УДК 533.6.011.8 : 518.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ГАЗА ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ КАПИЛЛЯРАМ В ПРОМЕЖУТОЧНОМ РЕЖИМЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Л. М. НУСИНЗОН, Б. Т. ПОРОДНОВ, П. Е. СУЕТИН

(Свердловск)

В настоящее время имеется достаточное количество решений задачи о свободномолекулярном истечении газа через короткий цилиндрический канал, например [1–3]. В промежуточном режиме течения при числах Кнудсена Kn~1 получены решения для предельных случаев: неограниченно длинного канала [4] и канала нулевой длины (отверстия) [5]. Решения же задачи для коротких каналов при Kn~1 неизвестны. В данной работе приводятся результаты расчета методом Монте-Карло макроскопических характеристик истечения газа в вакуум через короткий цилиндрический капилляр с различным отношением длины к радиусу и с учетом межмолекулярных столкновений.

1. При построении алгоритма прохождения пробной молекулы через капилляр используется модель псевдомаксвелловских сфер, для которой полное эффективное сечение столкновения двух молекул обратно пропорционально их относительной скорости g, т. е. $\sigma=\sigma_0/g$, $\sigma_0=\mathrm{const}$. Скорость молекул после столкновения определяется как при столкновении твердых сфер. Скорости полевых молекул, с которыми сталкиваются пробные молекулы, выбираются по методу, предложенному в [6].

Предполагается, что в области перед каналом вплоть до входного сечения состояние газа описывается максвелловской функцией распределения $n_0 f(\mathbf{v}, T_0)=n_0(m/2\pi kT_0)^{3/2}\exp(-m\mathbf{v}^2/2kT_0)$. Течение газа характеризуется числом Кнудсена $\mathrm{Kn}=3(kT_0/2m)^{1/2}/n_0\sigma_0 R$, где m — масса молекулы, n_0 — плотность газа, R — радиус капилляра. Отражение молекул от стенки диффузное с температурой стенки T_0. Вне капилляра за выходным сечением движение молекул бесстолкновительное.

Таким образом, рассматриваемой областью течения является внутренняя часть капилляра, которая разбивается на ячейки в виде колец толщиной R/N_r и шириной L/N_z, где L — длина капилляра.

2. Равномерно по входному сечению капилляра разыгрываются стартовые координаты пробной молекулы. Плотность распределения скорости, с которой молекула влетает в канал или стартует (отражается) с его поверхности после диффузного отражения, пропорциональна $v_n f(\mathbf{v}, T_0)$, где v_n — нормальная составляющая скорости к поверхности старта. Модуль этой скорости можно моделировать как $v=(kT_0/m)^{1/2}\times(-2\ln(\alpha_1\alpha_2))^{1/2}$ [7], где α_1 и α_2 — случайные числа с равномерным распределением из (0,1). Направление движения моделируется по закону косинуса.

Слежение за пробной молекулой прекращается при выходе ее за пределы канала (одно испытание). Всего проводится N испытаний.

Макропараметры течения газа (плотность n, продольная составляющая скорости u и температура T) определяются следующим образом:

$$n=\frac{n_0 v_t}{4}\frac{\tau}{N\Delta V},\qquad v_t=\left(\frac{8kT_0}{\pi m}\right)^{1/2}$$

$$u=\frac{\tau_u}{\tau},\qquad T=\frac{m}{3k}\left(\frac{\tau_t}{\tau}-u^2\right)$$

$$\tau=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j}t_{ij},\qquad \tau_u=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j}v_{zij}t_{ij},\qquad \tau_t=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j}v_{ij}^2 t_{ij}$$

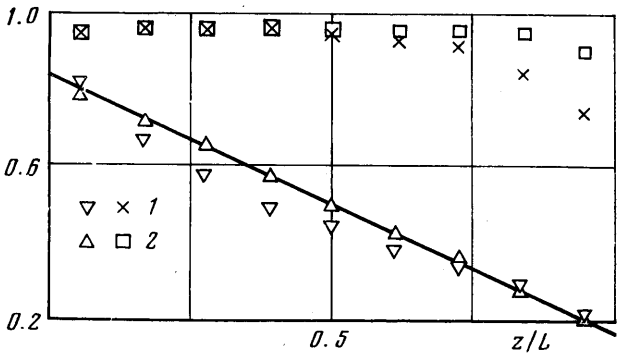
где t_{ij}, v_{ij}, v_{zij} — соответственно время движения, скорость и проекция скорости молекулы на ось капилляра на j-м прямолинейном участке бесстолкновительного движения i-й пробной молекулы внутри ячейки, ΔV — объем ячейки. Тогда относительную ошибку определения n можно вычислить по формуле

$$\varepsilon_n=\varkappa_\beta\left(\frac{\tau_2}{\tau^2}-\frac{1}{N}\right)^{1/2},\qquad \tau_2=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j}t_{ij}\right)^2$$

Здесь $\varkappa_\beta$ — корень уравнения $erf(\varkappa_\beta/\sqrt{2})=\beta$, β — коэффициент доверия.

После достижения заданной точности ε_n полученное распределение плотности n принимается за исходное и моделирование повторяется до тех пор, пока вновь полученное распределение n не будет отличаться от предыдущего не более чем на ε. В качестве начального распределения принималось распределение n, соответствующее свободномолекулярному течению.

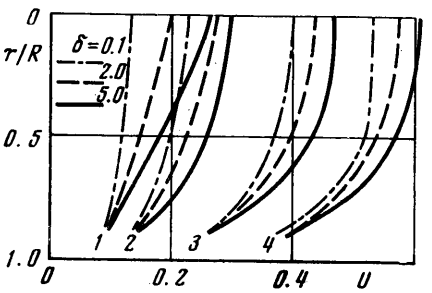
Расчеты на ЭВМ показали, что примененный метод имеет хорошую сходимость. Для получения результатов при $Kn \geqslant 0.2$ было достаточно двух — четырех итераций. Вычисления проводились на ЭВМ М-222 с использованием различных датчиков случай-



Фиг. 1

ных чисел, а результаты счета усреднялись по ~60 000 испытаний. Было выбрано $N_z=9$, $N_r=4$, $\varepsilon_n=\varepsilon\leqslant 4\%$ и $\varkappa_\beta=1.96$ ($\beta=0.95$). Время счета на 1000 испытаний ~3 *мин.*

Для проверки правильности работы алгоритма была решена задача о самодиффузии газа через капилляр $L/R=4$ при $\delta=\sqrt{\pi}/2\,Kn=2$. С точностью $\varepsilon_n\sim 3.5\%$ распределение плотности в средней части капилляра получилось заниженным на 3.4% на оси и завышенным на 4.9% у стенки. Распределение u колеблется в пределах ошибки, а значения T получились ниже на ~1.2%. При $\delta\leqslant 1$ эти расхождения почти не заметны.



Фиг. 2

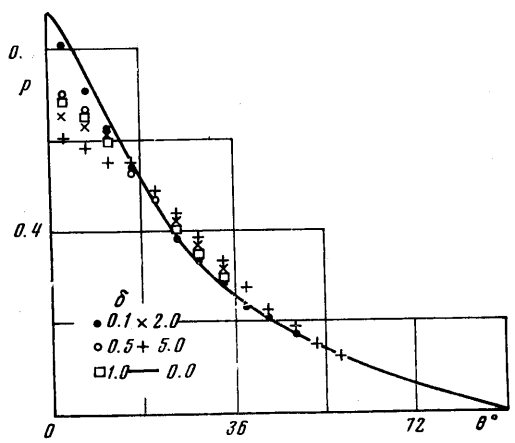
3. В таблице приведены результаты расчета относительной проводимости Q/Q_0 коротких цилиндрических капилляров при различных δ. Здесь Q — проводимость капилляра, которая определяется отношением потока молекул, вылетевших из канала через выходное сечение, к потоку молекул, вошедших в канал, а Q_0 — проводимость капилляра в свободномолекулярном режиме ($\delta=0$), взятая из [2]. В таблице представлены также для сравнения значения Q/Q_0 для отверстия ($L=0$), полученные из решения модельного уравнения [5] и значения приведенного расхода газа для предельного случая неограниченно длинных каналов ($L=\infty$), рассчитанные с применением метода Монте-Карло к вычислению интегралов столкновений в уравнении Больцмана [4].

На фиг. 1 для иллюстрации приведено распределение относительных макропараметров течения газа $n'=n/n_0$ и $T'=T/T_0$ на оси (обозначения *1*) и вблизи стенки на

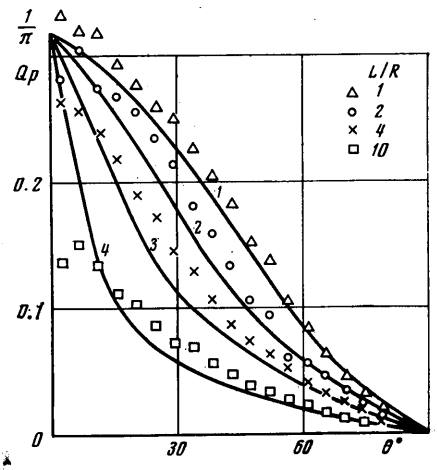
δ	L/R					
	0	1	2	4	10	∞
0.1	1.01	1.003	1.015	1.000	1.000	1.00
0.5	1.10	1.014	1.020	1.024	1.031	0.99
1.0	1.15	1.022	1.056	1.053	1.070	1.07
2.0	1.23	1.051	1.084	1.131	1.133	1.28
5.0	–	1.088	1.170	1.212	1.215	1.73

расстоянии 0.125 R (обозначения *2*) от нее в канале с $L/R=4$ при $\delta=5$. Расчеты показали, что для каналов с $L/R\geqslant 2$ распределение плотности газа вблизи стенки при всех δ отличается от соответствующего распределения в свободномолекулярном пределе (сплошная линия на фиг. 1) менее чем на 1%. С увеличением δ плотность молекул газа на оси в средней части капилляра уменьшается по сравнению со свободномолекулярной, и при $\delta=5$ это отличие составляет $\leqslant 14\%$. На капилляре $L/R=10$ для всех δ распределение n/n_0 в пределах $\sim 2\%$ совпадает со свободномолекулярным.

Как видно из фиг. 1, имеет место отличие в распределении температур на оси и вблизи стенок канала во второй половине капилляра. При этом вблизи стенки тем-



Фиг. 3



Фиг. 4

пература газа при всех δ практически одинакова ($\sim 1\%$), а на оси уменьшается с увеличением δ. При $\delta=0.1$ и 5 это отличие не превышает 4%.

Профили продольной относительной скорости течения газа $U=u/v_t$ в сечениях $L/18$, $L/2$, $15L/18$ и $17L/18$, усредненные на отрезках канала длиной $L/9$ (группы кривых *1—4* соответственно), приведены на фиг. 2.

На фиг. 3 представлены плотности распределения $p(\theta)$ потоков молекул, вылетающих из канала $L/R=4$ в единичный телесный угол под углом θ, который отсчитывается от оси капилляра, при различных δ. Как видно, увеличение числа межмолекулярных столкновений приводит к расширению вылетающего пучка. Расчеты показали, что при $\theta\geqslant 50°$ для капилляров с $L/R=1$ наблюдается совпадение в пределах 2% с соответствующей плотностью $p(\theta)$ для свободномолекулярного режима течения.

Зависимость величины $Qp(\theta)$, которая является вероятностью того, что молекула, попавшая в канал, вылетит из него через выходное сечение в единичный телесный угол под углом θ к оси, представлена на фиг. 4 для режима течения с $\delta=2$. Сплошные линии *1—4* на этой фигуре соответствуют теоретическим значениям $Qp(\theta)$, вычисленным для свободномолекулярного режима течения [3] для значений L/R, равных 1, 2, 4, 10. Расчеты показали, что с увеличением L/R и δ интенсивность пучка на оси уменьшается. При фиксированной длине канала с увеличением δ поток молекул увеличивается в основном в области $\theta=20$—$40°$, что вносит основной вклад в изменение значения проводимости Q.

4. Полученные значения относительной проводимости Q/Q_0 в зависимости от δ качественно хорошо согласуются с данными, полученными для предельных случаев (отверстие и неограниченно длинный канал). Действительно, из таблицы видно, что с увеличением параметра наблюдается увеличение относительной проводимости Q/Q_0. Однако скорость возрастания Q/Q_0 с увеличением δ для отверстия значительно больше, чем для любого канала конечной длины. Причина такого расхождения полученных результатов с имеющимися данными обусловлена, по-видимому, тем, что при постановке задачи не учитывалась область течения газа перед капилляром, в которой за счет межмолекулярных столкновений происходит изменение функции распределения молекул по скоростям. Очевидно, что входящие в канал молекулы распределены по закону, отличающемуся от максвелловского. Поскольку в основном формирование потока происходит на расстоянии, меньшем $4R$ до входного сечения [5], то, очевидно, при более строгом решении необходимо расширить рассматриваемую область течения.

Следует также отметить, что отличие плотности молекул на оси и у стенок канала при $\delta \geqslant 1$ (фиг. 1) можно объяснить, во-первых, неточностью постановки задачи и, во-вторых, неточностью используемого метода [6], что хорошо иллюстрирует решение задачи о самодиффузии газа в коротком канале.

Поступила 25 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Clausing P.* Over de Stationnaire Strooming van Zeer Verdunde Gassen. Physica, 1929, Bd. 9, No. 3.
2. *De Marcus W. C.* Report K-1302. Union Carbide Nuclear Company, Oak Ridge, Tennessee, 1957.
3. *Неудачин И. Г., Породнов Б. Т., Суетин П. Е.* Формирование узких молекулярных пучков цилиндрическими каналами. Ж. техн. физ., 1972, т. 42, № 5.
4. *Горелов С. Л.* Течение разреженного газа в трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
5. *Шахов Е. М.* Решение осесимметричных задач теории разреженных газов методом конечных разностей. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 4.
6. *Власов В. И.* Расчет методом Монте-Карло потока тепла между параллельными пластинами в разреженном газе. Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та, 1970, т. 1, № 4.
7. *Михайлов Г. А.* Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск, «Наука», 1974.

УДК 534.222.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО СТРУЕ ВОДЫ

Г. А. АТАНОВ, А. Н. СЕМКО

(Донецк)

Численно решена задача о распространении ударной волны, вышедшей из круглой трубы в струю воды. Решение проведено методом [1].

1. В стационарную осесимметричную струю воды (область *1* на фиг. 1), истекающую из цилиндрической трубы *2* со скоростью u_0, выходит стационарная ударная волна с плоским фронтом *3*.

Математическая задача сводится к решению уравнений нестационарной газовой динамики. В цилиндрической системе координат безразмерная система уравнений имеет вид [2]

$$\frac{\partial \rho r}{\partial t}+\frac{\partial \rho u r}{\partial x}+\frac{\partial \rho v r}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\rho^n-1}{n}+r\rho u^2\right)+\frac{\partial \rho u v r}{\partial r}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho v r}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\rho^n-1}{n}+r\rho v^2\right)=\frac{\rho^n-1}{n}$$

Здесь x, r – продольная и радиальная координаты, t – время, ρ – плотность, u, v – компоненты скорости по осям x и r, $n=7.15$ – показатель изэнтропы в уравнении состояния воды, взятом в форме Тэта.

Примем за начальный момент момент достижения ударной волной выходного сечения трубы; тогда

$$\begin{gathered} u(x, r, 0)=u_1, \quad v(x, r, 0)=0, \quad \rho=(x, r, 0)=\rho_1 \\ -\infty<x\leqslant 0, \quad 0\leqslant r\leqslant 1 \\ u(x, r, 0)=u_0, \quad v(x, r, 0)=0, \quad \rho(x, r, 0)=1 \\ 0<x<\infty, \quad 0\leqslant r\leqslant 1 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Граничные условия

$$-\infty<x<0, \quad v(x, 1, t)=0 \tag{1.3}$$

$$0<x<\infty, \quad \rho(x_*, r_*, t)=1 \tag{1.4}$$