

Ширина щели определится из геометрических соображений

$$(8) \quad \frac{h}{\delta} = \frac{\operatorname{Re}(z_D)}{\delta} - \left(\frac{l}{\delta} + \frac{m}{\delta} \right) \operatorname{ctg} \alpha$$

Примеры вычислений относительных геометрических параметров течения $l'=l/h$, $m'=m/h$ и коэффициента сжатия струи $\delta'=\delta/h$ с помощью соотношений (5)–(8) для $\alpha=\pi/2 \pm \pi/6$ представлены на фиг. 2–4. Сплошные линии соответствуют $\alpha < \pi/2$, а штриховые — $\alpha > \pi/2$, цифрам 1–6 на линиях отвечают значения угла $\beta=\pi/18$, $\pi/9$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$.

Вычисления интегралов проводились на ЭЦВМ М-220 с помощью стандартной процедуры Симпсона. При определении главных значений интегралов (5) и (6) ширина области разрыва принималась равной $\Delta \leq 0.001$ с, причем величина Δ считалась достаточно малой, если ее уменьшение вдвое не приводило к изменению значения интеграла на величину, превышающую 0.001. При вычислении несобственного интеграла (7) величина верхнего предела считалась достаточно большой, если ее удвоение не приводило к изменению значения интеграла более чем на 0.001.

Из приведенных расчетов следует, что по мере увеличения α как при $\alpha < \pi/2$, так и при $\alpha > \pi/2$, относительная высота выступа m' , необходимая для реализации безвихревого истечения, увеличивается, а соответствующая относительная глубина отверстия l' уменьшается. При этом относительная толщина разделяющей стенки ($m'+l'$) уменьшается с ростом V' при заданном β тем быстрее, чем больше α (стремясь к нулю при $V' \rightarrow 1$).

Поступила 30 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов Е. Н. О боковом истечении жидкости из потока через отверстие конечной глубины. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 10.
2. Космачев П. П., Скобельцын Ю. А. Боковое истечение жидкости из потока через насадок. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.

УДК 532.525

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА ПРИ ПРОФИЛИРОВАНИИ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОПЛА ЛАВАЛЯ

Н. А. ПОДСЫПАНИНА

(Москва)

В развитие [1] предлагается метод решения задачи о профилировании дозвуковой части осесимметричного сопла Лавалья с прямой звуковой линией: для нелинейного уравнения второго порядка в плоскости годографа скорости ставится и решается численным методом задача Дирихле с кусочно-непрерывной граничной функцией.

При исследовании осесимметричных течений метод годографа до сих пор не применялся ввиду существенной нелинейности уравнения (оно содержит якобиан преобразования). Однако в случае, когда задачу предполагается решать численным методом, использование плоскости годографа принципиально возможно.

Задача профилирования сопла Лавалья, цель которой — определение координат контура сопла, поток в котором обладает некоторыми свойствами, например монотонностью скорости на стенке, наиболее естественно формулируется в плоскости годографа как некоторая краевая корректная задача для уравнения смешанного типа. В случае, когда сопло профилируется с прямой звуковой линией, это — задача Дирихле, в общем случае сопла с криволинейной звуковой линией возникает задача Трикоми — Франкля. Ниже описывается решение задачи профилирования и приводятся конкретные примеры для сопла с прямой звуковой линией.

Для решения задачи можно предложить три различных подхода, отличающихся выбором дифференциального уравнения.

1. Уравнение второго порядка для $y=y(\lambda, \beta)$ (λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости, x, y — декартовы координаты).

Из системы уравнений в переменных λ, β

$$(1) \quad \frac{M^2 - 1}{\lambda} [\lambda_x \cos \beta + \lambda_y \sin \beta] = -\sin \beta \beta_x + \cos \beta \beta_y + \frac{\sin \beta}{y}$$

$$\beta_x \cos \beta + \beta_y \sin \beta = -\frac{\sin \beta}{\lambda} \lambda_x + \frac{\cos \beta}{\lambda} \lambda_y$$

меняя местами зависимые и независимые переменные, получим

$$(2) \quad \frac{M^2-1}{\lambda} (y_\beta \cos \beta - x_\beta \sin \beta) = y_\lambda \sin \beta + \frac{\sin \beta}{y} D + x_\lambda \cos \beta$$

$$-y_\lambda \cos \beta + x_\lambda \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\lambda} y_\beta - \frac{\cos \beta}{\lambda} x_\beta$$

$$D = x_\lambda y_\beta - x_\beta y_\lambda$$

Выразив из (2) x_β , x_λ через y , y_λ , y_β , β , λ , перекрестным дифференцированием, приведем систему (2) к одному уравнению второго порядка относительно y .

Граничные условия могут быть получены из условия непротекания и уравнений (2). Недостатком этого метода является некоторая громоздкость записи уравнения и граничных условий.

2. Уравнение для потенциала координат $\Phi = \Phi(u, v)$, $\Phi_u = x$, $\Phi_v = y$.

Если обозначить $u = \lambda \cos \beta$ и $v = \lambda \sin \beta$, то система может быть приведена к виду

$$(3) \quad M^2-1 [u_x \cos^2 \beta + v_x \sin \beta \cos \beta + u_y \sin \beta \cos \beta + v_y \sin^2 \beta] =$$

$$= -v_x \cos \beta \sin \beta + u_x \sin^2 \beta + v_y \cos^2 \beta - u_y \cos \beta \sin \beta + v/y, \quad v_x = u_y$$

Отсюда, переходя к независимым переменным u , v , получим для потенциала координат Φ

$$(4) \quad \Phi_{vv} [\cos^2 \beta (M^2-1) - \sin^2 \beta] - 2\Phi_{uv} [(M^2-1) \sin \beta \cos \beta + 1] +$$

$$+ \Phi_{uu} [\sin^2 \beta (M^2-1) - c^2] = v/\Phi_v [\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2]$$

$$\beta = \arctg v/u$$

Граничные условия для (4) в плоскости uv содержат интегральные члены.

3. Уравнение для функции тока ψ в переменных Чаплыгина α , β , где $\alpha = \lambda^2(\kappa-1)/(\kappa+1)$, $a_1 = (\kappa-1)/(\kappa+1)$.

Уравнения осесимметричного стационарного безвихревого движения могут быть сведены к системе уравнений относительно v_x , v_y

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[y v_x \left(1 - \frac{a_1}{a_*^2} (v_x^2 + v_y^2) \right)^{1/(\kappa-1)} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[y v_y \left(1 - \frac{a_1}{a_*^2} (v_x^2 + v_y^2) \right)^{1/(\kappa-1)} \right] = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Введем функцию тока ψ

$$(6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -y \frac{a_*}{\sqrt{a_1}} \alpha^{1/2} (1-\alpha)^{1/(\kappa-1)} \sin \beta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = y \frac{a_*}{\sqrt{a_1}} \alpha^{1/2} (1-\alpha)^{1/(\kappa-1)} \cos \beta$$

Выделим отдельно часть, содержащую нелинейные члены

$$(7) \quad \cos \beta \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{a_1 - \alpha}{2a_1 \alpha (1-\alpha)} \left(\sin \beta \frac{\partial x}{\partial \beta} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) + f = 0$$

$$2\alpha \left(\sin \beta \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \cos \beta \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) + \cos \beta \frac{\partial x}{\partial \beta} + \sin \beta \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0$$

$$f = \frac{\sin \beta}{y} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -y \frac{a_*}{\sqrt{a_1}} \alpha^{1/2} (1-\alpha)^{1/(\kappa-1)} \left[\sin \beta \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \cos \beta \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]$$

(8)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -y \frac{a_*}{\sqrt{a_1}} \alpha^{1/2} (1-\alpha)^{1/(\kappa-1)} \left[\sin \beta \frac{\partial x}{\partial \beta} - \cos \beta \frac{\partial y}{\partial \beta} \right]$$

Решая (7) и (8) относительно производных, получим

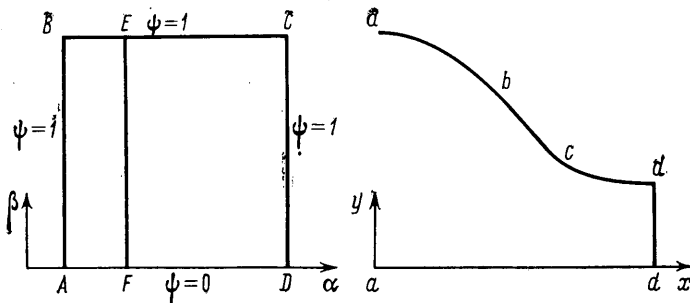
(9)

$$\begin{aligned} \sin \beta \left\{ 4a_1 \alpha^2 (1-\alpha) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + (a_1 - \alpha) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. + 4a_1 \alpha \left[1 - \alpha \left(\frac{1}{\kappa-1} - 1 \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right\} = \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ f = \frac{\sin^2 \beta \{ 4a_1 \alpha^2 (1-\alpha) (\partial^2 \psi) / (\partial \alpha^2) + (a_1 - \alpha) (\partial^2 \psi) / (\partial \beta^2) \}}{\sin \beta \partial \psi / \partial \beta + a_* / \sqrt{a_1} \alpha^{1/2} (1-\alpha)^{1/(\kappa-1)} y^2} \end{aligned}$$

Значение y^2 находим в каждой точке по формуле

$$y^2 = \frac{4a_* \alpha^{3/2}}{\sqrt{a_1}} (1-\alpha)^{1/(\kappa-1)} \int_0^\beta \sin \xi \frac{\partial \psi(\alpha, \xi)}{d\alpha} d\xi + 2 \int_0^\beta \cos \beta \frac{\partial \psi(\alpha, \xi)}{d\beta} d\xi$$

Для уравнения (9) в плоскости годографа формулируется задача Дирихле в прямоугольнике со сторонами $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, опирающемся на отрезок звуковой линии. Область не обязательно является прямоугольником, она может быть ограничена любой кривой в полуплоскости дозвуковой скорости, имеющей общую точку



Фиг. 1

с линией $\alpha = (\kappa-1)/(\kappa+1)$ (ее образ в физической плоскости — прямая звуковая линия). В данной работе, как и в [1], форма области — прямоугольник $G \{ \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_0 \}$. Прямоугольнику $ABCD$ соответствует в физической области контур сопла $abcd$.

Граничные условия для функции тока задаются в виде разрывной кусочно-постоянной функции (фиг 1)

$$\begin{aligned} \psi = 0 \quad (\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta = 0), \quad \psi = 1 \quad (\alpha = \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_0) \\ \psi = 1 \quad (\alpha = \alpha_0, 0 \leq \beta \leq \beta_0), \quad \psi = 1 \quad (\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta = \beta_0) \end{aligned}$$

Аппроксимирующая система алгебраических уравнений для уравнения (9) получена заменой в дифференциальном уравнении производных центральными разностными формулами. Решение аппроксимирующей системы проводилось методом итераций по явной двухслойной схеме Якоби на пятиточечном шаблоне. Для получения конечной информации — координат сопла $y = y(\alpha, \beta)$ и $x = x(\alpha, \beta)$ — необходимо выполнить контурное интегрирование по границе области по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= \frac{1}{Q(\alpha)y} \left\{ -\sin \beta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + R(\alpha) \cos \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} f \right\} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} &= \frac{1}{Q(\alpha)y} \left\{ 2\alpha \cos \beta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{Q(\alpha)y} \left\{ \cos \beta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - R(\alpha) \sin \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + f \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{1}{Q(\alpha)y} \left\{ 2\alpha \sin \beta \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \cos \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right\}$$

$$f = \sin^2 \beta \frac{2\alpha (\partial \psi / \partial \alpha)^2 + R(\alpha) (\partial \psi / \partial \beta)^2}{\sin \beta (\partial \psi / \partial \beta) + Q(\alpha) r^2}$$

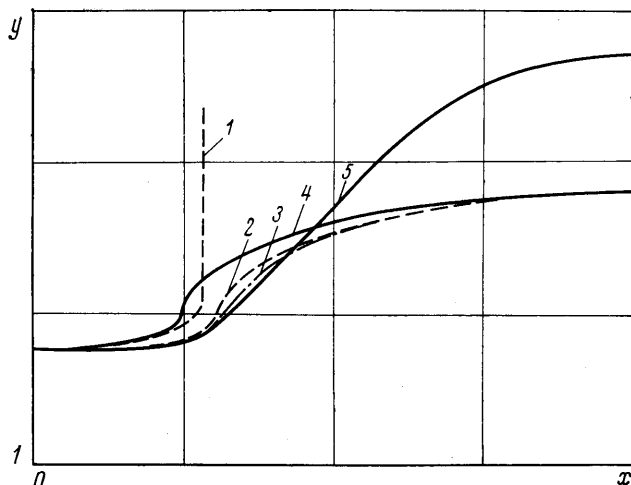
$$Q(\alpha) = \frac{(a_1 - \alpha)}{2a_1\alpha(1 - \alpha)}, \quad R(\alpha) = \frac{a_*}{\sqrt{a_1}} \alpha^{1/2} (1 - \alpha)^{1/(k-1)}$$

Вычисление проводилось по квадратурным формулам [2] с погрешностью $O(h^3)$. Производная на границе области вычислялась по разностным формулам

$$\alpha = a_1 \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right|_i = \frac{3\psi_i - 4\psi_{i-1} + \psi_{i-2}}{2h}$$

$$\alpha = \alpha_0 \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right|_j = \frac{-3\psi_j + 4\psi_{j+1} - \psi_{j+2}}{2h}$$

Одна из трудностей численного решения задачи связана с наличием в уравнении смешанной производной. Ее аппроксимация на семиточечном шаблоне позволила избежать неустойчивости, возникающей при использовании девятиточечного шаб-



Фиг. 2

лона. Другая трудность была обусловлена наличием разрыва первого рода граничной функции в точке A (фиг. 1). В отличие от плоского случая [1] ввиду существенной нелинейности уравнения (9) выделение особенности здесь не могло быть проведено, поэтому решение проводилось так, как если бы граничная функция была непрерывна.

Анализ, проведенный для уравнения Лапласа [3], показывает, что конечная погрешность при этом сосредоточена вблизи точки разрыва. В случае общего эллиптического уравнения, по-видимому, этот результат остается в силе, хотя, как показывает опыт, возникает некоторая анизотропия в распределении погрешности вблизи точки разрыва: если узел линий уровня, исходящих из точки разрыва, не звездообразный (как в случае уравнения Лапласа), то погрешность «концентрируется» вблизи главного направления узла. Узел линий $\psi = \text{const}$ в точке D в обоих случаях (и плоском, и осесимметричном) не звездообразный, с главным направлением — осью $\beta = 0$. Однако координаты x, y вдоль этой оси не вычислялись, а координаты x, y контура сопла вблизи звуковой точки (которому соответствует исключительное направление в точке (и в плоском, и в осесимметричном случаях) без выделения особенности) получились с достаточно малой погрешностью.

В точке A узел линий $\psi = \text{const}$ в плоском случае звездообразный, а в осесимметричном имеет главное направление, соответствующее контуре сопла. Поэтому для получения координат x, y контура сопла во входной части с удовлетворительной точностью расчет проводился в два приема — сначала решалась задача Дирихле в прямоугольнике $ABCD$, а затем — в прямоугольнике $ABEF$ с меньшим шагом по α и с использованием в качестве граничного условия на прямой EF значения ψ из предыдущего расчета. Это равносильно уменьшению шага по α вблизи $\beta = 0$.

Еще одна особенность заключается в том, что если входная скорость достаточно мала ($\alpha_{\text{вх}} \leq h(\alpha)$), то погрешность расчета решения вблизи AB возрастает из-за обращения в нуль коэффициента при $\psi_{\alpha\alpha}$. Чтобы избежать увеличения погрешности при профилировании сопел этого класса, целесообразно применять растяжение координаты α такое, чтобы значение $\alpha = 0$ переходило в новых координатах в бесконечно удаленную точку. При расчете сопла с нулевой входной скоростью в этом нет необходимости.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2. Контурные дозвуковых участков (кривые 1–5 на фиг. 2) соответствуют следующим значениям угла наклона прямолинейного участка β и входной скорости α :

- 1 — $\beta = 90, \alpha = 0$; 2 — $\beta = 60, \alpha = 0,01$;
3 — $\beta = 45, \alpha = 0,01$; 4 — $\beta = 90, \alpha = 0,01$;
5 — $\beta = 45, \alpha = 0,001$.

В заключение отметим, что использование метода годографа для профилирования осесимметричных сопел не только возможно, но и позволяет с достаточно высокой точностью определять координаты сопла, поток в котором обладает заранее заданными свойствами.

Поступила 8 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Подсыпанина Н. А., Шифрин Э. Г. Об одном методе профилирования коротких плоских сопел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., «Наука», 1967.
3. Андреев В. Б., Краквина С. А. Аппроксимация задачи о несовершенной скважине. В сб. «Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений». М., Изд. МГУ, 1973.

УДК 532.543:533.697

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В КАНАЛАХ ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

И. Г. ПАНЕВИН, М. Г. СМОЛИН

(Москва)

Приводятся результаты экспериментального исследования ламинарного течения жидкости в открытых каналах треугольной формы при наличии касательного напряжения трения на свободной поверхности. Эксперименты проводились в условиях, когда течение жидкости происходило в наклонных каналах треугольной формы при числах Рейнольдса $R < 10$, а рабочий диапазон чисел Рейнольдса набегающего потока воздуха составлял $R = (1,6 - 3,6) \cdot 10^4$. Данные представлены в относительных координатах в виде зависимости коэффициента гидравлического сопротивления жидкости от касательного напряжения трения на свободной поверхности. Показано, что с ростом касательного напряжения трения коэффициент гидравлического сопротивления значительно увеличивается.

В настоящее время в ряде теплотехнических устройств для снятия и передачи высокоинтенсивных тепловых потоков применяются тепловые трубы. Величина теплового потока, передаваемого вдоль тепловой трубы, во многом определяется расходом жидкости в капиллярах. При наличии открытой капиллярной структуры существенно взаимодействие парового потока со свободной поверхностью жидкости. Влияние трения парового потока на характеристики течения жидкости в открытых капиллярных каналах прямоугольной формы рассмотрено в [1].

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования ламинарного течения жидкости со свободной поверхностью в каналах треугольной формы. Парожидкостное взаимодействие изучалось в модельных условиях. Движение жидкости (этилового спирта) происходило в наклонных капиллярных каналах под действием силы тяжести. Поток пара в паровой полости тепловой трубы заменялся потоком воздуха, текущего навстречу жидкости.