, 10\%$  (сплошная линия и пунктир) и  $K_E=2.5, 10\%$  (линия, состоящая из точек и штрихпунктирная линия) представлены на фиг. 4. На фигуре линиям 1, 2 соответствуют значения  $m_0=0, 0.5$ . Сделаны расчеты для случая, когда  $e_E$  убывает вниз по потоку

$$(3.4) \quad e_E = 0.033u_E^2/[1+0.14(H/\theta)(x-x_*)/H]$$

Эта формула аппроксимирует закон убывания энергии турбулентности в следе за пластинкой по опытным данным [16]. Здесь  $\theta$  — толщина вытеснения на хвостике пластинки. Для простоты считалось, что  $e_E = e_E(x_*)$  при  $0 < x < x_*$ . Этот расчет соответствует развитию струи в условном следе за телом. На фиг. 5 представлены результаты расчетов. Линиям 1-4 соответствуют значения  $k_E=0, h/\theta=4, 2, 0.5$ . Видно, что даже при

малой степени турбулентности в сечении  $x$ . влияние внешней турбуликации велико. С уменьшением относительной толщины начальных пограничных слоев ( $H/\theta$ ) их влияние постепенно уменьшается.

Поступила 5 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смешение газовых струй. М., «Наука», 1974.
2. *Heck P. H., Ferguson D. R.* Analytical solution for free turbulent mixing in compressible flows. AIAA paper, 1974, No. 4.
3. *Mikatagian R. R., Benefield J. D.* Turbulence in chemical lasers. AIAA paper, 1974, No. 148.
4. *Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Связь между коэффициентом диффузии и эйлеровыми характеристиками турбулентности в различных потоках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
5. *Харша, Ли.* Связь между турбулентным напряжением трения и кинетической энергией турбулентного движения. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 8.
6. *Акатнов Н. И., Кузнецов А. П.* Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного турбулентного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
7. *Акатнов Н. И.* О линейных масштабах турбулентности в полуэмпирической теории. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
8. *Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P.* Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation. J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pt 3.
9. *Forthmann E.* Über turbulente Strahlausbreitung. Ingr - Arch., 1934, Bd 5, H. 1.
10. *Weinstein A. S., Osterle J. F., Forstall W.* Momentum diffusion from a slot jet into a moving secondary. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 3.
11. *Bredbury L. J. S.* The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
12. *Hegge Zijnen B. G. van der.* Measurement of turbulence in a plane jet of air by the diffusion method and by the hot-wire method. Appl. Sci. Res., 1959, Ser. A., vol. 7, No. 4.
13. *Гиневский А. С.* Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
14. *Гиневский А. С., Почкина К. А.* Влияние начальной турбулентности потока на характеристики осесимметричной затопленной струи. Инж.-физ. ж., 1967, т. 12, № 1.
15. *Виноградов Ю. В., Груздев В. Н., Талантов А. В.* Влияние интенсивности турбулентности на процессы перемешивания спутных струй при различном соотношении скорости. В сб. «Теория и практика сжигания газа», № 5, Л., «Недра», 1972.
16. *Секундов А. Н., Яковлевский О. В.* Экспериментальное исследование течения в следе за тонкими пластинами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.