

волновую энергию и энергию пузыря, может прояснить особенности формирования ударных волн в двухфазной среде газ — жидкость.

Влияние начального давления на процесс затухания ударных волн в двухфазной среде требует дополнительной проверки. Для окончательной оценки демпфирования ударных волн в двухфазной среде следует выполнить измерения импульса давления в ударной волне и удельного потока энергии.

Авторы благодарят С. В. Хомика за помощь в проведении опытов, а Р. И. Нигмагулина за конструктивное обсуждение результатов работы.

Поступила 17 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.
2. Jensen F. B. Response of an air bubble in water to a shock wave. Danish Center Appl. Mech. Rept No. 49, 1973.
3. Рейнгард Д. С., Персон Д. Взрывная обработка металлов. М., «Мир», 1966.
4. Коул Р. Подводные взрывы. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
5. Христофоров Б. Д. Параметры ударной волны и газового пузыря при подводном взрыве зарядов из ТЭН малого веса. ПМТФ, 1960, № 2, стр. 124—127.
6. Адушкин В. В. О формировании ударной волны и разлете продуктов взрыва в воздухе. ПМТФ, 1963, № 5, стр. 107—114.
7. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р., Кузнецов В. В., Малых М. В. Экспериментальное исследование ударных волн в жидкости с пузырьками газа. Сб. «Волновые процессы в двухфазных средах» под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, 1975, стр. 54—97.

УДК 532.72

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ В ДИФфуЗИОННОМ СЛЕДЕ ЧАСТИЦЫ, ОБТЕКАЕМОЙ СТОКСОВЫМ ПОТОКОМ

А. Д. ПОЛЯНИН

(Москва)

Задача о стационарной конвективной диффузии к твердой сферической частице, находящейся в стоксовом потоке, в приближении диффузионного пограничного слоя рассмотрена в [1]. Область задней критической точки, в которой пограничное решение непригодно, исследована в [2, 3].

При исследовании диффузионного взаимодействия нескольких частиц в потоке жидкости (например, двух сфер с общей осью, направленной по потоку) необходимо знать распределение концентрации в области малых углов за телом, задающее условие натекания для следующей частицы.

В данной работе получено решение задачи о распределении концентрации в диффузионном следе сферической частицы. Показано, что концентрация на оси растет пропорционально корню квадратному из расстояния до ее поверхности.

В предположении полного поглощения диффундирующего вещества на поверхности частицы и постоянной концентрации вдали от нее запишем в сферической системе координат безразмерное уравнение конвективной диффузии и граничные условия

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \varepsilon^3 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right\}$$

(1)

$$c|_{r=1} = 0, \quad c|_{r \rightarrow \infty} = 1 \quad (\varepsilon^{-3} = P = aU/D)$$

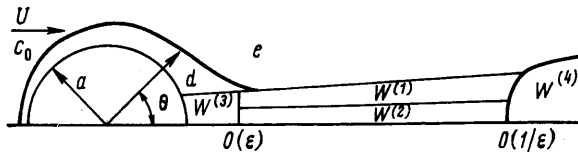
$$v_r = \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = - \left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3} \right) \sin \theta$$

Здесь $c = c^*/c_0$, $r = r^*/a$, c^* — концентрация вещества в потоке, c_0 — концентрация на бесконечности, a — радиус сферы, U — скорость потока на бесконечности, D — коэффициент диффузии, P — число Пекле.

Асимптотический анализ задачи (1) показывает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ вблизи поверхности частицы в потоке можно выделить шесть областей с различным механизмом массопереноса [2, 3], которые схематически показаны на фиг. 1. Это внешняя область

ϵ , диффузионный погранслой d , конвективно-погранслойная область диффузионного следа $W^{(1)}$, внутренняя область диффузионного следа $W^{(2)}$, область задней критической точки $W^{(3)}$ и область смещения $W^{(4)}$. Уравнения, описывающие эти области, получаются соответствующей заменой переменных и сохранением главных членов разложения концентрации по степеням ϵ в (1), а граничные условия определяются асимптотическим сращиванием решений на условных границах этих областей.

В области ϵ в (1) существует лишь конвективный член, поэтому концентрация здесь постоянна и равна своему значению на бесконечности. Область d характеризуется тем, что диффузионным переносом вещества вдоль поверхности можно пренебречь по сравнению с переносом по нормали. В этой области справедливо решение диффузионного погранслоя [1]. Область $W^{(1)}$ характеризуется преобладанием кон-



вективного переноса по сравнению с диффузионным и граничным условием, определяемым решением в области d . Решение для области $W^{(1)}$ получено в [2, 4]. В области $W^{(3)}$ существен диффузионный перенос как по нормали, так и по касательной, а в области $W^{(2)}$ переносом по нормали к сфере можно пренебречь. Постановка крайних задач для этих областей имеется в [2].

Уравнение и граничные условия, описывающие распределение концентрации в области $W^{(2)}$, будут следующие:

$$(2) \quad \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right) \frac{\partial c^{(2)}}{\partial r} - \left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right) \frac{s}{r} \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s} = \frac{1}{r^2 s} \frac{\partial}{\partial s} s \frac{\partial c^{(2)}}{\partial s}$$

$$[\partial c^{(2)} / \partial s]_{s=0} = 0 \quad (s = \theta \epsilon^{-3/2})$$

$$c^{(2)} \rightarrow \sqrt{\epsilon} s (2r^2 - 3r + 1/r)^{1/2} / (\pi^{1/2} \Gamma(4/3) 3^{5/6}), \quad s \rightarrow \infty$$

«Начальное» условие (условие сращивания решения внутренней области следа $W^{(2)}$ с решением в области задней критической точки $W^{(3)}$) для (2) задается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(3) \quad c^{(2)} \rightarrow \sqrt{\epsilon} s (2r^2 - 3r + 1/r)^{1/2} / (\pi^{1/2} \Gamma(4/3) 3^{5/6}), \quad s \rightarrow \infty$$

$$\xi f_{\xi\xi}'' + (1 + 3/4 \xi^2) f_{\xi}^{\prime - 3} / 4 \xi f = 0$$

$$f_{\xi}^{\prime} |_{\xi=0} = 0, \quad f |_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \xi / [(3\pi)^{1/2} \Gamma(4/3)]$$

Решение (2), (3) ищем в виде

$$(4) \quad c^{(2)} = \sqrt{\epsilon} (r-1) F(\xi)$$

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{A(r)}{r-1} \right]^{1/2} s, \quad A(r) = \frac{1}{4} [2r^2 - 3r + r^{-1}]$$

В результате такой замены (2) сводится к виду

$$(5) \quad \xi F_{\xi\xi}'' + (1 + 3/4 \xi^2) F_{\xi}^{\prime - 3} / 4 \xi F = 0$$

$$F_{\xi}^{\prime} |_{\xi=0} = 0, \quad F |_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \xi / [(3\pi)^{1/2} \Gamma(4/3)], \quad \xi \in [0, +\infty)$$

При $r \rightarrow 1$ $\xi \rightarrow (r-1)^{1/2} s$, следовательно, F удовлетворяет начальному условию (3). Сделав в (5) замену $x = -3/4 \xi^2$, получаем следующее уравнение:

$$(6) \quad x F_{xx}'' + (1-x) F_x^{\prime} + 1/2 F = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} \frac{dF}{dx} = 0, \quad F |_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\Gamma(4/3) 3^{5/6} \pi^{1/2}} [-x]^{1/2}, \quad x \in (-\infty, 0]$$

Решением (5) будет [5]

$$F(x) = K\Phi(-1/2, 1; x), \quad K = \frac{2\sqrt{2}\Gamma(3/2)}{\Gamma(4/3)3^{3/4}\pi^{1/2}} \approx 0.886 \quad (7)$$

$$\Phi(a, c; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

Здесь Φ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Возвращаясь к старым переменным, получаем для распределения концентрации

$$c^{(2)}(s, r) = (\sqrt{\varepsilon}K(r-1)^{1/2}\Phi(-1/2, 1; -A(r)s^2/2(r-1))) \quad (8)$$

В области смешения $W^{(4)}$, как и в $W^{(2)}$, диффузией вдоль линий тока можно пренебречь. Концентрация в переменных $\xi = \varepsilon^{-1}\psi^{1/2}$, $\rho = \varepsilon r/2$, где $\psi = 1/4(2r^2 - 3r + r^{-1})\sin^2\theta$ – функция тока, удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям

$$\frac{\partial c^{(4)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial c^{(4)}}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial c^{(4)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad c^{(4)} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = 1$$

$$c^{(4)} \Big|_{\rho \rightarrow 0} = \Gamma^{-1}(1/3) \{ \gamma(1/3, \xi^3/9t^\circ) - 3^{1/2}(t^\circ)^{-1/2}\xi + \pi^{1/2}3^{1/2}(t^\circ)^{-1/2}\rho^{1/2}\Phi(-1/2, 1, -\xi^2/4\rho) \} \quad (9)$$

$$\gamma(1/3, x) = \int_0^x e^{-u} u^{-2/3} du, \quad \Gamma(1/3) = \gamma(1/3, \infty), \quad t^\circ = \pi\sqrt{3}/8$$

Здесь начальное условие при $\rho \rightarrow 0$ определено сращиванием решения в $W^{(4)}$ с решениями в областях $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$. Решение задачи имеет вид

$$c^{(4)}(\xi, \rho) = B(\xi, \rho) * [\Gamma^{-1}(1/3)\gamma(1/3, \xi^3/9t^\circ) - \Gamma^{-1}(1/3)3^{1/2}(t^\circ)^{-1/2}\xi] + \Gamma^{-1}(1/3)\pi^{1/2}3^{1/2}(t^\circ)^{-1/2}\rho^{1/2}\Phi(-1/2, 1, -\xi^2/4\rho)$$

$$B(\xi, \rho) * u(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\xi^*}{2\rho} e^{-(\xi^2 + \xi^{*2})/4\rho} I_0\left(\frac{\xi\xi^*}{2\rho}\right) u(\xi^*) d\xi^* \quad (10)$$

Здесь $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 0.

Таким образом, распределение концентрации в приосевых областях (области, через которые проходит луч $\theta=0$) $W^{(2)}$, $W^{(4)}$ определяются формулами (8), (10). Однако, несмотря на то что асимптотическое поведение решения в области задней критической точки $W^{(3)}$ при $Y \rightarrow \infty$ может быть получено из (8)

$$c^{(3)}(Y, S) \Big|_{Y \rightarrow \infty} \rightarrow \varepsilon KY^{1/2}\Phi\left(-\frac{1}{2}, 1; -\frac{3}{8}YS^2\right), \quad Y = (r-1)\varepsilon^{-1}, \quad S = \sqrt{\varepsilon}s$$

вопрос о распределении концентрации здесь остается открытым.

Из (8) видно, что на оси ($s=0$) за сферой концентрация растет пропорционально квадратному корню из расстояния до ее поверхности ($c(0, r) = \varepsilon^{1/2}K(r-1)^{1/2}$), а коэффициент $\varepsilon^{1/2}$ показывает, что в этой области раствор сильно обеднен. Поэтому если, например, рассматривать диффузионное взаимодействие двух одинаковых сфер в жидкости, находящихся на конечном расстоянии ($l \sim O(1)$), и такое, что диффузионный «след» одной из них «попадает» на другую, то массообмен второй частицы со средой будет значительно меньше массообмена первой.

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. *Sih Ping Hwei, Newman J.* Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. *J. Heat and Mass Transfer*, 1967, vol. 10, No. 12.
3. *Newman J.* Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers. *J. Ind. and Engng. Chem. Fundament*, 1969, vol. 8, No. 3.
4. Восканян А. Б., Головин А. М., Толмачев В. В. Конвективная диффузия к системе периодически расположенных сфер при малых числах Рейнольдса. ПМТФ, 1966, № 5.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. I. М., «Наука», 1973.

УДК 533.15

ЗОНА СМЕСИ ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ ГАЗОВ В РАЗЛИЧНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

С. Н. БУЗИНОВ, М. А. ПЕШКИН

(Москва)

Приводятся результаты экспериментального исследования зоны смеси последовательно фильтрующихся газов в насыпных неоднородных пористых средах различной проницаемости и в неоднородных слоистых пластах.

Коэффициент дисперсии и длина зоны смеси в пористой среде при фильтрации смешивающихся газов или взаиморастворимых жидкостей зависят от характеристик среды (например, [1, 2]).

Сопоставление экспериментальных данных показало отсутствие единой критериальной зависимости коэффициента дисперсии от чисел Пекле (Pe) или Рейнольдса (Re), определяемых по характерному размеру частиц. В области конвективной дисперсии отмечается влияние формы и размера однородных частиц на коэффициент дисперсии [3-5]. Для сопоставления и обобщения результатов экспериментов в различных пористых средах кроме проницаемости и пористости, позволяющих определить размер «среднего» канала, при рассмотрении неоднородной среды вводят фактор неоднородности или укладки частиц. Значительные трудности возникают при рассмотрении макронеоднородных сред, сред с включениями и слоистых сред.

Ранее было показано влияние коэффициента молекулярной диффузии на процесс перемешивания фильтрующихся газов в насыпных пористых средах различной проницаемости [2] и отмечено смещение области конвективной диффузии в сторону малых чисел Pe и Re для малопроницаемых сред [6].

В данной работе экспериментально исследуется роль абсолютных размеров каналов пористой среды и их неоднородности на интенсивность перемешивания, которая характеризуется коэффициентом дисперсии или длиной зоны смеси.

1. В опытах на трубах диаметром 35 мм, длиной 200 см, набитых кварцевым песком или корундовым порошком различных фракций, азот вытеснялся углекислым газом при давлении $P=8$ атм и различных скоростях фильтрации. Методика проведения опытов была такой же, как в [2].

На фиг. 1 представлены экспериментальные данные (кривые 1-7), полученные на различных пористых средах 1-7, характеристика которых дана ниже:

№	Материал	Размер частиц d , мм	d^* , мм	k , g
1	Кварцевый песок	0.08-0.63	0.3	25
2	То же	0.25-0.315	0.28	29
3	»	0.2-0.25	0.22	23
4	»	0.1-0.2	0.15	12
5	Корундовый порошок	-	0.05	2.1
6	То же	-	0.005	0.035
7	»	0.005 и 0.05	0.027	0.050

Песок широкой фракции 1, пески узкой фракции 2-4 и однородный корундовый порошок 5, несмотря на различие в проницаемости от $k=29$ g до $k=2.1$ g, дают практически одинаковую зависимость длины зоны смеси l от скорости фильтрации u . Резко отличную зависимость дает мало проницаемая пористая среда из мелкого ко-