**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1977**

УДК 533.6.011.35

УРАВНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Г. Д. СЕВОСТЬЯНОВ

(Саратов)

В настоящее время имеется несколько различных уравнений для описания околозвукового нестационарного безвихревого течения идеального совершенного газа ([1], табл. 1) в зависимости от соотношений между малыми характерными параметрами потока. Для расширения области применения этих уравнений создают из них составное уравнение (например, объединяют уравнения для малых и больших чисел Струхаля в теории колебания крыла). В работе получено более общее уравнение для плоского течения указанного класса с помощью естественных ортогональных координат $\varphi\psi$ (семейства эквипотенциальных линий и линий тока) без использования ε-оценок, при этом уравнение по сравнению с составным содержит новый нелинейный член. Найдены точные решения уравнения, описывающие нестационарные околозвуковые течения в плоских соплах; одно из них описывает процесс установления расчетного режима в соплах Лаваля с неподвижными стенками.

1. Неустановившиеся плоские безвихревые изэнтропические течения идеального совершенного газа в декартовых координатах XY описываются системой

$$\frac{d}{dt}\ln\rho+u_X+v_Y=0,\quad \Omega=v_X-u_Y=0,\quad p\rho^{-\gamma}=\text{const},\quad a^2=\frac{\gamma p}{\rho} \tag{1.1}$$

$$\frac{w^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_*^2=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_{*c}^2-w_c\varphi_t$$

$$\varphi_X=\frac{u}{w_c},\quad \varphi_Y=\frac{v}{w_c} \tag{1.2}$$

Здесь p, ρ, $\mathbf{w}(u, v)$, a, γ — давление, плотность, вектор скорости, скорость звука, отношение теплоемкостей соответственно; φ — потенциал скорости; $w_c>0$ — постоянная размерности скорости; a_* — критическая скорость звука; постоянная a_{*c} — ее значение в момент, когда $\varphi_t=0$.

Из (1.1) придем к системе для u, v, a_*^2

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}a_*^2-\frac{\gamma-1}{2}w^2\right)+(\gamma-1)(u_X+v_Y)=0,\quad w^2=u^2+v^2\\ v_X-u_Y=0,\quad (a_*^2)_X=-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}u_t,\quad (a_*^2)_Y=-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_t\end{gathered} \tag{1.3}$$

где последние три уравнения зависимы между собой. Расписав в (1.3) полную производную по t в переменных Эйлера, перейдем к естественной ортогональной системе координат $\varphi\psi$ (в фиксированный момент времени φ=const — семейство эквипотенциальных линий, ψ=const — семейство линий тока). Здесь ψ — «функция тока», вводимая соотношениями ортогональности ($\nabla\varphi\nabla\psi=0$)

$$\psi_X=-gv/w_c,\quad \psi_Y=gu/w_c \tag{1.4}$$

где безразмерная функция g подлежит определению (для установившегося течения $g=\rho/\rho_c$). Если θ — угол наклона $\mathbf{w}$ к оси X, то, исключая в (1.4) перекрестным дифференцированием ψ и переходя в (1.3) к производным по φ и ψ, получим систему для w, θ, a_*^2, g

$$w\theta_\varphi=gw_\psi,\quad (\ln gw)_\varphi+g\theta_\psi=0,\quad \frac{w}{w_c}(a_*^2)_\varphi=-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}w_t$$

$$\frac{g}{w_c}(a_*^2)_\psi=-2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\theta_t,\quad \frac{\gamma+1}{2}(w^2-a_*^2)\frac{w}{w_c}w_\varphi= \tag{1.5}$$

$$=\left(\frac{\gamma+1}{2}a_*^2-\frac{\gamma-1}{2}w^2\right)g\frac{w^2}{w_c}\theta_\psi+\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}(a_*^2)_t-2ww_t$$

при этом переход с плоскости $\varphi\psi$ на плоскость потока XY совершается по формулам из (1.2), (1.4)

$$d(X+iY)=e^{i\theta}\left(\frac{w_c}{w}d\varphi+i\frac{w_c}{wg}d\psi\right) \tag{1.6}$$

$$dl^2=dX^2+dY^2=\left(\frac{w_c}{w}\right)^2(d\varphi^2+g^{-2}d\psi^2)$$

Здесь dX, dY — полные дифференциалы в силу первых двух уравнений из (1.5), поэтому система $\varphi\psi$ глобальная. Предполагается, что начало A системы $\varphi\psi$ движется по заданному закону $X_A(t)$, $Y_A(t)$. Если подставить θ_ψ из последнего уравнения (1.5) во второе и использовать третье, то для определения g получим

$$(\gamma-1)(\ln g)_\varphi=(\ln a^2)_\varphi+\frac{w_c}{w^2}(\ln a^2)_t \tag{1.7}$$

где a^2 выражено через a_*^2 и w в (1.1).

Введем обозначения

$$\frac{w}{w_c}=1+\eta,\quad \frac{a_*}{a_{*c}}=1+\zeta,\quad M_c=\frac{w_c}{a_c},\quad \lambda_c=\frac{w_c}{a_{*c}} \tag{1.8}$$

где положительные постоянные w_c, a_c, a_{*c} связаны интегралом Бернулли

$$\frac{w_c^2}{2}+\frac{a_c^2}{\gamma-1}=\frac{(\gamma+1)a_{*c}^2}{2(\gamma-1)}$$

Рассмотрим околозвуковую область потока, в которой $w\approx w_c$, $M_c\approx1$, $a_*\approx a_{*c}$, $g\approx1$. Тогда в (1.8) $|1-M_c^2|$, $|\eta|$, $|\zeta|\ll1$ и система (1.5) без второго уравнения упростится

$$\theta_\varphi=\eta_\psi,\quad \zeta_\varphi=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_c^2w_c^{-1}\eta_t,\quad \zeta_\psi=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_c^2w_c^{-1}\theta_t$$

$$\eta_\varphi[1-M_c^{-2}+(\gamma+1)\eta-(\gamma+1)\lambda_c^{-2}\zeta]= \tag{1.9}$$

$$=M_c^{-2}\theta_\psi+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\lambda_c^{-2}w_c^{-1}\zeta_t-2w_c^{-1}\eta_t$$

Введя потенциал Φ° соотношениями

$$\eta=\Phi_\varphi^\circ,\quad \theta=\Phi_\psi^\circ,\quad \zeta=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_c^2w_c^{-1}\Phi_t^\circ \tag{1.10}$$

получим уравнение околозвуковых плоских нестационарных безвихревых течений в естественных подвижных координатах

$$(1.11)\qquad \left[1-M_c^2-(\gamma+1)M_c^2\Phi_\varphi^\circ-(\gamma-1)\frac{M_c}{a_c}\Phi_t^\circ\right]\Phi_{\varphi\varphi}^\circ+$$

$$+\Phi_{\psi\psi}^\circ-2\frac{M_c}{a_c}\Phi_{\varphi t}^\circ-a_c^{-2}\Phi_{tt}^\circ=0$$

Вывод уравнения (1.11) дан без использования ε-оценок аргументов, функции и ее производных. Коэффициент при $\Phi_{\varphi\varphi}^\circ$ равен $1-M^2$, где M — местное число Маха. В стационарном случае уравнение (1.11) переходит в уравнение Кармана — Фальковича для координат $\varphi\psi$; если в последнем уравнении (1.9) пренебречь изменением a_* (полагаем $\zeta=0$), то придем к уравнению Линя — Рейсснера — Цяня (ЛРЦ) для медленно меняющегося околозвукового потока в системе $\varphi\psi$. В системе (1.9) диапазон изменения θ определяется размерами околозвуковой области.

Условие обтекания непроницаемой твердой границы есть $\theta=\theta_\text{Г}$, так как перемещение границы учитывается формулами перехода (1.6). Коэффициент давления c_p, p и ρ вычисляются по формулам для околозвукового потока

$$\frac{p}{p_c}=1-\gamma M_c^2\left(\Phi_\varphi^\circ+\frac{1}{w_c}\Phi_t^\circ\right),\quad \frac{\rho}{\rho_c}=1-M_c^2\left(\Phi_\varphi^\circ+\frac{1}{w_c}\Phi_t^\circ\right)$$

$$c_p=\frac{p-p_c}{{}^1/_2\rho_c w_c^2}=-2\left(\Phi_\varphi^\circ+\frac{1}{w_c}\Phi_t^\circ\right)$$

Если число Маха M_c не близко к единице, а η и ζ близки к нулю, то вместо (1.11) получим линейное уравнение

$$(1-M_c^2)\Phi_{\varphi\varphi}^\circ+\Phi_{\psi\psi}^\circ-2\frac{M_c}{a_c}\Phi_{\varphi t}^\circ-a_c^{-2}\Phi_{tt}^\circ=0$$

которое по форме совпадает с уравнением линейной теории для слабо возмущенного однородного потока ($M_\infty=M_c\neq1$), параллельного оси X

$$(1.12)\qquad (1-M_\infty^2)\Phi_{xx}+\Phi_{yy}-2M_\infty^2\Phi_{x\tau}-M_\infty^2\Phi_{\tau\tau}=0,\quad \varphi=L(x+\Phi)$$

$$(1.13)\qquad x=X/L,\quad y=Y/L,\quad \tau=u_\infty t/L$$

Здесь $u_\infty=w_c$ — постоянная скорость однородного потока, L — масштаб длины. В этом случае, если точка A перемещается незначительно, то координатные линии систем XY и $\varphi\psi$ близки. Используя эту аналогию, с помощью (1.11) запишем уравнение для слабо возмущенного околозвукового потока ($M_\infty=M_c\approx1$) в декартовых координатах

$$(1.14)\qquad [1-M_\infty^2-(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x-(\gamma-1)M_\infty^2\Phi_\tau]\Phi_{xx}+\Phi_{yy}-$$
$$-2M_\infty^2\Phi_{x\tau}-M_\infty^2\Phi_{\tau\tau}=0$$

Заметим, что с помощью ε-оценок получается несколько околозвуковых уравнений частного вида ([1, 2], табл. 1) и для расширения области их применения с их помощью получают составное уравнение (например, в теории колебания профиля в околозвуковом потоке объединяют члены уравнения ЛРЦ и уравнения линейной теории). Уравнение (1.14) отличается от составного уравнения новым нелинейным членом $(\gamma-1)M_\infty^2\Phi_\tau\Phi_{xx}$ и является для данного класса околозвуковых течений наиболее общим уравнением первого приближения. Новый член появляется и в уравнениях околозвуковых осесимметричных и трехмерных течений. Если в (1.14) для некоторых течений отбросить члены с Φ_τ и $\Phi_{\tau\tau}$, то придем к уравнению ЛРЦ, которое обладает свойствами, отсутствующими у точного уравнения (скорость распространения звуковых сигналов вниз по потоку бесконечна, плоскость τ=const в пространстве $xy\tau$-характеристическая поверхность, задача Коши по τ не имеет места ([3], § 19). Уравнение (1.14), как и составное уравнение, лишено этих недостатков.

Если $\Phi(x, y, \tau)$ — частное решение уравнения (1.14), то характеристическая линия $F(x, y, \tau)=0$ определяется из уравнения

$$(1.15)\qquad [1-M_\infty^2-(\gamma+1)M_\infty^2\Phi_x-(\gamma-1)M_\infty^2\Phi_\tau]F_x^2+F_y^2-\\ -2M_\infty^2F_xF_\tau-M_\infty^2F_\tau^2=0$$

Так, если в однородном околозвуковом потоке ($M_\infty\approx1$, $\Phi\equiv0$) в момент t_0 возник звуковой импульс в точке (x_0, y_0), то его фронт есть окружность

$$F=(x-x_0-\tau+\tau_0)^2+(y-y_0)^2-M_\infty^{-2}(\tau-\tau_0)^2=0$$

как для точного и линеаризованного уравнений, тогда как для уравнения ЛРЦ этот фронт есть парабола [3].

В координатах xy условие обтекания твердой стенки $y=h(x, \tau)\approx y_c$ примет вид

$$(1.16)\qquad \Phi_y=h_x+h_\tau,\ y\approx y_c=\text{const}$$

коэффициент давления $c_p=-2(\Phi_x+\Phi_\tau)$.

2. Приведем точные решения нелинейного уравнения (1.14) при $M_\infty=1$. Таким решением является

$$(\gamma+1)\Phi=A+Bx+Cx^2/2,\quad C_{yy}-C_{\tau\tau}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}CC_\tau=0$$

$$(2.1)\qquad B_{yy}-B_{\tau\tau}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}CB_\tau=C^2+2C_\tau$$

$$A_{yy}-A_{\tau\tau}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}CA_\tau=CB+2B_\tau$$

где A, B, C — функции, зависящие от y, τ. Если $C=c=\text{const}>0$, то из (2.1) получим решение

$$(2.2)\qquad B=c^2y^2/2+De^\xi,\quad \xi=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}c\tau\leqslant0,\ D=\text{const}$$

$$A=\frac{c^3y^4}{24}-\frac{D}{c}\frac{(3-\gamma)(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2}(\xi-1)e^\xi$$

которое описывает процесс установления расчетного режима в плоском сопле Лаваля с неподвижными стенками (Φ_y не зависит от времени). При $t\to+\infty$ или $D=0$ (2.1), (2.2) переходит в известное стационарное решение Фальковича. Криволинейная линия нулевого наклона скорости к оси сопла ($\Phi_y=0$) есть парабола: $x=-cy^2/6$, звуковая линия $(\gamma+1)\Phi_x+(\gamma-1)\Phi_\tau=0$ — также парабола

$$(2.3)\qquad c\left[1-D\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2e^\xi\right]x=-c^2y^2/2-D\left[1+\frac{(3-\gamma)}{\gamma+1}\xi\right]e^\xi,\ \xi\leqslant0$$

вогнутая вверх по потоку при $D<[(\gamma+1)/(\gamma-1)]^2$.

Звуковая линия меняет кривизну при движении и имеет два положения остановки на оси сопла (на фигуре кривая *1* — положение звуковой линии, кривая *2* — линия горизонтальности скорости, $D>0$), тогда как для аналогичного решения Адамсона [4] для уравнения ЛРЦ она имеет одно положение остановки и не меняет кривизну. Если $D>0$, то в каждой точке потока

Φ_x и скорость уменьшаются, выходя на стационарные значения (при $D<0$ эти величины увеличиваются). Массовый расход газа через сопло нетрудно подсчитать, например, вдоль неподвижной линии $\Phi_y=0$. Рассмотренное течение можно ожидать на заключительной стадии запуска сопла Лаваля.

Для других зависимостей функции $B=B(y,\tau)$ в (2.1) можно построить околозвуковые течения в соплах с подвижными стенками.

Другое точное решение уравнения (1.14)

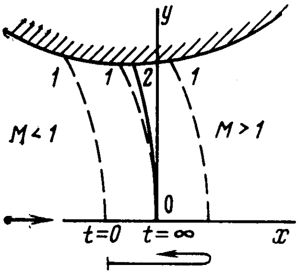
$$[B(\gamma-1)+\gamma+1]\Phi=F(z)+zy^2-\frac{5}{12}y^4,\quad z=x+\frac{y^2}{2}+B\tau-B(B+2)$$

$$R(z)=F'(z),\ RR'=R+2z \tag{2.4}$$

где $B=\mathrm{const}$, $F(z)$ зависит от z параметрически

$$F=c_1^2s^4-4c_1c_2s-\frac{c_2^2}{2}s^{-2},\quad 0<s<\infty,\quad z=c_1s^2+c_2s^{-1},\quad c_1, c_2=\mathrm{const}$$

Это решение, в частности, описывает нестационарное течение типа Тейлора внутри сопла Лаваля с местными сверхзвуковыми зонами на его стенках. При $B=0$ (2.4) переходит в стационарное решение Томотики и Тамады.



Для околозвукового потока малые величины $1-M_c^2$, η, ζ в (1.8) имеют независимые порядки малости, поэтому для конкретного потока необходимо исследовать вклад каждого из нелинейных членов в (1.11) — (1.14) с целью упрощения уравнения (сравнить Φ_x и Φ_τ).

Влияние нового члена в (1.11) — (1.14) по сравнению с составным уравнением нетрудно выяснить, если построить для составного уравнения точное решение вида (2.1) для сопла с неподвижными стенками (Φ_y не зависит от времени). Это решение при $t\to\infty$ не выходит на стационарное решение Фальковича в отличие от решения (2.1), (2.2) для уравнения (1.14) и решения Адамсона для уравнения ЛРЦ. Таким образом, новый член влияет на процесс установления расчетного режима в соплах Лаваля. С другой стороны, вклад нового члена при колебании профиля в звуковом потоке незначителен для средних значений приведенной частоты. Составное уравнение объединяет уравнения для низких и высоких частот, уравнение (1.14) справедливо для всех частот; однако, как показал расчет силовой нестационарной нагрузки на тонком профиле в звуковом потоке параболическим методом Стрейтера — Тейпеля, составное уравнение применимо и для средних частот.

Поступила 5 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Майлс Дж. У.* Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.
2. *Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S.* On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible flow. J. Math. and Phys., 1948, vol. 27, No. 3. (Рус. перев.: В сб. «Газовая динамика». М., Изд-во иностр. лит., 1950.)
3. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., ВЦ АН СССР, 1965.
4. *Adamson T. C.* Unsteady transonic flows in two-dimensional channels. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 3.