

О ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ПОТОКА ЖИДКОСТИ В ВИНТОВОМ
КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. В. МАРТЫНОВ, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

(Москва)

В рамках теории однородного винтового потока [1] установлены формулы для распределения скоростей идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольной трубе, изогнутой по винтовой линии. На основе полученных формул проведен численный расчет поля скоростей в гидросепараторе [2], предназначенном для обогащения полезных ископаемых. Проведено сопоставление полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными, свидетельствующее об их удовлетворительном качественном согласии.

При течении жидкости в криволинейных каналах возникают вторичные течения. Жидкость у верхней и нижней стенки течет в сторону внутренней боковой стенки, а в центральной части потока — от внутренней к внешней. Качественное объяснение этому явлению дано в [3, 4]. Несмотря на то, что в образовании вторичного течения важную роль играют вязкие силы, правильное описание структуры потока может быть получено в рамках уравнения Громеки. Хорошее качественное и количественное соответствие экспериментальных данных с теоретическими расчетами вихревых течений, выполненными на основе уравнения Громеки, получено во многих работах (например, [1, 5]).

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в винтовом канале прямоугольного сечения.

Ниже все величины приведены к безразмерному виду, в качестве масштабов использованы величины b , W , представляющие собой соответственно половину высоты сечения канала и среднюю тангенциальную скорость потока, $W=Q/S$, где Q — расход, S — площадь поперечного сечения.

Введем криволинейную систему координат

$$\xi=r, \quad \varphi'=\varphi, \quad \eta=z-\varphi\eta_0/\pi$$

Здесь r , φ , z — цилиндрическая система координат, ось винта принята за направление z , а η_0 — высота полушага винтовой линии.

Выпишем в координатном виде уравнения движения в форме Ламба и компоненты вихря. Учитывая, что течение осесимметричное, получим

$$(1) \quad \begin{aligned} v_{\xi}\Omega_{\varphi}-v_{\varphi}\Omega_{\xi}-\frac{\eta_0}{\pi\xi}(v_{\eta}\Omega_{\xi}-v_{\xi}\Omega_{\eta})+\frac{\eta_0^2}{\pi^2\xi^2}(v_{\varphi}\Omega_{\xi}-v_{\xi}\Omega_{\varphi}) &= \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ v_{\eta}\Omega_{\xi}-v_{\xi}\Omega_{\eta}-\frac{\eta_0}{\pi\xi}(\Omega_{\xi}v_{\varphi}-v_{\xi}\Omega_{\varphi}) &= \frac{\eta_0}{\pi\xi}\frac{\partial E}{\partial \eta} \\ v_{\varphi}\Omega_{\eta}-v_{\eta}\Omega_{\varphi} &= \frac{\partial E}{\partial \xi} \\ \Omega_{\xi} &= -\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[v_{\varphi}\xi+\frac{\eta_0}{\pi}v_{\eta}+\frac{\eta_0^2}{\pi^2\xi}v_{\varphi}\right] \end{aligned}$$

$$(2) \quad \Omega_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial \eta} v_{\xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[v_{\eta} + \frac{\eta_0}{\pi \xi} v_{\varphi} \right]$$

$$\Omega_{\eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[v_{\varphi} \xi + \frac{\eta_0}{\pi} v_{\eta} + \frac{\eta_0^2}{\pi^2 \xi} v_{\varphi} \right]$$

Здесь E — интеграл Бернулли.

Если $\eta_0/\pi\xi_1 \ll 1$ (ξ_1 — радиус внутренней боковой стенки), то, пренебрегая малыми членами, приведем уравнения (1) и компоненты вихря (2) к уравнению Ламба и компонентам вихря в цилиндрической системе координат соответственно. Уравнения Ламба для осесимметричного случая после несложного преобразования согласно [1] переходят в уравнения Громеки. Учитывая, что в рассматриваемом случае в плоскости поперечного сечения канала образуются две симметричные циркуляции, расчет можно проводить только для верхней или нижней половины сечения. Тогда уравнение для функции тока и граничные условия, выражающие равенство нулю нормальной компоненты скорости на стенках и плоскости симметрии, имеют вид

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \Phi(\psi) \Phi'(\psi) + \xi^2 F'(\psi) = 0$$

$$v_{\xi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_{\eta} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \Phi(\psi) = v_{\varphi} \xi$$

$$F(\psi) = -E(\psi)$$

$$\psi(0, \xi) = \psi(1, \xi) = \psi(\eta, \xi_1) = \psi(\eta, \xi_2) = 0$$

Здесь ξ_2 — радиус внешней боковой стенки. Следуя [1, 6], будем полагать далее, что

$$(4) \quad \Phi(\psi) \Phi'(\psi) = D + k^2 \psi; \quad F(\psi) = A, \quad D = kc$$

$$k, c, A = \text{const}$$

Решение задачи (3) с учетом (4) имеет вид

$$(5) \quad v_{\xi} = 4D \sum \Omega_n(\xi) \cos n\pi\eta/\omega_n^2$$

$$v_{\eta} = \frac{4D}{\pi\xi} \sum \frac{1}{n\omega_n} \Omega_n^*(\xi) \sin n\pi\eta$$

$$v_{\varphi} \xi = c + k\psi = c \left[1 + \frac{4k^2}{\pi} \sum \frac{1}{n\omega_n^2} \Omega_n(\xi) \sin n\pi\eta \right]$$

$$\omega_n = \sqrt{n\pi - k^2}, \quad \Omega_n(\xi) = 1 - \frac{\xi}{A_n \xi_1} [B_n I_1(\omega_n \xi) - C_n K_1(\omega_n \xi)]$$

$$\Omega_n^*(\xi) = \frac{B_n I_0(\omega_n \xi) + C_n K_0(\omega_n \xi)}{A_n}$$

$$C_n = I_1(\omega_n \xi_2) - \frac{\xi_1}{\xi_2} I_2(\omega_n \xi_1)$$

$$A_n = I_1(\omega_n \xi_2) K_1(\omega_n \xi_1) - I_1(\omega_n \xi_1) K_1(\omega_n \xi_2)$$

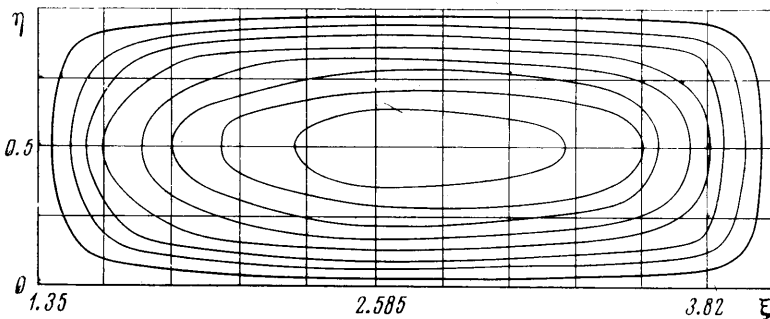
$$B_n = K_1(\omega_n \xi_2) - \frac{\xi_1}{\xi_2} K_1(\omega_n \xi_1)$$

Здесь $I_1(z)$, $K_1(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, суммирование ведется по всем нечетным значениям.

В выражение (5) входят две постоянные (k и c), которые должны быть определены из дополнительных условий: например, по величинам расхода жидкости и максимального угла закрутки (согласно [1] углом закрутки называется угол, образуемый вектором полной скорости с продольной осью потока, которые определяются экспериментально). Максимального значения угол закрутки достигает в точках

$$\eta=0, \quad \xi=(\xi_2-\xi_1)/2; \quad \eta=1, \quad \xi=(\xi_2-\xi_1)/2$$

На основании формул (5) проведем расчет поля скоростей в канале сепаратора [2], у которого высота канала $2b=0.75$ м, радиусы внутренней



Фиг. 1

и внешней боковых сторон $r_1=0.5$ м и $r_2=1.5$ м соответственно, расход жидкости $Q=500$ м³/час, тангенс максимального угла закрутки $\operatorname{tg} \alpha=1$, высота шага 0.75 м или в безразмерных переменных

$$\xi_1=1.35, \quad \xi_2=4.05, \quad \eta_0=1, \quad Q=1.33$$

Используя формулу для максимального тангенса угла закрутки в виде [1], получим уравнение для k

$$(6) \quad 1 = -\frac{16k}{\pi^3} \sum_{n,m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2m+n-3/2}}{m} \left[\left(\frac{m}{\xi_2-\xi_1} \right)^2 + n^2 - \left(\frac{k}{\pi} \right)^2 \right]^{-1}$$

Из множества корней уравнения (6) искомое значение k выбираем после приближенной оценки. Так, из условия однородности потока и теоремы о роторе следует, что

$$(7) \quad \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \, ds = \int_S k \mathbf{v} \, dS \cong k \mathbf{v} S \cong \oint \mathbf{v} \, dl = \mathbf{v} d$$

Здесь S — половина площади сечения, d — периметр, ограничивающий эту площадь. Из оценки (7) $k \cong 5$, точный расчет из уравнения (6) дает $k=5.7$.

Постоянную c определяем из уравнения расхода жидкости

$$(8) \quad Q/2 = \int_0^1 \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_z \, d\xi \, d\eta = c \int_0^1 \left\{ \left[1 + \frac{4k^2}{\pi} \times \right. \right.$$

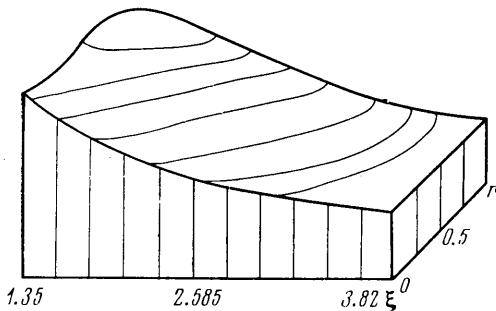
$$\begin{aligned} & \times \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n^2} \Omega_n(\xi) \sin n\pi\eta \left] \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+4\eta_0^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{4k}{\pi\xi_1} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n^2} \Omega_n^*(\xi) \sin n\pi\xi \frac{2\eta_0}{\sqrt{4\eta_0^2+\xi^2}} \right\} d\xi d\eta \\ v_+ = & v_\varphi \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+4\eta_0^2}} + v_\eta \frac{2\eta_0}{\sqrt{4\eta_0^2+\xi^2}} \end{aligned}$$

Здесь v_+ — компонента скорости, направленная вдоль винтовой линии. После подстановки в уравнение (8) значение k находим с.

Для полученных значений $k=5.7$, $Q=1.33$ был проведен численный расчет поля скоростей. Результаты представлены на фиг. 1–4.

На фиг. 1 изображены линии тока в плоскости поперечного сечения для равноотстоящих значений ψ . Наибольшее по абсолютной величине значение ψ достигается в точке

$\xi=2.7$, $\eta=0.5$, к которой стягиваются линии тока.



Фиг. 2

Рельеф тангенциальной компоненты скорости v_φ показан на фиг. 2. Как видно из фиг. 1 из-за кривизны канала точка максимальной скорости сдвигается к внутренней стенке. Максимальное значение абсолютной величины окружной компоненты скорости наблюдается в точке $\xi=1.9$, $\eta=0.5$ и равно $|v_\varphi|=1.37$. Минимальное значение абсолютной величины

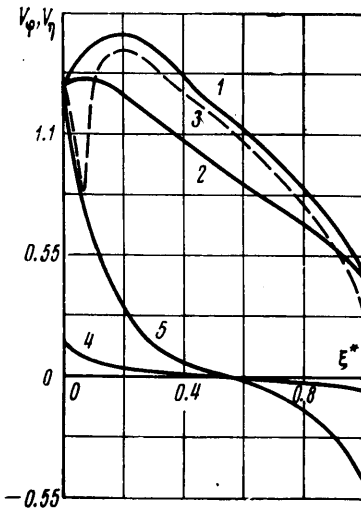
v_φ достигается на внешней стенке. На фиг. 2 нанесены линии модуля окружной составляющей скорости, начиная с $v_\varphi=0.506$ с интервалом, равным 0.122. На фиг. 2 даны эпюры тангенциальной компоненты скорости v_φ по оси ξ^* ($\xi^*=(r-r_1)/(r_2-r_1)$) при двух значениях η : на середине канала $\eta=0.5$ (кривая 1) и вблизи границы $\eta=0.16$ (кривая 2).

Из фиг. 3, 4 видно, что максимум v_φ смещается от внутренней стенки $\xi^*=0$ при $\eta=0$ к $\xi^*=0.2$ при $\eta=0.5$. Качественно эпюры v_φ хорошо совпадают с экспериментальными данными работы [7]. Штриховой линией 3 изображено осредненное распределение окружной компоненты вдоль оси r при $z=279$ мм, $\theta=100^\circ$, полученное для канала $r_1=2.56$ мм, $r_2=38.20$ мм, $2b=305$ м при осредненной скорости течения 1.5 м/сек. Эпюра тангенциальной компоненты скорости, найденная в работе [7], нанесена в безразмерном виде. Обезразмеривание выполнено по формуле $v_\varphi^*=v_\varphi/\langle v_\varphi \rangle$, где $\langle v_\varphi \rangle$ — средняя скорость по оси при $z=297$ мм, $\theta=100^\circ$.

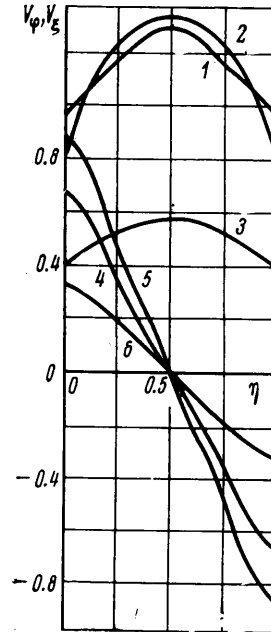
В экспериментальной работе ясно видно вторичное течение в плоскости поперечного сечения канала. Исследование в [8, 7] проводилось при тех же числах Рейнольдса, что и в рассматриваемом режиме течения в канале гидросепаратора. В отличие от эксперимента вторичное течение в гидросепараторе СШ-15 более развитое, так как канал гидросепаратора менее глубокий, чем в экспериментальной установке [7].

На фиг. 3 так же изображены эпюры осевой компоненты скорости v_η вдоль оси ξ^* . Кривая 4 соответствует распределению v_η при $\eta=0.27$

(вблизи стенки), а кривая 5 — на середине канала при $\eta=0.5$. Асимметричность эпюр вытекает из требования равенства расхода жидкости, так как жидкость пересекает в направлении оси η и в противоположном направлении разные площади. Эпюры тангенциальной составляющей скорости по оси η даны на фиг. 4 при $\xi=1.61$, вблизи внутренней стенки (кривая 1), при $\xi=1.9$ в точке максимума v_φ (кривая 2) и при $\xi=3.8$ около внешней стенки (кривая 3). Распределение симметрично относи-



Фиг. 3



Фиг. 4

тельно центра канала, так как при постановке задачи не была выделена ни одна из границ $\eta=0$ и 1. Меньшее значение v_φ на границе кривой 2 по сравнению с 1 связано со смещением v_φ от границы $\xi=1.9$ при изменении η от 0.27 до 0.5. Распределение радиальной составляющей скорости v_ξ по оси η изображено на фиг. 4. Радиальные скорости по абсолютной величине резко растут от тождественного нуля при $\xi=1.35$ до величин эпюры 5 при $\xi=1.9$, затем более плавно убывают по абсолютной величине до тождественного нуля при $\xi=4.05$. Так, при $\xi=3.8$ эпюра радиальной скорости имеет вид 6. Характер кривых согласуется с законом сохранения расхода жидкости. Таким образом, изменение в профилях скоростей можно объяснить возникновением двойного спирального вторичного потока.

Данные о геометрии потока в канале свяжем с некоторыми особенностями механизма сепарации в гидросепараторе. При наличии частицы градиент давления в исследуемом криволинейном потоке обуславливает действующую на частицу силу F , пропорциональную плотности жидкости ρ , объему частицы χ и зависящую от локальных скоростей v и геометрических параметров струи L , т. е. $F=\rho\chi\varphi^*(v, L)$ (φ^* — некоторая функция). На частицу плоскости ρ' , движущуюся со скоростью u по траектории с геометрическим параметром L' , действует сила $\rho'\chi f(u, L')$ ($f(u, L')$ — некоторая функция). В результате действия этих сил частицы тяжелой фракции будут смещаться к внешней стенке, а частицы легкой фракции —

к внутренней, причем вследствие торможения частиц достигается эффект сепарации частиц по плотности, превышающей плотность среды [9].

Как показывает приведенный выше расчет, а также экспериментальные данные, окружная компонента скорости потока v_θ у внутренней стенки больше, чем у внешней, поэтому абсолютная скорость перемещения частиц легкой фракции будет возрастать и они будут выноситься потоком. Таким образом, частицы легкой фракции будут двигаться по винтовым линиям, радиус которых уменьшается, а шаг возрастает. Окружная скорость частиц тяжелой фракции будет меньше, чем у легкой фракции, и они будут выноситься шнеком.

Следовательно, эффект смещения к внутренней стенке канала максимума окружной компоненты скорости жидкости имеет важное значение для такого процесса сепарации.

Необходимо отметить, что режим течения зависит от формы поперечного сечения канала. В частности, в случае кругового сечения максимум окружной компоненты скорости наблюдается вблизи внешней стенки [11, 10] и вторичное течение менее развитое, чем в случае прямоугольного сечения [12]. Отсюда видно, что форма поперечного сечения может быть выбрана так, чтобы максимум окружной компоненты скорости находился на оси канала, что может позволить осуществить выделение частиц промежуточной плотности из трехкомпонентной пульпы.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова за обсуждение и ценные замечания.

Поступила 8 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф. Основа механики винтовых и циркуляционных потоков. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958.
2. Гупало Ю. П., Зарубин Л. С., Зерницкий В. Г., Годес О. М., Юровский А. З., Марченко М. Г., Блишков И. М., Романов Ю. В. Устройство для обогащения сыпучего материала. Авт. свид. № 256678. Бюл. «Открытия, изобретения, промышленные образцы и товарные знаки», 1969, № 35.
3. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
4. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
5. Гостинцев Ю. А., Зайцев В. М., Новиков С. С. Тяга сопла при циркуляционном истечении вихревого потока газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
6. Гостинцев Ю. А., Успенский О. А., Похил П. Ф. Винтовые потоки с многократной циркуляцией в каналах простой формы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
7. Браун, Моррис. Турбулентное течение воды в плоских криволинейных каналах конечной глубины. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Сер. Д, Техн. механ., 1963, т. 85, № 3.
8. Моррис. Развитие вторичной завихренности с несжимаемой жидкости. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., Сер. Е, 1963, т. 30, № 4.
9. Гупало Ю. П., Зерницкий В. Г., Годес О. М., Юровский А. З. Механизм процесса разделения при обогащении сыпучего материала в криволинейных потоках. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 6.
10. Greenspan D. Secondary flow in a curved tube. J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, pt 1.
11. Adler M. Stroming in gekrummten Rohren. Z. angew. Math. Mech., 1934, Bd. 14, H5.
12. Cuming H. G. The secondary flow in curved pipes. Aeron. Res. Council. Rept and Mem., 1955, No. 2880.