

О ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ В ТОЧКЕ ИЗЛОМА ИЛИ РАЗРЫВА
КРИВИЗНЫ КОНТУРА ЗАТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ И КЛИНЬЕВ,
ОБТЕКАЕМЫХ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

В. Б. МИНОСЦЕВ

(Москва)

Вопрос о градиенте давления за точкой излома или разрыва кривизны контура затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком, представляет большой интерес. Возникновение значительного положительного градиента давления может сопровождаться появлением «висячего» скачка и отрыва пограничного слоя в окрестности точки сопряжения различных участков контура. Как показывают расчеты обтекания затупленных конусов и клиньев, проведенные различными численными методами (например, [1-5]), направление и величина соответствующего градиента давления существенным образом зависят от того, является ли течение плоским или осесимметричным, а также от числа Маха набегающего потока M_∞ , угла наклона образующей прямолинейного участка контура β , угла разворота потока в точке излома $\delta-\beta$, от вида затупления (для контура затупления в виде дуги окружности — от центрального угла 2θ , определяющего в этом случае степень затупления тела).

Приводимые в данной статье аналитические выражения для градиента давления в точке излома или разрыва кривизны контура затупленных конусов и клиньев, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, позволяют получить его значение по параметрам потока у затупления. При этом для тел без излома (с разрывом кривизны) величина указанного градиента определяется по значениям газодинамических функций лишь на поверхности затупления. Имеющиеся в настоящее время численные методы позволяют с высокой точностью рассчитать газодинамические функции как на поверхности, так и в поле течения при сверхзвуковом двумерном обтекании тел различной формы. Однако точность расчета течения в окрестности особых точек, какими, в частности, являются точки излома и разрыва кривизны контура, в ряде случаев резко падает, что может препятствовать получению качественных выводов о поведении газодинамических функций в таких областях без проведения соответствующих асимптотических исследований. Стремление численных результатов к асимптотическим, например, при уменьшении шага сетки или радиуса вводимого [6] скругления контура в окрестности особой точки является хорошей проверкой правильности получаемых результатов.

Рассмотрим некоторую область течения L в окрестности особой точки $O(x_0, y_0)$ (фиг. 1), расположенной в сверхзвуковой области обтекания тела. Область L можно разбить на три подобласти: I — течение вне области влияния особой точки (до характеристики ζ_1), II — течение в веере волн разрежения (между характеристиками ζ_1 и ζ_2), III — течение за последней характеристикой ζ_2 веера волн разрежения. Газодинамические функции p, ρ, u, v и другие величины, относящиеся соответственно к областям I, II, III, обозначим индексами 1, 2, 3. Оси s' и h' (s и h) направим соответственно по касательной к контуру тела слева (по образующей тела — справа) от особой точки и нормально к ней. Все линейные размеры отнесем к радиусу затупления R . Значения функций в особой точке на поверхности тела обозначим дополнительным индексом 0.

Остановимся вначале на анализе течения в окрестности точки разрыва кривизны. В этом случае характеристики ζ_1 и ζ_2 совпадают ($\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$) и область II отсутствует. Поскольку в точке разрыва кривизны контура газодинамические функции и их первые производные по направлению касательной l к ζ непрерывны ($f_1 = f_3, \partial f_1 / \partial l = \partial f_3 / \partial l$), величина искомого градиента

давления равна

$$(1) \quad p_{30}' = \left. \frac{dp_3(s, 0)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{M_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 - 1}} \left. \frac{\partial p_3}{\partial l} \right|_0 = \frac{M_{10}}{\sqrt{M_{10}^2 - 1}} \left. \frac{dp_1}{\partial l} \right|_0$$

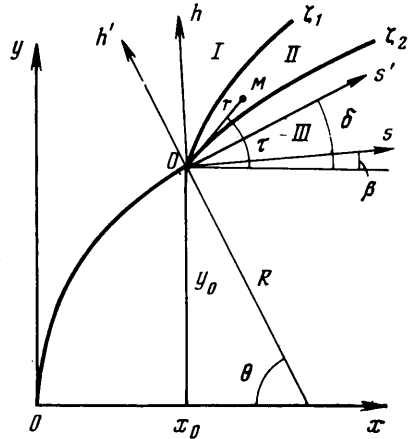
Эта и последующие (4), (6) формулы для градиента давления справедливы лишь для прямолинейного контура за особой точкой, поскольку в этом случае производная давления по нормали к контуру равна нулю. Направление градиента давления (по потоку или против) определяется соответствующим знаком в указанных формулах.

Из уравнений газовой динамики, записанных в полярной системе координат r, θ , следует, что производная давления по нормали к контуру, образованному дугой окружности, и, следовательно, производная давления по направлению касательной l к характеристике ζ соответственно равны

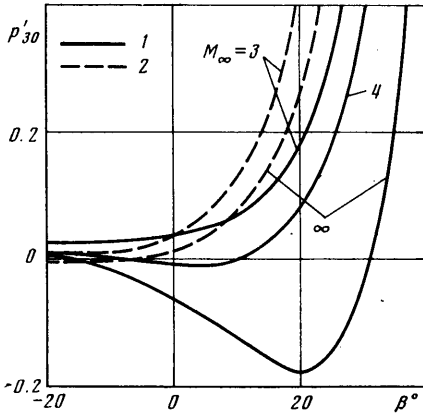
$$(2) \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial r} \right|_{r=1} = \rho_1 u_1^2$$

$$(3) \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial l} \right|_0 = \frac{1}{M_{10}} \left. \frac{\partial p_1}{\partial r} \right|_0 + \frac{\sqrt{M_{10}^2 - 1}}{M_{10}} \left. \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \right|_0$$

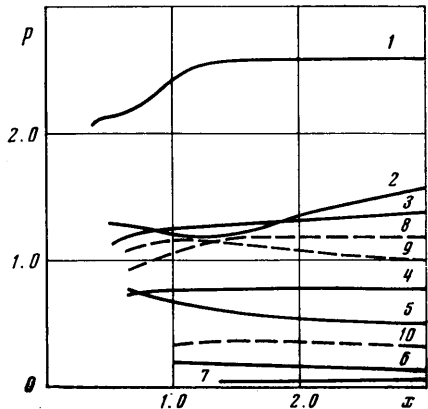
На основании (1)–(3) получаем величину градиента давления



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

для области III в точке разрыва кривизны через значения газодинамических функций и левостороннюю производную давления $\partial p_1 / \partial \theta|_0$

$$(4) \quad \left. \frac{dp_3(s, 0)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{\rho_{10} u_{10}^2}{\sqrt{M_{10}^2 - 1}} + \left. \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \right|_0$$

На фиг. 2 величина указанного градиента представлена для различных чисел Маха набегающего потока M_∞ в зависимости от угла β для затуплен-

ного конуса — 1, для затупленного клина — 2. Кривые построены по таблицам сверхзвукового обтекания сферы [3] и кругового цилиндра [4]. Давление отнесено к произведению плотности набегающего потока на квадрат критической скорости.

Из фиг. 2 можно сделать следующие выводы о градиенте давления в точке разрыва кривизны затупленных конусов и клиньев. На затупленных клиньях указанный градиент давления монотонно уменьшается при уменьшении угла клина β , слабо зависит от числа M_∞ , однако при $M_\infty = 3$ положителен для всех β , при $M_\infty = \infty$ принимает небольшие отрицательные значения для отрицательных β . На затупленных конусах при небольших числах M_∞ градиент в зависимости от β ведет себя аналогично плоскому случаю. При больших M_∞ его изменение по β становится немонотонным, соответствующая кривая имеет минимум. В частности, при $M_\infty = \infty$ этот минимум располагается приблизительно при $\beta = 20^\circ$ и градиент давления в точке разрыва кривизны по величине приблизительно равен соответствующему градиенту в плоском случае, но имеет противоположное направление. На обратных конусах с большим углом конусности появляется небольшой положительный градиент давления.

Результаты расчетов обтекания затупленных конусов и клиньев, полученные методами характеристик и сеток [1-4], хорошо согласуются с указанными выводами. Данные по распределению давления вдоль прямолинейного участка контура, начиная от точки разрыва кривизны (фиг. 1), представлены на фиг. 3 (для конусов [3]: 1 — $M_\infty = \infty$, $\beta = 40^\circ$; 2 — $M_\infty = \infty$, $\beta = 30^\circ$; 3 — $M_\infty = 3$, $\beta = 30^\circ$; 4 — $M_\infty = 3$, $\beta = 20^\circ$; 5 — $M_\infty = \infty$, $\beta = 20^\circ$; 6 — $M_\infty = \infty$, $\beta = 0$; 7 — $M_\infty = \infty$, $\beta = -20^\circ$; для клиньев [4]: 8 — $M_\infty = 3$, $\beta = 20^\circ$; 9 — $M_\infty = \infty$, $\beta = 20^\circ$; 10 — $M_\infty = \infty$, $\beta = 0$).

Обращает на себя внимание факт соответствия аномального поведения градиента давления в точке разрыва кривизны на конусе при больших числах M_∞ и перестройки течения на сферическом затуплении в трансзвуковой области. Аналитическое исследование [7] показывает, что при сверхзвуковом обтекании цилиндра для всех чисел M_∞ и обтекании сферы при $M_\infty \leq 3$ звуковая линия подходит к поверхности тела под острым углом и лишь при больших числах M_∞ в осесимметричном случае угол подхода звуковой линии к телу тупой. Структура течения в трансзвуковой зоне определяет дальнейшее поведение газодинамических функций в сверхзвуковой области и факт аномального поведения звуковой линии при больших M_∞ в осесимметричном случае может быть причиной соответствующего изменения величины градиента давления $dp_3(s, 0)/ds$ в зависимости от положения рассматриваемой точки разрыва кривизны на поверхности тела.

Как видно из фиг. 2, величина градиента давления $dp_3(s, 0)/ds$ для затупленного клина с увеличением угла β растет чрезвычайно быстро, для конуса же это утверждение справедливо для всех M_∞ при $\beta > 20^\circ$. При приближении точки разрыва кривизны контура к звуковой соответствующая величина градиента стремится к бесконечности. Это очевидно и физически — возмущение давления на характеристике первого семейства, возникшее на конечном расстоянии от точки разрыва кривизны при малых M_{10} , распространяясь вдоль характеристики второго семейства, приходит на поверхность клина или конуса в непосредственной близости за этой точкой. Численные исследования обтекания затупленных конусов и клиньев с точкой разрыва кривизны контура (см., например, [1-4]), а также с изломом [3] полностью соответствуют этому утверждению. Образование бесконечного положительного градиента давления при изломах, близких к звуковому, обязательно должно сопровождаться возникновением «висячего» скачка и по крайней мере местного отрыва пограничного слоя.

В [8] проведено аналитическое исследование взаимодействия транс-

звукового течения в окрестности угловой точки, порождаемого степенной особенностью, с прямолинейной стенкой вниз по потоку от угловой точки. Указан класс особенностей, для которого непрерывное решение, построенное первоначально в плоскости годографа, физически не осуществимо из-за образования складки. Этот класс, в частности, содержит решение, найденное в [9]. Проведенные исследования указывают на то, что при обтекании затупленных конусов и клиньев со звуковым изломом образующей контура, по-видимому, реализуется течение с особенностью, приводящей к возникновению «висячего» скачка уплотнения.

Перейдем теперь к анализу течения в окрестности точки излома контура. Будем считать, что параметры течения в области I окрестности излома слабо отличаются от соответствующих левых значений этих параметров в точке излома $f_i = f_{i0}(1 + \varepsilon f_i)$.

Возмущения εf_i к основному плоскопараллельному потоку в области I не могут быть произвольными, они должны удовлетворять уравнениям газовой динамики. Их выражения возьмем в виде, полученном в [10]

$$(5) \quad \begin{aligned} \varepsilon p_1 &= \gamma M_{10}^2 [\varepsilon F_3(s' - \sqrt{M_{10}^2 - 1}h') - \varepsilon F_4(s' + \sqrt{M_{10}^2 - 1}h')] \\ \varepsilon u_1 &= \varepsilon F_1(h') - \varepsilon F_3(s' - \sqrt{M_{10}^2 - 1}h') + \varepsilon F_4(s' + \sqrt{M_{10}^2 - 1}h') \\ \varepsilon \rho_1 &= \varepsilon F_2(h') + M_{10}^2 [\varepsilon F_3(s' - \sqrt{M_{10}^2 - 1}h') - \varepsilon F_4(s' + \sqrt{M_{10}^2 - 1}h')] \\ \varepsilon v_1 &= \sqrt{M_{10}^2 - 1} [\varepsilon F_3(s' - \sqrt{M_{10}^2 - 1}h') + \varepsilon F_4(s' + \sqrt{M_{10}^2 - 1}h')] + \\ &+ v h' \operatorname{ctg} \theta \end{aligned}$$

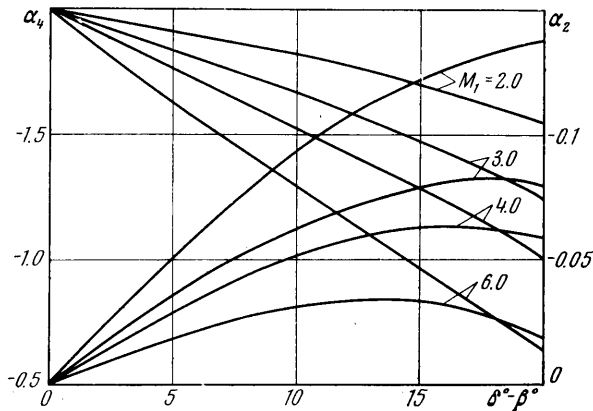
где εp_1 , $\varepsilon \rho_1$, εu_1 и εv_1 — возмущения давления, плотности и скорости поступательного потока u_{10} , γ — показатель адиабаты $M_{10} = (\rho_{10} u_{10}^2 / \gamma p_{10})^{1/2}$, $v=0$ для плоских, $v=1$ для осесимметричных течений, εF_i — произвольные функции, описывающие возмущения, которые распространяются соответственно вдоль линий тока и характеристик.

В [11] получено решение в линейной постановке задачи обтекания выпуклого угла сверхзвуковым слабовозмущенным вихревым потоком совершенного газа. В соответствии с этим решением по заданным возмущениям течения в области I могут быть найдены возмущения к течению Прандтля — Майера в области II и плоскопараллельному течению в области III, последние также могут быть получены в виде (5). Как известно, параметры основного течения в любой точке M (фиг. 1) области II являются функциями лишь угла τ и не зависят от r .

Для определения градиента давления за изломом достаточно в функциях εF_i в (5) взять лишь линейные от аргументов члены, для коэффициентов которых в дальнейшем сохранены те же обозначения εF_i . Тогда величина градиента давления в области III в точке излома может быть записана в виде [11]

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p_{30}} \frac{dp_3(s, 0)}{ds} \Big|_{s=0} &= \alpha_2 \varepsilon F_2 + \alpha_4 \gamma M_{10}^2 \varepsilon F_4 + \\ &+ \frac{\nu \gamma M_{30}^2}{2 \sin \theta} \left[\frac{\kappa M_{30}^2 (\cos \varphi_{20})^{\mu}}{2 \sqrt{M_{30}^2 - 1} \sin^{1/2} \varphi_{20}} \int_{\tau_{20}}^{\tau_{10}} \frac{\kappa \cos \tau \cos \varphi - \sin \tau \sin \varphi}{(\cos \varphi)^{\mu-1} \sin^{1/2} \varphi} d\tau - \right. \\ &\left. - \frac{\sin \beta}{M_{30}^2 - 1} + \frac{M_{30} (\cos \varphi_{20})^{\mu} \sin^{1/2} \varphi_{10} \cos \theta}{M_{10} \sqrt{(M_{10}^2 - 1)} (M_{30}^2 - 1) (\cos \varphi_{10})^{\mu} \sin^{1/2} \varphi_{20}} \right] \\ M_{30} &= (\rho_{30} u_{30}^2 / \gamma p_{30})^{1/2}, \quad \kappa = (\gamma - 1) / (\gamma + 1), \quad \mu = \arcsin(1 / M) \\ \varphi &= \kappa \mu_1 + \operatorname{arctg} \kappa \operatorname{ctg} \mu_1 + \delta - \tau, \quad \tau_2 = \mu_3 + \beta \\ \tau_1 &= \mu_1 + \delta, \quad \chi = 1 / 2 \kappa^{-2} + 1 \end{aligned}$$

Остановимся на влиянии возмущений, описываемых функциями εF_i , на градиент давления за изломом. Величина εF_3 не входит в формулу (6), поскольку соответствующая функция в (5) описывает возмущения, распространяющиеся вдоль характеристик первого семейства и не проникающие за характеристику ξ_1 . Функции εF_1 и εF_2 связаны с возмущениями энтропии и для течений с неизменным полным теплосодержанием линейно-зависимы $(\gamma-1)M_{10}^2 \varepsilon F_1 = \varepsilon F_2$. Коэффициенты α_2 и α_4 , выражения для которых получены в [11], для различных чисел M_0 в зависимости от угла разворота потока в точке излома $\delta-\beta$ приведены на фиг. 4, из которой видно, что $\alpha_2 \ll \alpha_4$. Таким образом, в (6) первым членом можно пренебречь. В случае же отсутствия излома, т. е. при наличии в точке O лишь



Фиг. 4

разрыва кривизны контура, $\alpha_2=0$ и третий член в (6), связанный с осесимметричностью течения, также обращается в нуль.

Выражение для εF_4 может быть получено из (5) через производную давления по направлению касательной l_1 к характеристике ξ_1 , а именно

$$(7) \quad \varepsilon F_4 = - \frac{1}{2\gamma M_{10}^2 p_{10}} \frac{dp_1}{ds'} \Big|_0 = - \frac{1}{2\gamma M_{10} p_{10} \sqrt{M_{10}^2 - 1}} \frac{\partial p_1}{\partial l_1} \Big|_0$$

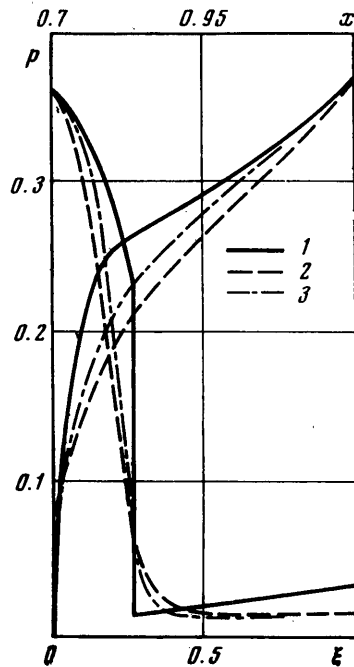
Для тел с разрывом кривизны контура ($s'=s$, $p_{10}=p_{30}$, $\alpha_2=0$, $\alpha_4=-2$, $\delta=\beta=\pi/2-\theta$) из (7) следует соотношение (1).

Величина градиента давления за точкой излома, определяемая формулой (6), в случае плоского течения уменьшается при увеличении угла разворота потока $\delta-\beta$. Расчеты обтекания затупленных цилиндрических тел с изломом образующей не известны. Однако подтверждением сказанного является установленный выше факт уменьшения градиента давления в точке разрыва кривизны контура клина с круговым цилиндрическим затуплением при уменьшении угла клина, поскольку в этом случае разворот потока вдоль дуги окружности можно интерпретировать как соответствующий разворот в окрестности точки излома контура.

Провести анализ изменения градиента давления в точке излома контура осесимметричного тела в зависимости от угла разворота потока в этой точке трудно вследствие наличия в формуле (6) третьего члена. Интеграл в формуле (6) заатабулирован для ряда конкретных случаев в [12], где рассмотрена задача о слабозмущенном осесимметричном потенциальном течении, близком к плоскому течению Прандтля — Майера. В этой работе,

в частности, получено, что для конических частей ($\delta=0$) интеграл в (6) оказывается положительным, вклад от члена в квадратных скобках в градиент давления в подобных течениях, например, при обтекании соответствующего тела сегментально-конической формы будет также положительным ($\beta < 0$). Отметим, что анализ поведения градиента давления за точкой излома контура в осесимметричных и плоских соплах на основании рассмотрения условий совместности проводился в [13].

Введение скругления в окрестности сопряжения лобового и бокового участков тела, естественно, может приводить к значительному локальному изменению распределения давления, и в частности к исчезновению положительного градиента давления, возникающего на соответствующем теле, имеющем излом контура. Так, на фиг. 5 показано продольное и поперечное распределения давления (1) в окрестности точки излома контура сегментально-конического тела, расположенной в сверхзвуковой области обтекания. Давление за точкой излома экстраполировано по градиенту, вычисленному по формуле (6). На фиг. 5 показаны также результаты расчета сверхзвуковой области обтекания сегментального тела, полученные по методу [6] для используемого ранее (см., например, [14]) плавного скругления контура в окрестности миделевого сечения



Фиг. 5

$$(8) \quad [y^2 + (1-x)^2]^{n/2} + \left[\frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{y \sin \beta}{\sin(\theta + \beta) + (x-1) \sin \beta} \right] = 1$$

Представлены данные для $n=40-2$, $n=70-3$; $\xi = (r-r_b)/(r_w-r_b)$, b — тело, w — волна. Давление отнесено к произведению плотности набегающего потока на квадрат максимальной скорости. При $n \rightarrow \infty$ контур тела стремится к контуру соответствующего тела с изломом образующей. Хотя получить гладкое решение за скруглением с $n > 70$ по методу [6], использующему аналитическое сглаживание функций на слоях, не удастся, проведенный контрольный расчет течения в окрестности миделя тела, фактически имеющего излом образующей ($n=1000$), показал, что давление за изломом и величина градиента давления в точке излома практически совпадают с соответствующими значениями, полученными по формулам Прандтля — Майера и формуле (6). Таким образом, показано, что при увеличении n численное решение задачи обтекания окрестности миделя скругления сегментального тела, полученное с помощью метода [6], сходится к соответствующему асимптотическому решению для тела с изломом образующей контура.

В заключение автор благодарит Г. Н. Андреева за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чушкин П. И. Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. М., «Наука», 1970.
3. Дьяконов Ю. Н., Пчелкина Л. В., Сандомирская И. Д. Сверхзвуковое обтекание затупленных тел. М., Изд-во МГУ, 1971.
4. Лебедев М. Г., Пчелкина Л. В., Сандомирская И. Д. Сверхзвуковое обтекание плоских затупленных тел. М., Изд-во МГУ, 1974.
5. Белоцерковский О. М., Булекбаев А., Голомазов М. М., Грудницкий В. Г., Душин В. К., Иванов В. Ф., Лунькин Ю. П., Попов Ф. Д., Рябинков Г. М., Тимофеева Т. Я., Толстых А. И., Фокин В. Н., Шугаев Ф. В. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. М., ВЦ АН СССР, 1967.
6. Миносцев В. Б. Метод расчета сверхзвукового трехмерного обтекания гладких тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
7. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Шифрин Э. Г. О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
9. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, pt 1.
10. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
11. Миносцев В. Б. Обтекание угла, большего 180° , сверхзвуковым слабовозмущенным потоком газа. М., Оборонгиз, 1959.
12. Шмыглевский Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Сборник теоретических работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957.
13. Пирумов У. Г. Исследование течения в до- и трансзвуковой областях сопла Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
14. Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф. Исследование сверхзвукового пространственного обтекания затупленных тел. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 5.