

К РАСЧЕТУ СИЛЬНОГО ВДУВА
НА ЗАТУПЛЕННОМ ТЕЛЕ И ПРОФИЛЕ

М. М. ГИЛИНСКИЙ, М. Г. ЛЕБЕДЕВ

(Москва)

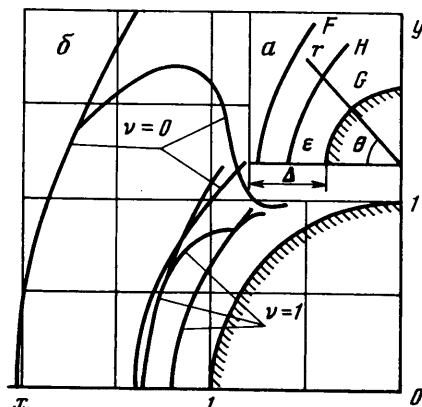
В рамках модели невязкого течения задача о сильном вдуве через поверхность тел в различных аспектах изучалась теоретически в ряде работ. Подробная библиография по этому вопросу содержится, например, в работах [1, 2]. Известные подходы к решению задачи имеют ограниченную область применения. Так, асимптотические методы работают при гиперзвуковых режимах обтекания и относительно малых значениях импульса вдуваемого газа ($\Lambda = \Omega^2 = \rho_0 v_0^2 / \rho_\infty V_\infty^2 \ll 1$). Такой же недостаток присущ численному методу прямых [2]. Эйлеровы схемы сквозного счета [3, 4] сильно «размазывают» контактный разрыв и не позволяют исследовать случаи, когда вдуваемый газ и газ в набегающем потоке обладают различными термодинамическими свойствами ($\gamma_0 \neq \gamma_\infty$).

Ниже приводятся результаты численного исследования сверхзвукового обтекания плоских и осесимметричных тел при наличии сильного вдува на лобовой поверхности, проведенного с помощью нестационарного конечно-разностного метода [5] с явным выделением контактной линии раздела двух газов. Расчеты охватывают семейство эллиптических цилиндров с отношением полуосей $0.5 \leq \delta \leq 4$, цилиндрический торец и плоскую пластину со скруглением в окрестности миделя при вариации закона вдува, числа M_∞ набегающего потока ($3 \leq M_\infty \leq 10$), показателей адиабаты и параметра вдува $0 \leq \Omega \leq 0.5$.

1. Рассматривается плоское ($\nu=0$) или осесимметричное ($\nu=1$) стационарное течение, возникающее при натекании сверхзвукового потока на затупленное тело или профиль, через поверхность которого происходит распределенный вдув другого газа по заданному закону. Геометрическая картина обтекания схематически изображена на фиг. 1, а. Возмущенное течение происходит в двух слоях — между ударной волной F и контактной поверхностью H и между телом G и контактной поверхностью. Здесь же на фигуре показаны основные обозначения и используемая система координат.

Течение в областях непрерывности будем описывать уравнениями Эйлера. На ударной волне выполняются соотношения Ренкина — Гюгонно, на контактной линии раздела — условия равенства давлений и нормальных компонент скорости газа по обе стороны от разрыва, на линии торможения — условия симметрии.

На поверхности тела в зависимости от физической задачи могут быть сформулированы различные краевые условия. В задачах абляции теплозащитных покрытий естественно задание температуры поверхности и массо-

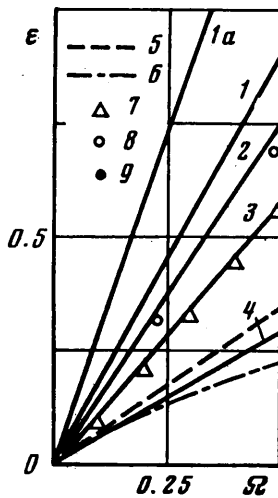


Фиг. 1

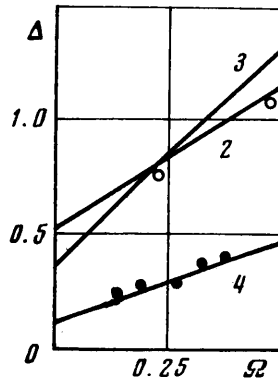
вого расхода, при дозвуковом принудительном вдуве охлаждающих газов — скорости и полной энтальпии либо энтропии, при вдуве несжимаемой жидкости — скорости и плотности. В данной работе были рассмотрены условия на поверхности вдува

$$(1.1) \quad W = W_0 \sin^m \alpha, \quad V_\tau = 0, \quad k = \text{const}$$

где в соответствии со сказанным выше либо $W = V_n$, $k = p/\rho$, либо $W = \rho V_n$, $k = p/\rho$, либо $W = V_n$, $k = \rho$. Здесь V_n , V_τ — нормальная и касательная к контуру тела компоненты вектора скорости, α — угол наклона контура тела к направлению набегающего потока, W_0 — значение параметра W в критической точке тела.



Фиг. 2



Фиг. 3

При выбранных граничных условиях на поверхности вдува течение около тела заданной формы полностью определяется параметрами M_∞ , γ_∞ , γ_0 , W_0 , k , m . Привлекая изэнтропические формулы, описывающие течение вдоль линии торможения в обоих слоях, нетрудно показать, что по крайней мере для течения в окрестности линии симметрии определяющие параметры можно на один уменьшить и вместо W_0 и k взять Λ — отношение импульсов вдуваемого газа и набегающего потока.

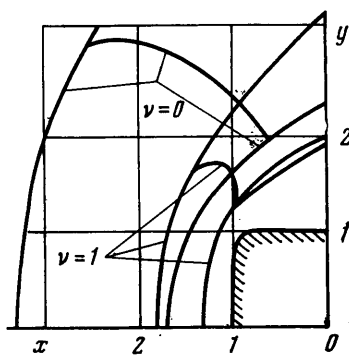
Для численного решения сформулированной краевой задачи применяется конечно-разностный нестационарный метод [5], разработанный ранее применительно к задаче сверхзвукового обтекания затупленных тел газовым потоком [6]. Этот метод был модифицирован применительно к случаю течения газа в двух областях, разделенных контактной поверхностью.

Основные изменения по сравнению с [5, 6] состоят в следующем. При решении нестационарных газодинамических уравнений на каждом слое по времени в ходе прямой прогонки на луче $\theta = \theta_i$ ($i = 0, 1, \dots, L$) условия равенства давлений и нормальных компонент скорости на контактной поверхности H перегоняются на границу рассчитываемой области, состоящую из поверхности тела G и отошедшей ударной волны F . Далее на границе $G+F$ решается система из девяти уравнений (четыре условия — на ударной волне, три — на поверхности вдува и два прогоночных соотношения) относительно скорости перемещения ударной волны, параметров течения непосредственно за ударной волной и соответствующих параметров на поверхности

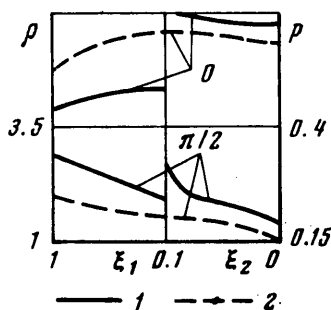
тела. В ходе обратной прогонки определяются значения параметров течения в двух слоях на луче $\theta = \theta_1$. В заключение вычисляется скорость перемещения контактной поверхности, которая равна нормальной к ней компоненте скорости.

Стационарное решение получается установлением по времени при $t \rightarrow \infty$ и не зависящих от времени граничных условиях.

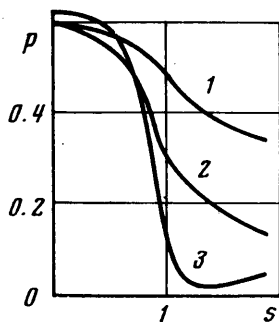
Все расчеты были выполнены на разностной сетке, насчитывающей $6 \times 21 + 6 \times 21$ узлов (21 узел в направлении вдоль тела и по 6 узлов в поперечном направлении в каждой из двух областей). Алгоритм расчета был реализован на ЭВМ БЭСМ-4.



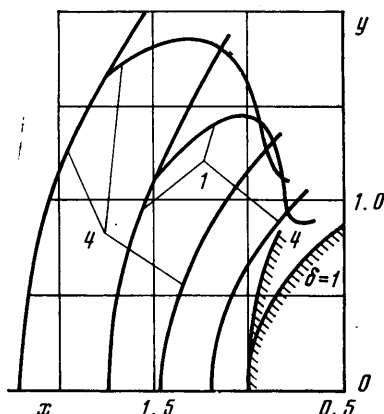
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Сделаем еще замечание относительно выбора положения крайнего луча θ_L . Величина θ_L выбиралась таким образом, чтобы в ударном слое на этом луче достигалась сверхзвуковая скорость. В слое же вдува вблизи тела скорость, естественно, была дозвуковой. Известно, что в подобных ситуациях достоверность полученных результатов гарантируется отсутствием зависимости численного решения от величины θ_L . Поэтому в процессе расчета величина θ_L увеличивалась до тех пор, пока параметры потока во всей дозвуковой области не прекращали изменяться заметным образом. В качестве критерия стабилизации дозвуковой зоны были взяты относительное изменение толщин ударного слоя и слоя вдува на оси и положение звуковой линии.

2. С помощью алгоритма, описанного в п. 1, было проведено исследование дозвукового вдува на двух семействах осесимметричных и плоских тел: 1) эллипсоидах вращения и эллиптических цилиндрах и 2) цилиндрическом торце и плоской пластине со скруглением в области миделя. Уравнение контура в последнем случае имеет вид $|x|^n + |y|^n = 1$.

Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 1-7. Значения

определяющих параметров для каждого из представленных случаев приведены ниже.

№ фиг.	ν	M_∞	W	m	Λ
1, б	0,1	10	V_n	1	0.36
4	0,1	3	ρV_n	0	0.23
5	1	3	ρV_n	0	0.23
6	0,1	3	ρV_n	0	0.23, 0
7	0	10	V_n	1	0.2

Во всех приведенных примерах на поверхности вдува выполнялось условие $k=p/\rho=\text{const}$, а показатели адиабаты в ударном слое и слое вдува имеют одинаковое значение 1.4.

Отметим характерные особенности течения около различных тел.

Для сферы и кругового цилиндра вдув по закону (1.1) с $W=V_n$ и $m=1$ (фиг. 1, б) вызывает примерно равномерное оттеснение ударного слоя от тела, контактная линия и ударная волна хорошо аппроксимируются в дозвуковой зоне концентрическими с контуром тела окружностями. В плоском течении ударный слой оттесняется примерно в 2 раза больше, чем в осесимметричном, звуковая линия в слое вдува в первом случае обращена выпуклостью против потока, а во втором — по потоку. Поскольку отношение давлений в звуковой точке и в точке торможения в изэнтропическом одномерном течении есть функция только γ , то звуковая линия при пересечении контактного разрыва остается непрерывной, если показатели адиабаты в обоих слоях одинаковы. Нетрудно показать, что в плоском течении угол ω между звуковой линией и внешней нормалью к контактному разрыву, определяемый в этом случае соотношением $\text{tg } \omega = (\partial \ln V / \partial s) R$, где R — радиус контактного разрыва в звуковой точке, остается острым как в ударном слое, так и в слое вдува. В осесимметричном течении наклон звуковой линии на контактном разрыве претерпевает значительное изменение.

Отметим, что в рассмотренном диапазоне определяющих параметров плотность и давление в каждой из двух областей в окрестности симметрии изменяются незначительно. В связи с этим здесь хорошо работают асимптотические теории — пограничного слоя, постоянной плотности, метод «усеченных рядов» и др. Иллюстрацией к этому служат проведенные на фиг. 2, 3 сопоставления отходов контактной линии ϵ и ударной волны Δ от тела на линии симметрии в зависимости от параметра Ω , полученных при гиперзвуковых M_∞ в настоящих расчетах и при помощи различных приближенных аналитических теорий.

На фиг. 2, 3 величины ϵ , Δ отнесены к половине диаметра миделя тела. Цифры 1–4 соответствуют расчетам по методу настоящей работы для плоской пластины, торца, кругового цилиндра и сферы. Вдув осуществлялся по закону (1.1) с $W=V_n$, $m=1$, за исключением случая 1б, где $W=\rho V_n$. Для сферы и кругового цилиндра при этих условиях первое приближение метода пограничного слоя [4, 10] дает для величины ϵ

$$(2.1) \quad \epsilon_{\nu=0} = 1.15\Omega, \quad \epsilon_{\nu=1} = 0.676\Omega$$

Для этой же величины аналитическое представление решения с постоянной плотностью при малых значениях параметра вдува дает

$$(2.2) \quad \epsilon_{\nu=0} = \Omega(1+\Omega)^{-1}, \quad \epsilon_{\nu=1} = \Omega(1+1.5\Omega)^{-1}$$

При выводе (2.1), (2.2) использовались табличные значения градиента скорости в критической точке при гиперзвуковом обтекании сферической и цилиндрической поверхностей.

На фиг. 2 кривые 5, 6 соответствуют формулам (2.1), (2.2) для сферы, а точки 7 — формуле (2.1) для кругового цилиндра. Можно видеть удовлетворительное согласие результатов для сферы в достаточно широком диапа-

зоне изменения Ω . При $\Omega \sim 0.5$ максимальное отклонение величины ϵ в приближенных решениях от точного значения не превышает $\sim 25\%$. Для кругового цилиндра метод пограничного слоя дает очень хорошее приближение, а решение с постоянной плотностью, напротив, очень сильно отличается от точного решения.

На фиг. 2, 3 приводятся также экспериментальные точки для торца 8 и сферы 9, полученные в различных экспериментах и заимствованные из [7].

Изменение закона вдува (увеличение параметра m в (1.1)) приводит к уменьшению толщины слоя вдуваемого газа. При этом ударный слой оттесняется от тела неравномерно. Так, начиная с $m \sim 3$, в районе $\theta \sim 45^\circ$ имеется минимум отхода контактной поверхности от тела, а затем отход вновь увеличивается. Течение в окрестности контактной поверхности характеризуется при этом немонотонным изменением давления в направлении θ .

Величина показателя адиабаты вдуваемого газа слабо влияет на геометрию течения. Его изменение в диапазоне $1.1 \leq \gamma_0 \leq 7$ приводит к монотонному оттеснению ударного слоя, причем максимальное отличие отходов на оси достигает $\sim 4\%$. Это является следствием незначительной сжимаемости газа в дозвуковой части области вдува.

Аэродинамические характеристики сферы и цилиндра при вдуве изменяются одинаково: с ростом Ω давление по поверхности падает и при $\Omega \sim 0.5$ уменьшение его в критической точке достигает $\sim 15\%$ (зависимость давления в критической точке тела от определяющих параметров можно получить из точных соотношений вдоль линии торможения). На такую же величину уменьшается и общее сопротивление тела.

На фиг. 4 построены геометрические картины обтекания плоской пластины и цилиндрического торца. В приведенных примерах область расчета охватывает практически всю до- и трансзвуковую области в слое вдува. Изменение положения крайнего луча в диапазоне $\pi/4 \leq \theta_L \leq \pi/2$ не сказывается заметно на результатах расчета около передней части тела, что в этом случае указывает на слабое влияние условий вдува на боковой поверхности на течение вверх по потоку.

На фиг. 5 приведены распределения плотности 1 и давления 2 поперек ударного и вдуваемого слоев при обтекании торца для сечений $\theta=0$ и $\pi/2$. Плотность здесь отнесена к плотности в набегающем потоке ρ_{00} , а давление — к величине $\rho_{00} V_m^2$, где V_m — максимальная скорость, соответствующая течению в набегающем потоке. Нормированные переменные ξ_1 , ξ_2 имеют значения $\xi_1=1$ на ударной волне, $\xi_1=0$ и $\xi_2=1$ на контактной поверхности и $\xi_2=0$ на поверхности тела.

Распределения давления по поверхности торца и пластины в зависимости от длины дуги контура s построены на фиг. 6 (кривые 1 и 2 соответственно). Там же приведено распределение давления по торцу при отсутствии вдува 3. На лобовой части тела вдув приводит к падению давления, а за миделем после разворота потока — к росту. Повышение давления на горизонтальной части тела связано с оттеснением ударного слоя и соответственно с повышением давления на контактной поверхности, которое передается на тело. Результат здесь аналогичен случаю нормального вдува газа через поверхность бесконечно тонкой пластинки, установленной в сверхзвуковом потоке при нулевом угле атаки.

Дискуссионным является вопрос о влиянии распределенного вдува на суммарные аэродинамические характеристики тел. Во всех рассмотренных примерах величина общего сопротивления s_x пластины и торца остается приблизительно постоянной.

3. Пример расчета обтекания эллиптического цилиндра с $\delta=4.0$ представлен на фиг. 7. Этот вариант соответствует промежуточному случаю

между круговым цилиндром и плоской пластиной. Качественное представление о влиянии затупления тела на геометрию течения и основные аэродинамические характеристики может дать решение с постоянной плотностью. Применительно к задаче обтекания сферы оно было использовано в [2]. Ниже дается обобщение этого решения на случай обтекания тел и профилей, образованных коническими сечениями.

Введем конические переменные ζ, η согласно [9]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= B^{-1} \{1 - [(1 - B\zeta^2)(C + B\eta^2)]^{1/2}\} \\ y_1 &= \zeta\eta \quad (B = \delta^2, \quad C = 1 - B) \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности можно удовлетворить введением функции тока

$$(3.2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = (\zeta\eta)^{\nu} \left(\frac{C\zeta^2 + \eta^2}{C + B\eta^2} \right)^{1/2} \rho u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = -(\zeta\eta)^{\nu} \left(\frac{C\zeta^2 + \eta^2}{1 - B\eta^2} \right)^{1/2} \rho v$$

где u, v — составляющие вектора скорости на направления η, ζ . Нетрудно показать, что вихрь для несжимаемой жидкости определяется соотношением $\text{rot } W = \rho (\zeta\eta)^{\nu} f(\psi)$, где $f(\psi)$ — некоторая функция от ψ .

Используя это соотношение, получим относительно функции тока уравнение

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \frac{(1 - B\zeta^2)^{1/2}}{(\zeta\eta)^{\nu}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{(1 - B\zeta^2)^{1/2}}{\zeta^{\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right] + \\ & + \frac{(C + B\eta^2)^{1/2}}{(\zeta^2\eta)^{\nu}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{(C + B\eta^2)^{1/2}}{\eta^{\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] = -\rho^2 (C\zeta^2 + \eta^2) f(\psi) \end{aligned}$$

Для осесимметричного течения удобно ввести переменные x, y

$$(3.4) \quad x = (1 - B\zeta^2)^{1/2}, \quad y = \left(\frac{B}{|C|} \eta^2 \pm 1 \right)^{1/2}$$

где знаки плюс и минус соответствуют $B < 1$ и $B > 1$. В этих переменных уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$(3.5) \quad \frac{1}{y^2 \pm 1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = (x^2 \pm y^2) f_1(\psi)$$

Для плоского течения

$$(3.6) \quad x = \frac{1}{\sqrt{B}} \arcsin(\sqrt{B}\zeta)$$

$$y = \sqrt{\frac{|C|}{B}} \begin{cases} \text{arcsh} \left(\sqrt{\frac{B}{|C|}} \eta \right) & (B < 1) \\ \text{arcch} \left(\sqrt{\frac{B}{|C|}} \eta \right) & (B > 1) \end{cases}$$

$$(3.7) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = [\sin^2 \sqrt{B} x + g_{\pm}^2(y)] f_1(\psi)$$

$$g_+(y) = \text{ch} \left(\sqrt{\frac{B}{|C|}} y \right), \quad g_-(y) = \text{sh} \left(\sqrt{\frac{B}{|C|}} y \right)$$

Если задана форма скачка уплотнения в ударном слое, то функция завихренности $f(\psi)$ известна, что позволяет выписать решение в этой области. Ограничимся рассмотрением только области вдува, полагая, что распределение параметров вдоль контактного разрыва определяется по теории Ньютона для гиперзвукового обтекания. Будем предполагать, что сечения тела и контактного разрыва софокусны. Сделанные допущения справедливы лишь для достаточно малой окрестности критической линии.

Для случая нормального вдува имеем для функции тока следующие граничные условия:

$$(3.8) \quad \frac{\partial \psi(\eta_c)}{\partial \eta} = \eta_c^{\nu} \xi^{1+\nu}, \quad \frac{\partial \psi(\eta_c)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \psi(1)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \psi(1)}{\partial \xi} = -\Omega \xi^{\nu}$$

Простые решения можно получить, если положить для осесимметричного течения $f_1=C_0=\text{const}$ и для плоского $f_1=C_0\psi$. Ограничиваясь первыми членами разложения по ξ , будем искать приближенное решение (3.5) или (3.6) в виде

$$(3.9) \quad \psi_{v=1}=F_1(y)(1-x^2), \quad \psi_{v=0}=F_2(y) \sin \sqrt{B}x$$

Функции F_1 и F_2 удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(3.10) \quad F_1'' - \frac{2}{y^2 \pm 1} F_1 = C_0(1 \pm y^2), \quad F_2'' - [B + C_0 g_{\pm}^2(y)] F_2 = 0$$

Первое уравнение (3.10) легко интегрируется, и его решение имеет вид

$$(3.11) \quad F_1(y) = C_1(y^2 \pm 1) + C_2[y + (y^2 \pm 1)T_{\pm}(y)] - \frac{C_0}{30} \left[3y^2 - \frac{8}{y^2 \pm 1} \pm 4 \ln |y^2 \pm 1| \right] (y^2 \pm 1)$$

$$T_+(y) = \text{arc tg } y, \quad T_-(y) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right|$$

Решение второго уравнения (3.10) в общем случае при $B \neq 0$ и 1 выражается через присоединенные функции Матье первого рода [8]. При $B=1$ они вырождаются в функции Бесселя, при $B=0$ получаются функции Кели. Для краткости выпишем здесь решение лишь в последнем случае, когда второе уравнение (3.10) вырождается в

$$F_2'' - C_0 \eta^2 F_2 = 0$$

так что

$$F_2 = [C_1 U_1(X) + C_2 U_2(X)] e^X$$

$$U_1(X) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{a_j}{j!} X^j$$

$$(3.12) \quad U_2(X) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{b_j}{j} X^j$$

$$a_j, b_j = \prod_{k=1}^j \frac{2(2k-1) \mp 1}{2k \mp 1}, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad X = \frac{\sqrt{C_0}}{2} \eta^2$$

Подставляя краевые условия (3.8) в общее решение (3.11) или (3.12), содержащее четыре произвольные константы (C_0 , C_1 , C_2 и η_c), получаем алгебраическое уравнение вида

$$(3.13) \quad \Phi(\eta_c, B, \Omega) = 0$$

Решение (3.13) устанавливает связь толщины слоя вдува $\epsilon = (\eta_c - 1)\delta$ с параметром вдува Ω и коэффициентом затупления B . Из приведенных расчетов следует, что зависимость $\epsilon(\Omega)$ близка к линейной во всем диапазоне изменения Ω ($0 < \Omega < 0.5$). Сопоставление с точным численным расчетом по методу п. 2 показывает, что удовлетворительное согласие с приближенным решением имеется лишь в узком диапазоне изменения Ω . Например, при $\Omega \sim 0.5$ и $\delta = 4$ отклонение достигает $\sim 50\%$. Качественно же теория с постоянной плотностью дает удовлетворительные результаты.

В заключение авторы благодарят Т. С. Новикову и И. Д. Сандомирскую, принимавших участие в проведении расчетов настоящей работы.

Поступила 28 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Турский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности приглушения при интенсивных вдувах. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
2. Стулов В. П. Сильный вдув на поверхности затупленного тела при сверхзвуковом обтекании. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
3. Taylor T. D., Masson B. S. Supersonic flow past blunt bodies with large surface injection. 19-th Internat. Astron. Congress. Proc., vol. 3, N. Y., 1968. London, Pergamon Press., 1970.
4. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Численный эксперимент при изучении гидродинамических характеристик обтекания тел на сверхзвуковых и гиперзвуковых режимах. 24-й Междунар. астронавт. конгресс, Баку, 1973. М., ВИНТИ, 1973.
5. Бабенко К. И., Русанов В. В. Разностные методы решения пространственных задач газовой динамики. Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механ., Обзорные доклады, вып. 2. М., «Наука», 1965.
6. Лебедев М. Г., Пчелкина Л. В., Савинов К. Г. Решение задач газовой динамики методом установления. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1972, № 19.
7. Katzen E. D., Kaattari G. E. Inviscid hypersonic flow around blunt bodies. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 7. (Рус. перев.: Обтекание затупленных тел невязким гиперзвуковым потоком. Ракетная техника и космонавтика, 1965, т. 3, № 7.)
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1976.
9. Van Dyke M. The supersonic blunt-body problem. Review and extension. J. Aero-Space Sci., 1958, vol. 25, No. 8.
10. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов. ПММ, 1974, т. 38, вып. 6.