

**К ТЕОРИИ МАЛОВОЗМУЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ**

У. Г. ПИРУМОВ

(*Москва*)

Теория маловозмущенных течений в конических соплах применяется для определения поперечной силы и момента, возникающих при несимметричных возмущениях. Выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения поперечной силы и момента. Построено приближенное аналитическое решение этой системы и изучены его качественные особенности. Проведено сравнение с численным решением.

1. Рассмотрим течение в коническом сопле. Известно, что течение в таком сопле близко к радиальному течению или к течению от источника [1]. Наличие простой аналитической зависимости между скоростью течения и радиальной координатой r в таком течении существенно облегчает исследование течений, близких к радиальным, и позволяет получить аналитическое решение в общем случае маловозмущенных пространственных непотенциальных течений в коническом сопле.

Пусть на радиальное течение наложены малые возмущения. Тогда любой параметр течения будем искать в виде

$$(1.1) \quad f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$$

где f_0 — значение функции в радиальном течении, а ε — параметр малости. В основе используемого ниже метода малых возмущений лежит предположение, что величинами порядка ε^2 можно пренебречь. Для дальнейшего удобно использовать сферическую систему координат r, θ, φ с полюсом в центре источника (фиг. 1). Проекции вектора скорости u, v и w на оси сферической системы координат в соответствии с (1.1) запишем в виде

$$(1.2) \quad u = u_0(r) + \varepsilon u_1, \quad v = \varepsilon v_1, \quad w = \varepsilon w_1$$

поскольку в радиальном течении $v_0 = w_0 = 0$, а u_0 — известная функция координаты r . Подставляя соотношения (1.2) в систему уравнений газовой динамики и производя линеаризацию ее, получим линейную систему уравнений в частных производных для определения u_1, v_1 и w_1 . Ниже индекс 1 у возмущенных параметров будем опускать. Решение этой системы проводится методом разделения переменных Фурье, и в результате для случая потенциальных пространственных возмущений имеем

$$(1.3) \quad ru = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [a_{1kn} z_{1n}(r) + a_{2kn} z_{2n}(r)] \cos k\varphi +$$

$$+ [b_{1kn} z_{1n}(r) + b_{2kn} z_{2n}(r)] \sin k\varphi \} P_n^{(k)}(\theta)$$

$$(1.4) \quad rv = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [a_{1kn} F_{1n}(r) + a_{2kn} F_{2n}(r)] \cos k\varphi +$$

$$+ [b_{1kn} F_{1n}(r) + b_{2kn} F_{2n}(r)] \sin k\varphi \} \frac{dP_n^{(k)}(\theta)}{d\theta}$$

$$(1.5) \quad rw = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [a_{1kn} F_{1n}(r) + a_{2kn} F_{2n}(r)] k \sin k\varphi -$$

$$- [b_{1kn} F_{1n}(r) + b_{2kn} F_{2n}(r)] k \cos k\varphi \} P_n^{(k)}(\theta) \sin^{-1} \theta$$

Здесь составляющие скорости отнесены к критической скорости звука a_* , радиус к r_* — радиусу минимального сечения, $P_n^{(k)}(\theta)$ — присоединенные функции Лежандра, а функции z_{1n} , z_{2n} , F_{1n} , F_{2n} — фундаментальные решения системы уравнений

$$(1.6) \quad 4x \frac{dz_n}{dx} + \left[\frac{4x}{x-1} + \right. \\ \left. + \frac{x(6\kappa^{-1}-1)-1}{1-x\kappa^{-1}} \right] z_n + \\ + n(n+1)F_n = 0 \\ \frac{dF_n}{dx} - \frac{\kappa-1}{4x(1-x\kappa^{-1})} z_n = 0$$

где $\kappa = (\gamma+1) / (\gamma-1)$, γ — отношение удельных теплоемкостей, $x = u_0^2$.

В формулах (1.3) — (1.5) неизвестные константы a_{1kn} , b_{1kn} , так же как и номера k и n определяются из начальных и граничных условий. В частности, для удовлетворения условию непротекания $v=0$ на контуре сопла $\theta=\theta_k$ необходимо номера n выбрать таким образом, чтобы при $\theta=\theta_k$ $dP_n^{(k)} / d\theta|_{\theta=\theta_k}=0$.

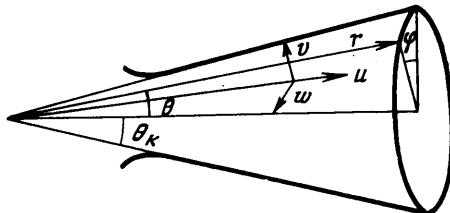
При $k=1$ первые номера соответствующих полиномов Лежандра можно определить из приближенного соотношения, справедливого при $\theta_k \leq \pi/12$ [2]

$$(1.7) \quad n = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} - 3$$

Для больших значений θ_k имеем: $n=6, 5, 4, 3, 2$ при $\theta_k=16, 19, 24, 31$ и 45° соответственно. Анализ представленного решения показывает, что распространение возмущений носит колебательный характер с затухающей по длине сопла амплитудой. При этом число нулей у функций увеличивается с уменьшением угла θ_k . Колебательный характер распространения возмущений связан с отражением волн разрежения (или сжатия) от стенок и от оси сопла. Очевидно, что число таких отражений увеличивается с уменьшением угла θ_k .

Представленное решение пригодно и для дозвуковой области конических сопл. Однако распространение возмущений от дозвуковой до транзвуковой области носит не колебательный характер, а монотонно затухающий.

Методом малых возмущений может быть получено решение для случая $\theta_k=0$, т. е. для течения в цилиндрической трубе. В этом случае возмущения накладываются на поступательный поток с числом M_0 . В ци-



Фиг. 1

линдрических координатах z, r, φ решение для сверхзвукового потока имеет вид:

$$(1.8) \quad u = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n \beta_0 \{ [a_{1n} \cos nz\beta_0 - a_{2n} \sin nz\beta_0] \cos k\varphi - \\ - [b_{1n} \cos nz\beta_0 - b_{2n} \sin nz\beta_0] \sin k\varphi \} I_k(nr)$$

$$v = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [a_{1n} \sin nz\beta_0 + a_{2n} \cos nz\beta_0] \cos k\varphi + \\ + [b_{1n} \sin nz\beta_0 + b_{2n} \cos nz\beta_0] \sin k\varphi \} \frac{dI_k(nr)}{dr}$$

$$rw = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \{ [a_{1n} \sin nz\beta_0 + a_{2n} \cos nz\beta_0] k \sin k\varphi + \\ + [b_{1n} \sin nz\beta_0 + b_{2n} \cos nz\beta_0] k \cos k\varphi \} I_k(nr)$$

Здесь $\beta_0 = (M_0^2 - 1)^{-1/2}$, $I_k(nr)$ — бесселева функция k -го порядка первого рода. Из этих формул также очевиден колебательный характер распространения возмущений. Частота колебаний растет при стремлении числа M_0 к единице. Однако в этом случае не происходит затухания амплитуды колебаний.

Номера n определяются из граничного условия непротекания на стенке, согласно которому $v=0$ при $r=1$. Это означает, что искомые значения n — корни уравнения

$$(1.9) \quad \left. \frac{dI_k(nr)}{dr} \right|_{r=1} = 0$$

которые приближенно могут быть найдены из соотношения

$$n = (k+0.5+2i) \frac{\pi}{2} - \frac{7}{4\pi} (k+0.5+2i)^{-1} \quad (i=0, 1, \dots)$$

2. Рассмотренное решение позволяет в рамках метода малых возмущений определить не только локальные, но и интегральные характеристики в течениях, близких к радиальному.

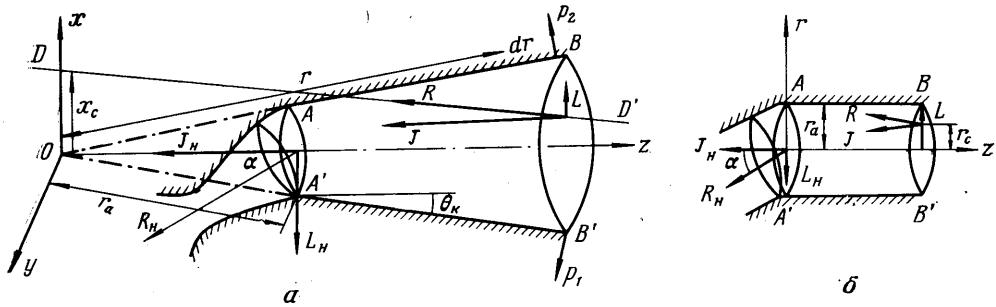
Для практики весьма важно знать величины поперечной силы и момента, возникающих при несимметричных деформациях контура или при несимметричных возмущениях на входе в сопло.

Не ограничивая общности, примем, что несимметричная деформация контура имеет место в плоскости xz , т. е. течение симметрично относительно этой плоскости. Будем характеризовать вектор реактивной силы R ее составляющими — осевой J и боковой L , а также координатой x_c точки пересечения прямой DD' , проходящей через вектор R , с плоскостью xy , проходящей через центр конического сопла (фиг. 2, a). Из законов сохранения количества движения и момента количества движения имеем следующие выражения для боковой силы L и момента M относительно точки O

$$(2.1) \quad L = \int_0^{\theta_k} \int_0^{2\pi} (pn + \rho W_n W) e_x ds$$

$$(2.2) \quad M = \int_0^{\theta_k} \int_0^{2\pi} \rho W_n (\mathbf{W} \times \mathbf{r}) e_y ds$$

где e_x и e_y — единичные орты, W_n — нормальная составляющая вектора скорости. Интегрирование в формулах (2.1), (2.2) производится по сферическому сегменту, опирающемуся на плоскость выходного сечения, так



Фиг. 2

что в сферических координатах $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Предполагая малое отличие течения от радиального, имеем

$$(2.3) \quad L = \rho_0 u_0 r^2 \int_0^{\theta_k} \int_0^{2\pi} \left[u \frac{1-u_0^2}{1-\kappa u_0^2} \sin \theta \cos \varphi + v \cos \theta \cos \varphi - w \sin \varphi \right] \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$(2.4) \quad M = x_c J_0 = \rho_0 u_0 r^3 \int_0^{\theta_k} \int_0^{2\pi} [w \cos \theta \sin \varphi - v \cos \varphi] \sin \theta d\theta d\varphi$$

где ρ_0 — плотность в радиальном течении, отнесенная к критической.

Поскольку плоскость xz является плоскостью симметрии, то в формулах (1.3) — (1.5) коэффициенты $b_{1kn} = b_{2kn} = 0$, кроме того, в (2.3), (2.4) после интегрирования по φ отличными от нуля оказываются лишь члены, соответствующие номеру $k=1$.

Из формул (2.3), (2.4), используя (1.3) — (1.5), получим

$$(2.5) \quad L = -\pi \sin \theta_k \cos \theta_k \rho_0 u_0 r^2 \left\{ \frac{1-u_0^2}{r(1-\kappa u_0^2)} \sum_{n=1}^N [a_{11n} z_{1n}(r) + a_{21n} z_{2n}(r)] \frac{1}{2-n(n+1)} \frac{dP_n}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{11n} F_{1n}(r) + a_{21n} F_{2n}(r)] \frac{n(n+1)}{2-n(n+1)} \frac{dP_n}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_k} \right\}$$

$$(2.6) \quad M = x_c J_0 = -\pi \sin \theta_k \rho_0 u_0 r^3 \sum_{n=1}^N [a_{11n} F_{1n}(r) + a_{21n} F_{2n}(r)] \frac{dP_n}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Рассматривая концевой элемент сопла длины dr (фиг. 2), можно получить связь между приращением боковой силы и момента. В случае плоского конического сопла имеем

$$(2.7) \quad dL = (p_2 - p_1) \cos \theta_k dr, \quad dM = -(p_2 - p_1) r dr \\ rdL = -\cos \theta_k dM$$

где dL — приращение боковой силы при увеличении длины образующей сопла на dr ; p_2 и p_1 — значения давления на элементе dr на верхней и нижней половине, dM — приращение момента относительно точки O . Положительными считаются момент при вращении по часовой стрелке и боковая сила, направленная по оси x .

Соотношение (2.7) точное и справедливо при любых, а не только при маловозмущенных несимметричных течениях. Оно справедливо и для осесимметричного конического сопла; и может быть получено непосредственным дифференцированием L и M , определяемых формулами (2.5) и (2.6).

Поскольку номера n , определяемые формулой (1.7) велики, то при вычислении L и M по формулам (2.5), (2.6) можно ограничиться первыми членами рядов (1.3) — (1.5). Используя систему (1.6), получим с учетом (2.7) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения L и M :

$$(2.8) \quad \frac{dL}{dx} = \frac{1}{4x} L [2 - n(n+1)] - \frac{1}{4xr} Mn(n+1) \cos \theta_k$$

$$(2.9) \quad \frac{dM}{dx} = \frac{rL[2 - n(n+1)]}{4x \cos \theta_k} + \frac{Mn(n+1)}{4x}$$

Для безразмерных функций

$$L^\circ = L/J_0, \quad M^\circ = \frac{2\gamma M}{(\gamma+1)a_*Q} = \frac{z(u_0)x_c}{r_*}$$

имеем

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{dL^\circ}{dx} &= -\frac{\cos \theta_k \sqrt{x}}{r(x+1)} \frac{dM^\circ}{dx} - \frac{(x-1)L^\circ}{2x(x+1)} \\ \frac{dM^\circ}{dx} &= -\frac{r(x+1)[2 - n(n+1)]L^\circ}{4x^{\gamma/2} \cos \theta_k} + \frac{n(n+1)M^\circ}{4x} \\ J_0 &= \frac{\gamma+1}{2\gamma} \rho_0 a_* u_0 z(u_0), \quad z(u_0) = u_0 + u_0^{-1} \end{aligned}$$

Здесь Q — расход. Система (2.10) позволяет найти боковую силу и момент при различных несимметричных возмущениях как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой областях сопла.

При несимметричном течении в цилиндрической трубе с использованием формул (1.8), (1.9) можно получить конечные соотношения для L° и r_c° (фиг. 2, б).

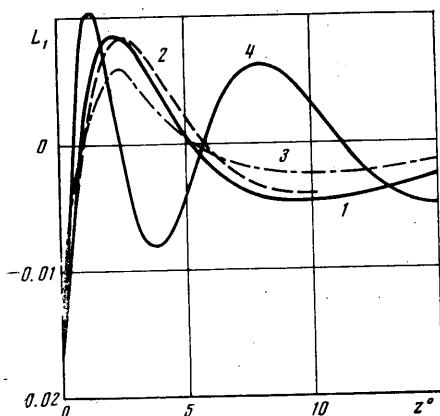
$$(2.11) \quad \begin{aligned} L^\circ &= 1.84 r_{ch}^\circ \beta_0 \sin 1.84 z^\circ \beta_0 + L_h^\circ \cos 1.84 r^\circ \beta_0 \\ r_c^\circ &= r_{ch}^\circ \cos^{1.84} z^\circ \beta_0 - L_h^\circ \frac{\beta_0^{-1}}{1.84} \sin 1.84 z^\circ \beta_0 \end{aligned}$$

где $r_c^\circ = r_c / r_a$, $z^\circ = z / r_a$, L_h° и r_{ch}° — начальные значения L° и r_c° (значение 1.84 есть первый корень уравнения (1.9) при $k=1$).

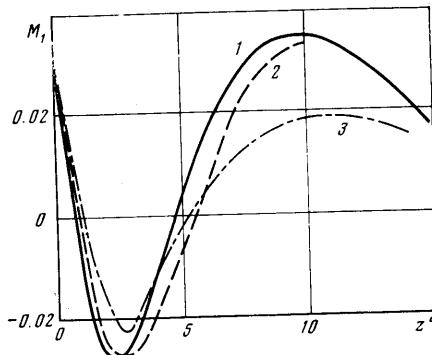
Для интегрирования системы (2.10) и при использовании формул (2.11) необходимо знать начальные значения боковой силы L_H , момента M_H или r_{cH} . В общем случае они определяются экспериментально, однако при относительно простых искажениях контура могут быть найдены из геометрических рассмотрений. Так, при повороте некоторой части сопла относительно оси на угол α в рамках линейной теории имеем в сечении AA' (фиг. 2)

$$(2.12) \quad L_H^{\circ} = -\frac{2\gamma\alpha}{(\gamma+1)z(u_{0H})}, \quad M_H^{\circ} = \frac{2\gamma\alpha r_{aH} \cos \theta_k}{(\gamma+1)}, \quad r_{cH}^{\circ} = 0$$

Индекс H относится к значениям параметров в начальном сечении. Из формул (2.11) следует, что в цилиндрической трубе L° и r_c совершают ко-



Фиг. 3



Фиг. 4

лебания с постоянной амплитудой, определяемой величиной угла α . При увеличении числа M_0 нули функции L° смещаются в сторону больших z .

На фиг. 3, 4 представлены зависимости боковой силы и момента от z° , полученные численным интегрированием уравнений (2.10) для конических сопл с различными углами θ_k и $\gamma=1.2$ и с граничными условиями (2.12) при повороте дозвуковой части сопла в минимальном сечении на угол α , кривая 1 — $\theta_k=10^{\circ}$, 4 — $\theta_k=5^{\circ}$. На этих фигурах

$$M_1 = M^{\circ} (\gamma+1) / \gamma \alpha, \quad L_1 = L^{\circ} (\gamma+1) / \gamma \alpha$$

и α берется в градусах. На этих же фигурах дано сравнение с результатами расчетов по трехмерному методу характеристик [3] (кривая 2). Для определения по значениям L и M величины боковой силы L_a и момента M_a , создаваемых неповернутой частью сопла $AA'B'B$, нужно воспользоваться соотношениями $L_a = L - L_H$, $M_a = M - M_H$.

Проанализируем результаты расчетов. В сечении $A'A$ при $z=0$ при повороте, изображенном на фиг. 2, боковая сила L_H отрицательна. На начальном участке контура AB при натекании струи на него возникает повышенное давление, а на начальном участке контура $A'B'$ давление, очевидно, ниже, чем на AB . Возникающая положительная боковая сила L_a уменьшает начальную отрицательную боковую силу L_H . При увеличении длины сопла возникает точка, в которой $|L_H| = |L_a|$, но знаки этих сил противоположны, так что общая боковая сила $L=0$. На фиг. 3 такие точки соответствуют нулям функции L , при этом полный вектор реактивной силы направлен точно по оси z . При дальнейшем увеличении

длины сопла положительная сила L_a продолжает возрастать, но лишь до тех пор, пока волны сжатия от контура AB , не достигнут контура $A'B'$, а волны разрежения, распространяющиеся от $A'B'$, не достигнут контура AB . С этого момента происходит уменьшение положительной силы L_a и могут вновь возникнуть точки, где $|L_a|=|L_h|$ и $L=0$, а при дальнейшем увеличении длины знак L будет совпадать со знаком L_h . Колебательный характер изменения L , таким образом, очевиден из физических соображений, при этом ясно также, что число нулей функции L тем больше, чем меньше угол θ_k . В отличие от случая течения в цилиндрической трубе колебания происходят с уменьшением амплитуды.

Для момента M характерен также колебательный характер изменения, однако из-за увеличения плеч (т. е. расстояния до центра источника) с увеличением длины сопла происходит увеличение амплитуды колебаний. Представленные на фиг. 3, 4 данные демонстрируют высокую точность линейной теории. Важно, что в рамках линейной теории амплитуда возмущений пропорциональна углу α , а нули функций L и M не зависят от α , поэтому достаточно провести расчеты лишь для одного значения α . В то же время определение L и M в рамках линейной теории весьма элементарно и сводится к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом смысле линейная теория обладает преимуществами перед численным решением трехмерным методом характеристик. При малых возмущениях точность линейной теории может оказаться выше.

3. Представляет интерес получить приближенное аналитическое выражение для боковой силы и момента в дозвуковой и сверхзвуковой областях. Если в дозвуковой области сохранить принятые ниже правила знаков, т. е. считать, что боковая сила положительна, когда направлена по оси x , а момент положителен при вращении по часовой стрелке относительно центра стока, то для расчета боковой силы и момента можно воспользоваться той же системой, но изменив знак у первого члена в правой части уравнения (2.9) и знак в левой части уравнения (2.8). Тогда, переходя от независимой переменной x к r и пренебрегая при малых дозвуковых скоростях величиной $x=u_0^2$ по сравнению с единицей, нетрудно получить следующие отношения для определения боковой силы и момента относительно центра стока:

$$(3.1) \quad L=L_h \left(\frac{r}{r_h} \right)^{n-1}, \quad M = -\frac{rL[2-n(n+1)]}{n^2 \cos \theta_k}$$

где L_h — начальное значение боковой силы, заданное при $r=r_h$. Из формулы (3.1) видно, что в дозвуковой области происходит по степенному закону уменьшение боковой силы и момента по мере приближения к минимальному сечению. Кроме того, видно, что выполняется приближенное соотношение $M=CrL$, где значение константы C зависит от начальных условий и угла θ_k . Для построения приближенного решения в сверхзвуковой области воспользуемся методом асимптотического разложения решения дифференциального уравнения второго порядка по отрицательным степеням n [4]. Запишем систему (2.8), (2.9) в двух эквивалентных формах. Имеем

$$(3.2) \quad (\kappa-x) \frac{d^2L}{dx^2} + \left[\frac{1}{2(\gamma-1)} + \frac{\kappa-x}{4x} \right] \frac{dL}{dx} + \frac{\kappa(x-1)}{16x^2} [n(n+1)-2]L = 0$$

$$(3.3) \quad (\kappa-x) \frac{d^2M}{dx^2} + \left[-\frac{1}{2(\gamma-1)} + \frac{3(\kappa-x)}{4x} \right] \frac{dM}{dx} + \frac{\kappa(x-1)}{16x^2} n(n+1)M = 0$$

Можно показать, что с точностью до величины n^{-1} приближенное решение уравнений (3.2) и (3.3) имеет вид

$$(3.4) \quad L = \frac{n_2 F(x)}{r} \sqrt{\frac{\omega(x)}{\omega'(x)}} [c_1 I_{+(p_0+1)}(2n_1 \sqrt{\omega(x)}) + c_2 I_{-(p_0+1)}(2n_1 \sqrt{\omega(x)})]$$

$$(3.5) \quad M = \sqrt{\frac{\omega(x)}{\omega'(x)}} [c_1^{\circ} I_{+(1-p_0)}(2n_2 \sqrt{\omega(x)}) + c_2^{\circ} I_{-(1-p_0)}(2n_2 \sqrt{\omega(x)})]$$

где $p_0 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)^{-1}$, c_1 , c_2 , c_1° , c_2° — произвольные константы, $I_{+(p_0+1)}$, $I_{-(p_0+1)}$, $I_{+(1-p_0)}$, $I_{-(1-p_0)}$ — функции Бесселя порядка p_0+1 и $1-p_0$ соответственно,

$$(3.6) \quad n_1 = \sqrt{n(n+1)-2}, \quad n_2 = \sqrt{n(n+1)}, \quad F(x) = (\kappa-x)^{-p_0/2} x^{-3/8}$$

$$\omega(x) = \left\{ \frac{1}{4} [f(x) - f(\kappa)] \right\}^2, \quad \omega'(x) = \frac{d\omega}{dx}$$

$f(x)$ — функция Прандтля — Мейера. Используя далее асимптотические представления функции Бесселя при больших значениях аргумента [2], из формул (3.4) и (3.5) получим окончательно приближенное аналитическое выражение для боковой силы и момента. Имеем

$$(3.7) \quad L = F_1 [l_1 \sin \delta_1(x) + l_2 \cos \delta_1(x)]$$

$$(3.8) \quad M = F_2 [m_1 \sin \delta_2(x) + m_2 \cos \delta_2(x)]$$

$$(3.9) \quad F_1 = 2 \sqrt{\frac{n_1}{\pi}} \frac{(x-x)^{1/4(\gamma-1)}}{(x-1)^{1/2}}, \quad F_2 = r F_1$$

$$\delta_1(x) = \frac{1}{2} n_1 f(x), \quad \delta_2 = \frac{1}{2} n_2 f(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{x-1}{1-\kappa^{-1}x}}$$

Здесь l_1 , l_2 , m_1 , m_2 — произвольные константы. Из формул (3.7), (3.8), а также из уравнений (2.8), (2.9) видно, что при больших n и при выполнении начальных условий (2.12) $M \approx CrL$. Это соотношение означает, что приближенно точка приложения боковой силы находится в плоскости выходного сечения сопла и при известной величине боковой силы можно определить момент относительно любой точки. Кроме того, из него следует, что нули боковой силы и момента близки (фиг. 3 и 4), следовательно, в тех плоскостях сопла, где $L \approx M \approx 0$, вектор силы не только параллелен оси сопла, но и направлен по оси.

Пусть в некотором сечении сопла известны начальные значения боковой силы и момента L_H , M_H , связанные соотношением (2.12). Тогда из (2.8), (2.9) имеем, что при больших n

$$\frac{dL}{dx} \Big|_H \approx -\frac{9\pi^2}{64x_H} \frac{n(n+1)}{(n+3)^2} L_H, \quad \frac{dM}{dx} \Big|_H = -r_H \frac{dL}{dx} \Big|_H$$

Поскольку при $x=x_H$ известны теперь M_H , L_H и их производные по x , то нетрудно, пользуясь (3.7), (3.8), определить произвольные константы,

Производя необходимые выкладки получим, что с точностью до величин $n^{-\frac{1}{2}}$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} L &= L_H \frac{F_1(x)}{F_1(x_H)} \cos \{ [\delta_1(x) - \delta_1(x_H)] \} \\ M &= M_H \frac{F_2(x)}{F_2(x_H)} \cos \{ [\delta_2(x) - \delta_2(x_H)] \} \end{aligned}$$

где $\delta_1(x_H)$, $\delta_2(x_H)$ — начальные значения функций $\delta_1(x)$, $\delta_2(x)$ определяемых формулой (3.9). Из формул (3.10) очевиден колебательный характер изменения боковой силы и момента с затуханием амплитуды колебаний (за счет члена $F_1(x)$) у функции L . Нули x_h функций L и M определяются из соотношения

$$f(x_h) = f(x_H) + \frac{\pi}{n} (2k+1) \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

Видно, что число нулей увеличивается с уменьшением γ и θ_h (т. е. с увеличением n) в соответствии с приведенным выше физическим рассмотрением. Кроме того, первый нуль функций L и M , соответствующий $k=0$, смещается вниз по потоку при увеличении угла θ_h . На фиг. 3, 4 представлено сравнение полученного приближенного решения (кривая 3) с точным. Видно, что приближенное решение позволяет достаточно точно предсказать нули функций L и M . Ошибка в определении максимальных значений L и M составляет 10–15%.

Поступила 15 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирумов У. Г., Росляков Г. С., Сухоруков В. П. Исследование сверхзвуковых течений в конических соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
2. Янке Е., Эмде Ф. Таблица функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
3. Hoffman J. D., Maykut A. R. Gas dynamic gain of supersonic thrust nozzles. Space. and Rockets, 1974, vol. 11, No. 10.
4. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. Усп. матем. н., 1952, т. 7, вып. 6.