

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СОСУДАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Е. Б. ГЛЕДЗЕР, А. М. ОБУХОВ, В. М. ПОНОМАРЕВ

(Москва)

В последние годы в задачах геофизической гидродинамики все чаще используются малопараметрические модели, получаемые при аппроксимации уравнений гидродинамики конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Галеркина). В связи с этим в работах [1-4] было введено понятие нелинейных систем гидродинамического типа и показано, что движение жидкости в эллипсоидальной полости, при котором поле скорости является линейной функцией координат, может служить одним из простейших примеров таких систем. При этом поле скорости представляется в виде суммы трех базисных, линейных по координатам полей, удовлетворяющих условиям несжимаемости и граничным условиям. Ряд экспериментов, проведенных для течения маловязкой жидкости в эллипсоиде [5], показал, что при определенных соотношениях полуосей эллипсоида такой аппроксимации недостаточно для описания наблюдаемых явлений. Поэтому набор базисных полей необходимо дополнять более сложными функциями. Аналогичные эксперименты, проведенные для движения жидкости внутри эллиптического цилиндра [6], показали, что устойчивость основного течения жидкости — эллиптического вращения вокруг центральной оси цилиндра, а также тип возникающих неустойчивых возмущений, приводящих к появлению вторичных течений, зависят от высоты цилиндра и соотношения полуосей эллипса в его основании.

В настоящей работе проводится исследование устойчивости вращения жидкости в эллиптическом цилиндре и намечается подход для описания аналогичных течений в сосудах более общего вида, в которых сечения, перпендикулярные центральной оси, суть подобные эллипсы. Указаны области неустойчивости течения относительно крупномасштабных возмущений в эллиптическом цилиндре. Приводится сравнение с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим движение невязкой несжимаемой жидкости в объеме, ограниченном поверхностью Γ

$$(1.1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = f^2\left(\frac{z}{L}\right), \quad z=0, \quad z=L$$

Движение жидкости описывается уравнениями

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right), \quad \text{div } \mathbf{u} = 0$$

$$(1.3) \quad \mathbf{un}|_{\Gamma} = 0$$

Здесь \mathbf{u} — скорость, p — давление, ρ — плотность, \mathbf{n} — нормаль к поверхности Γ .

Легко проверить, что стационарным решением задачи (1.2), (1.3) является

$$(1.4) \quad \mathbf{u}_0 = \Omega \left(-\frac{a}{b} y \mathbf{i} + \frac{b}{a} x \mathbf{j} \right), \quad p = \frac{\rho \Omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

Это движение характеризуется постоянной завихренностью $\text{rot } \mathbf{u}_0$ и может быть получено, например, после резкой остановки вращения полости с жидкостью относительно оси z с заданной угловой скоростью $2 \text{ rot } \mathbf{u}_0$.

Для исследования устойчивости этого течения линеаризуем систему (1.2) относительно решения (1.4). При этом удобно перейти к безразмерным координатам, получаемым аффинным преобразованием

$$(1.5) \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad R = \sqrt{1/2(a^2 + b^2)}$$

Преобразование (1.5) переводит эллипсы в окружности, а поверхность Γ переходит в поверхность Γ'

$$(1.6) \quad x'^2 + y'^2 = f^2 \left(\frac{R}{L} z' \right), \quad z' = 0, \quad z' = \frac{L}{R}$$

Вводя также новые переменные

$$(1.7) \quad u_x' = \frac{u_x}{a}, \quad u_y' = \frac{u_y}{b}, \quad w' = \frac{w}{R}, \quad p' = \frac{p}{\rho \Omega R^2}, \quad t' = \Omega t$$

получаем, что развитие начальных возмущений в линейном приближении описывается уравнениями (штрихи везде ниже опускаем)

$$(1.8) \quad \begin{aligned} (1+\varepsilon)(Du_x - u_y) &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & (1-\varepsilon)(Du_y + u_x) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ Dw &= -\frac{\partial p}{\partial z}, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ D &= \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, & \varepsilon &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Здесь ε — параметр, характеризующий отклонение эллипсов (1.1) от окружностей.

Граничные условия для системы (1.8) сохраняют свой прежний вид (1.3) с вектором нормали \mathbf{n} к поверхности (1.6). Отметим, что в преобразованных переменных кинетическая энергия движения жидкости определяется выражением

$$E = R^2 [(1+\varepsilon)u_x^2 + (1-\varepsilon)u_y^2 + w^2]$$

Эти уравнения образуют систему, не являющуюся системой Ковалевской. Анализ ее решений при $\varepsilon=0$ рассмотрен в [7]. Для неограниченного пространства задача Коши решается в явном виде. Исследование поведения решений системы (1.8) при больших значениях t для ограниченного пространства значительно усложняется при $\varepsilon \neq 0$. Поэтому в этом случае естественно попытаться получить ее решение с помощью теории возмущений по параметру ε или методом Галеркина.

Переходя к цилиндрической системе координат (r, φ, z) и к компонентам скорости $\mathbf{u} = \{u_r, u_\varphi, w\}$, представим систему (1.8) в виде

$$(1.9) \quad M \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H \mathbf{u} \right] = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$(1.10) \quad \Lambda = \begin{Bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

где оператор $H = I \frac{\partial}{\partial \varphi} + \Lambda$, $M = I + \varepsilon T$, I — единичная матрица.

Рассмотрим предварительно задачу на собственные значения

$$(1.11) \quad H\mathbf{u} + \nabla p = -i\omega\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}\mathbf{n}|_{\Gamma'} = 0$$

Введем скалярное произведение по формуле

$$(1.12) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{u}\bar{\mathbf{v}} d\tau$$

где интегрирование проводится по объему, заключенному внутри поверхности Γ . Заметим, что оператор iH самосопряженный, поэтому собственные значения ω в (1.11) вещественны (физически это соответствует устойчивости квазитвердого вращения жидкости внутри кругового цилиндра), а собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.

Так как координата φ не входит в граничные условия, то систему собственных функций можно представить в виде

$$(1.13) \quad \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha(r, z) e^{in\varphi}, p_\alpha = p_\alpha(r, z) e^{in\varphi}, (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

В (1.13) для удобства введен «векторный» индекс $\alpha = \{n, l\}$, в котором l нумерует собственные значения ω_α при заданном n . Ниже он обозначается греческими буквами. Из (1.11) следует, что система функций $\{\mathbf{u}_\alpha\}$ выражается через $\{p_\alpha\}$ согласно соотношениям

$$(1.14) \quad \begin{aligned} u_{r\alpha} &= -\frac{i}{4-q_\alpha^2} \left[q_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial r} + \frac{2n}{r} p_\alpha \right] e^{in\varphi} \\ u_{\varphi\alpha} &= \frac{1}{4-q_\alpha^2} \left[2 \frac{\partial p_\alpha}{\partial r} + \frac{q_\alpha n}{r} p_\alpha \right] e^{in\varphi} \\ w_\alpha &= \frac{i}{q_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial z} e^{in\varphi} \end{aligned}$$

а p_α удовлетворяет уравнению

$$(1.15) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p_\alpha}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} p_\alpha - \frac{4-q_\alpha^2}{q_\alpha^2} \frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial z^2} = 0$$

$$(1.16) \quad q_\alpha = \omega_\alpha + n$$

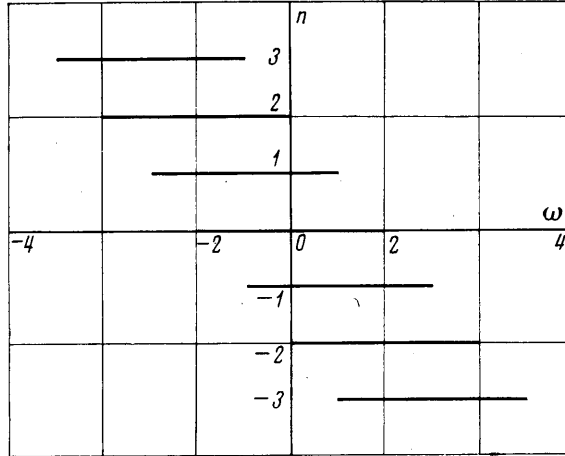
Граничные условия для p_α следуют из (1.3) и (1.4). Отметим, что при использовании реального времени собственные частоты определяются соотношением $\omega_\alpha = (q_\alpha - n)\Omega$.

Указанная задача является по существу задачей о малых колебаниях жидкости, покоящейся во вращающейся системе, которые определяются уравнениями

$$(1.17) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения системы. При $\boldsymbol{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$, используя преобразование времени (1.7) и представляя решение (1.17) в виде $\mathbf{u} e^{i\Omega t}$, получаем уравнения (1.14) и (1.15). Переход к лабораторной системе координат приводит к сдвигу частот, определяемому соотношением (1.16). Заметим, что из уравнений (1.15) и (1.17) следует, что $|q_\alpha| \leq 2$.

Из уравнений (1.11) следует, что собственные значения ω_α расположены симметрично относительно нуля (общий вид расположения спектра показан на фиг. 1) и система собственных функций может быть выбрана таким образом, что при замене ω на $-\omega$ соответствующая собственная функция переходит в комплексно-сопряженную.



Фиг. 1

Ниже будем предполагать, что система собственных функций выбрана именно таким образом, и если существуют вырожденные собственные значения, то принадлежащие им собственные функции выбраны ортогональными.

Предполагая спектр задачи (1.11) дискретным, будем искать решение (1.9) в виде

$$(1.18) \quad \mathbf{u} = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} e^{ist}$$

При этом второе уравнение (1.9) и граничные условия выполняются автоматически, а из первого уравнения следует

$$(1.19) \quad M \sum_{\alpha'} (is + H) C_{\alpha'} \mathbf{u}_{\alpha'} = -\nabla p$$

Умножая скалярно обе части (1.19) на \mathbf{u}_{α} , получаем систему уравнений

$$(1.20) \quad (s - \omega_{\alpha}) C_{\alpha} N_{\alpha}^2 + \varepsilon (s + n) \sum_{\alpha'} V_{\alpha\alpha'} C_{\alpha'} = 0$$

$$(1.21) \quad N_{\alpha}^2 = (\mathbf{u}_{\alpha}, \mathbf{u}_{\alpha}), \quad V_{\alpha\alpha'} = (T\mathbf{u}_{\alpha'}, \mathbf{u}_{\alpha})$$

При получении (1.20), (1.21) использовано легко проверяемое соотношение $T\Delta = \partial T / \partial \varphi$.

Из вида матрицы T (1.10) и собственных функций \mathbf{u}_{α} (1.14) следует, что коэффициенты взаимодействия удовлетворяют условию

$$(1.22) \quad V_{\alpha\alpha'} = \bar{V}_{\alpha'\alpha}$$

и отличны от нуля только для собственных функций с волновыми числами n и n' , отличающимися одно от другого на 2. Следовательно, $V_{\alpha\alpha} = 0$.

Применяя теорию возмущений по параметру ε к решению уравнения (1.20) (см., например, [8]), получаем, что поправка к невырожденному собственному значению ω_α имеет вид

$$(1.23) \quad s - \omega_\alpha = \frac{\varepsilon^2 (\omega_\alpha + n)}{N_\alpha^2} \sum_{\alpha \neq \alpha'} \frac{(\omega_\alpha + n') V_{\alpha\alpha'} V_{\alpha'\alpha}}{(\omega_\alpha - \omega_{\alpha'}) N_{\alpha'}^2}$$

Учитывая (1.22), получаем, что по крайней мере при достаточно малых значениях ε поправка к невырожденному собственному значению действительная.

Формула (1.23) несправедлива для случая вырождения собственных значений. Из вида спектра на фиг. 1 следует, что могут совпадать собственные значения с волновыми числами n и $n \pm 2$, причем следует учитывать только это вырождение, так как моды с волновыми числами n и $n \pm 1$ не взаимодействуют. Рассмотрим для определенности случай, при котором $\omega_{n1} = \omega_{n-2, 1'}$ и, следовательно, $q_{n1} > 0$, а $q_{n-2, 1'} = q_{n1} - 2$.

Поправка к этому собственному значению имеет вид

$$(1.24) \quad s - \omega_{n1} = \pm i\varepsilon \frac{|V_{n1, n-2, 1'}|}{N_{n1} N_{n-2, 1'}} \sqrt{q_{n1}(2 - q_{n1})}$$

Таким образом, снятие вырождения приводит к появлению у собственных значений мнимой части, что отвечает экспоненциальному росту соответствующих начальных возмущений, и возможность возбуждения тех или иных мод определяется геометрией сосуда.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости течения (1.4) в эллиптическом цилиндре. При преобразовании (1.5) эллиптический цилиндр переходит в круговой, и с учетом граничных условий решение (1.15) можно представить в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} p_\alpha &= -(4 - q_\alpha^2) J_n(h_\alpha r) \cos k_m z e^{i n \varphi} \\ q_\alpha^2 &= 4k_m^2 / (k_m^2 + h_\alpha^2), \quad k_m = m\pi R/L, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

где J_n — функция Бесселя первого рода порядка n ; h_α (при заданных m и n) определяются граничным условием $u_r|_{r=1} = 0$ и являются корнями уравнения

$$(2.2) \quad q_\alpha h_\alpha \frac{\partial J_n(h_\alpha)}{\partial h_\alpha} + 2n J_n(h_\alpha) = 0, \quad \alpha = \{m, n, j\}. \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Индекс j нумерует корни уравнения (2.2) в порядке их возрастания. Система собственных функций $\{u_\alpha\}$ принимает соответственно вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_{r\alpha} &= i \left[q_\alpha \frac{\partial J_n(h_\alpha r)}{\partial r} + \frac{2n}{r} J_n(h_\alpha r) \right] \cos k_m z e^{i n \varphi} \\ u_{\varphi\alpha} &= - \left[2 \frac{\partial J_n(h_\alpha r)}{\partial r} + \frac{n q_\alpha}{r} J_n(h_\alpha r) \right] \cos k_m z e^{i n \varphi} \\ w_\alpha &= i \frac{q_\alpha h_\alpha^2}{k_m} J_n(h_\alpha r) \sin k_m z e^{i n \varphi} \end{aligned}$$

Вычисление нормы и коэффициентов взаимодействия в (1.20) с помощью системы функций (2.3) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha}^2 &= \pi \frac{L}{R} 2 \left[2h_{\alpha}^2 + n(2n - q_{\alpha}) \frac{4 - q_{\alpha}^2}{q_{\alpha}^2} \right] J_n^2(h_{\alpha}) \\
 (2.4) \quad V_{\alpha\alpha'} &= \pi \frac{L}{R} \frac{h_{\alpha} h_{\alpha'}}{2} \delta_{mm'} \left[\delta_{n, n'+2} (2 + q_{\alpha}) (2 - q_{\alpha'}) \times \right. \\
 &\times \int_0^1 J_{n-1}(h_{\alpha} r) J_{n-1}(h_{\alpha'} r) r dr + \delta_{n, n'-2} (2 - q_{\alpha}) (2 + q_{\alpha'}) \times \\
 &\times \left. \int_0^1 J_{n+1}(h_{\alpha} r) J_{n+1}(h_{\alpha'} r) r dr \right]
 \end{aligned}$$

При этом системы уравнений для различных значений m оказываются независимыми и суммирование в (1.20) фактически проводится лишь по n' и j' в $\alpha' = \{m, n', j'\}$.

Ограничимся анализом крупномасштабных возмущений, которые менее всего подвержены влиянию вязкости и, следовательно, могут наблюдаться в эксперименте при умеренных числах Рейнольдса. Для этого следует рассмотреть моды с $n = \pm 1$. Кроме того, рассмотрим пока только взаимодействие моды со своей «сопряженной». В этом случае система (1.20) при заданном m принимает вид

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad (s - q_j + 1) C_{1, j} + \varepsilon (s + 1) A_j C_{-1, j} &= 0 \\
 \varepsilon (s - 1) A_j C_{1, j} + (s + q_j - 1) C_{-1, j} &= 0 \\
 A_j &= \pi \frac{L}{R} (2 + q_j)^2 h_j^2 \int_0^1 J_0^2(h_j r) r dr / 2N_{1, j}^2
 \end{aligned}$$

В результате получаем уравнение для s

$$(2.6) \quad s^2 = [(1 - q_j)^2 - \varepsilon^2 A_j^2] / (1 - \varepsilon^2 A_j^2)$$

которое определяет параметры цилиндра, при которых происходит экспоненциальный рост начальных возмущений. При вырождении собственного значения $\omega = 0$ ($q_j = 1$) инкремент нарастания имеет порядок ε . Области неустойчивости и значения инкрементов роста мод с $n = \pm 1$ приведены на фиг. 2 в координатах $(\varepsilon, L/R)$. Области неустойчивости обозначены символами Σ_l^m , где m указывает на периодичность возмущения по оси z , а l — на номер корня уравнения (2.2) при $n = 1$, $q > 0$, так как согласно (2.6) только такие возмущения при малых значениях ε неустойчивы. Легко заметить, что корни уравнения (2.2) h_l расположены между корнями λ_{l-1} и λ_l уравнения $J_1(\lambda) = 0$ ($\lambda_0 = 0$). Поэтому $l - 1$ равно числу смены знака осевой компоненты скорости по оси r и, следовательно, l можно рассматривать как число «вихрей» по оси r .

Для ясности на фиг. 2 приведены только области, соответствующие наиболее крупномасштабным возмущениям.

Для оценки точности расчета областей неустойчивости по уравнению (2.6) учитывались в (1.20) соседние по j моды, что приводило к уравнению четвертого порядка для s . Заметного изменения границ областей неустойчивости при $\varepsilon < 0.6$ не происходило.

На фиг. 2 также указаны области, для которых в экспериментах, выполненных Ю. В. Новиковым, А. М. Касаткиным и Ю. Л. Черноусько, наблюдалась неустойчивость вращения в эллиптическом цилиндре. Эксперименты проводились для цилиндра с $R=5.5$ см, $\epsilon=0.18$ и переменной высотой. Более подробно эксперименты описаны в [6].

Для исследования влияния вязкости жидкости на устойчивость вращения были проведены дополнительные эксперименты, в которых скорость вращения цилиндра изменялась от 60 до 400 об/мин, а вязкость жидкости — от 10^{-2} до $5 \cdot 10^{-2}$ г/см сек. Эти эксперименты показали, что при указанных параметрах вязкость жидкости оказывает довольно слабое влияние на области потери устойчивости, которые достаточно хорошо описываются (2.6).

На фиг. 3 показаны фотографии, полученные при потере устойчивости течения в эллиптическом цилиндре. Фигура 3, а — в соответствии с возмущениями мод $\Sigma_1^3, \Sigma_1^2, \Sigma_1^1$ и получены при $L/R \approx 6, 4, 2$, соответственно. Фотография на фиг. 3 г получена при $L/R \approx 3$ и соответствует устойчивому вращению жидкости.

3. Влияние формы эллиптической полости на устойчивость течения рассмотрим на примере конуса. В деформированной системе координат уравнение конуса

$$(3.1) \quad x^2 + y^2 \leq (R/L)^2 z^2, \quad 0 \leq z \leq L/R$$

Решение уравнения (1.15) при такой геометрии представляет значительные трудности. Поэтому предварительно рассмотрим задачу, в некотором смысле близкую к указанной. Дальнейшие рассуждения проводятся в сферической системе координат (θ, φ, ρ) .

Формально предположим, что распределение Ω в уравнении (1.17) имеет вид $\Omega = \{0, 0, 1\}$ (вместо $\Omega = \{-\sin \theta, 0, \cos \theta\}$). В этом случае уравнение для p принимает более простой вид

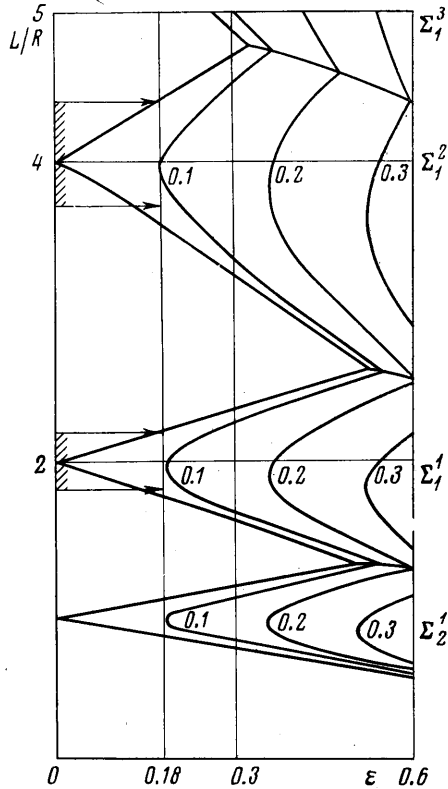
$$(3.2) \quad \Delta_{\theta, \varphi} p - \frac{4 - q^2}{q^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} = 0$$

где $\Delta_{\theta, \varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа. В уравнении (3.2) $0 \leq \theta \leq \theta_0 = \arctg R/L$. Кроме того, предположим, что конус накрыт сверху сферической крышкой $\rho = L/R$. Тогда решение уравнения (3.2), удовлетворяющее граничным условиям, можно представить в виде

$$(3.3) \quad p_\alpha = P_\alpha^n(\cos \theta) \rho^{-1/2} \cos \left(k_\alpha \ln \rho \frac{R}{L} + \beta_\alpha \right)$$

где P_α^n — присоединенная функция Лежандра, а параметры θ, k_α и β_α связаны соотношениями

$$k_\alpha^2 = \frac{\theta(\theta+1)q_\alpha^2}{4 - q_\alpha^2} - \frac{1}{4}$$



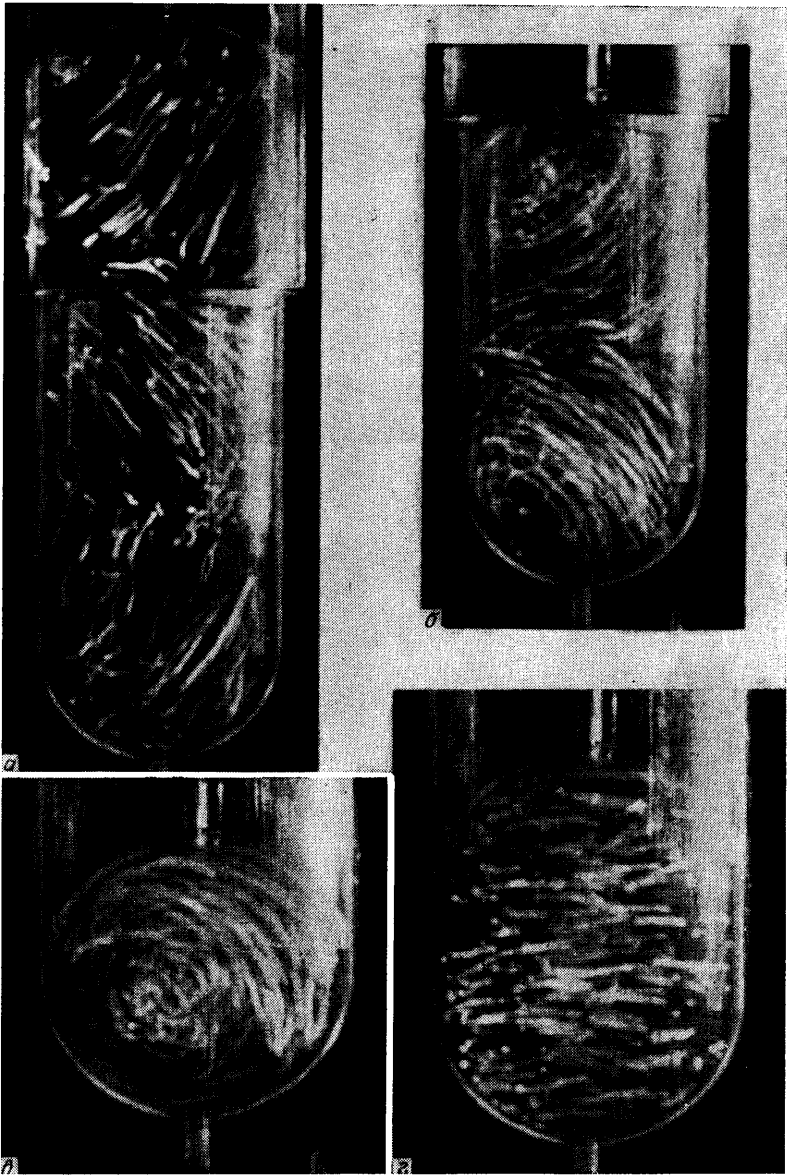
Фиг. 2

$$(3.4) \quad \left(q_\alpha \frac{\partial P_\phi^n}{\partial \theta} + \frac{2n}{\sin \theta} P_\phi^n \right) \Big|_{\theta=\theta_0} = 0$$

$$\operatorname{tg} \beta_\alpha = -\frac{1}{2k_\alpha}$$

Первое из этих соотношений есть просто следствие разделения переменных в (3.2), а остальные два следуют из граничных условий.

Отметим, что в этом случае спектр оказывается непрерывным, так как никаких граничных условий при $\rho \rightarrow 0$ выставить нельзя. Поэтому ограничим конус вблизи угла. Пусть $\rho \geq \rho_0 = \sigma L/R$ ($\sigma < 1$). Тогда с учетом граничных условий при $\rho = \rho_0$ полу-



Фиг. 3

чаем, что k_α должен принимать дискретный ряд значений

$$(3.5) \quad k_m = -\frac{m\pi}{\ln \sigma}, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

При условии $R/L \ll 1$ решение (3.3) можно рассматривать как приближенное решение задачи (1.15). Так, если воспользоваться теорией возмущений, то можно показать, что собственные значения задачи (1.15) отличаются от q_α , определяемых (3.4), (3.5), на величину порядка $(R/L)^2$. Поэтому эти функции можно использовать для исследования устойчивости в конусе при $R/L \ll 1$. С другой стороны, с точностью до членов порядка $(\sin \theta/2)^2$ имеем [9]

$$(3.6) \quad P_\Phi^n = \text{const } J_n \left(h_\alpha \frac{\sin \theta/2}{\sin \theta_0/2} \right), \quad h_\alpha = (2\Phi + 1) \sin \frac{\theta_0}{2}.$$

Пренебрегая далее членами порядка θ^2 , получаем, что уравнения (1.20), описывающие развития начальных возмущений в эллиптическом конусе, аналогичны уравнениям для эллиптического цилиндра (2.5) с длиной

$$(3.7) \quad \frac{L}{R} = -2 \sin \frac{\theta_0}{2} \ln \sigma$$

Согласно (3.3) при потере устойчивости вращения жидкости в эллиптическом конусе должна образовываться группа вихрей с размерами по оси z , изменяющимися в геометрической прогрессии. Отношение размеров соседних вихрей

$$(3.8) \quad \ln \frac{\rho_{m+1} - \rho_m}{\rho_m - \rho_{m-1}} = \frac{\pi}{k_\alpha} \approx \pi \frac{\sqrt{4 - q_\alpha^2} \cdot 2 \sin \theta_0/2}{q_\alpha h_\alpha}$$

Одному «вихрю» по углу соответствует значение $h_\alpha \approx 2.72$ ($q_\alpha = 1$).

Легко видеть, что все формулы, полученные для эллиптического цилиндра, следуют из результатов данного пункта при замене $\frac{\sin \theta/2}{\sin \theta_0/2}$ на r и предельном переходе $\theta_0 \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 1$ ($L/R \rightarrow \infty$).

В заключение отметим, что исследованный на устойчивость класс течений жидкости характеризуется постоянной в пространстве завихренностью и может быть легко реализован в эксперименте.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Обухов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
2. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
3. Oboukhov A. M., Dolzhansky F. V. On simple models for simulation of nonlinear processes in convection and turbulence. Geophysical Fluid Dynamics, 1975, vol. 6, No. 3.
4. Обухов А. М. О развитии возмущений при гидродинамической неустойчивости. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 4, № 3. Новосибирск, 1973.
5. Гледзер Е. Б., Новиков Ю. В., Обухов А. М., Чусов М. А. Исследование устойчивости движения жидкости внутри трехосного эллипсоида. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 2.
6. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М., Пономарев В. М. Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости движения жидкости внутри эллиптического цилиндра. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 10.
7. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1954, т. 18, № 1.
8. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1965.