

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ  
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ СИЛЬНО  
НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУИ ГАЗА  
В СПУТНЫЙ ГИПЕРЗВУКОВОЙ ПОТОК

Г. А. ХРАМОВ, С. Ф. ЧЕКМАРЕВ

(Новосибирск)

Для решения некоторых задач, связанных с истечением сильно недорасширенной осесимметричной струи газа в спутный гиперзвуковой поток, необходимо знать положение поверхностей сильного разрыва, определяющих в этом случае структуру газодинамической области. Для каждого конкретного набора определяющих параметров положение поверхностей может быть найдено одним из следующих способов: путем прямого численного решения задачи, включающим и расчет поля течения [1], путем приближенного решения задачи [2, 3] или с помощью «универсальных» кривых, полученных в результате обобщения данных численных расчетов или опытных данных [3, 4]. Для прикладных задач последний способ наиболее удобен, так как он оперативен, имеет известную точность и, кроме того, если обобщение проводится на основе рассмотрения модельных задач, несет определенную физическую информацию.

В работах [3, 4] «универсальные» зависимости были получены для области течения, примыкающей к срезу сопла и простирающейся вниз по потоку не далее, чем справедливо ньютоновское приближение для давления спутного потока на границу струи. В данной работе показано, что масштабы газодинамической области в районе падения висячего скачка на ось струи отличаются от соответствующих масштабов в упомянутой выше области, вследствие чего начальный участок струи на всем своем протяжении не может быть охарактеризован едиными (постоянными) линейными масштабами. Введены локальные масштабы и с их помощью дано авторское представление для положения поверхностей сильного разрыва на длине начального участка струи.

Структура газодинамической области на начальном участке струи определяется положением четырех поверхностей сильного разрыва (фиг. 1): контактной поверхности, разделяющей спутный поток и струю ( $i$ ), ударной волны в спутном потоке ( $e$ ), висячей ( $s$ ) и отраженной ( $f$ ) ударных волн внутри струи. В безразмерных координатах  $x/R_c$  и  $r/R_c$ , где  $R_c$  — радиус среза сопла, положение этих поверхностей определено, если заданы угол полураствора сопла  $\theta_c$ , отношения теплоемкостей газа в струе  $\kappa_c$  и в спутном потоке  $\kappa_\infty$ , числа Маха на срезе сопла  $M_c$  и в спутном потоке  $M_\infty$  и отношение давления на срезе сопла к давлению в спутном потоке  $n = p_c/p_\infty$ . Ниже рассматривается случай  $M_c^2 \gg 1$ ,  $M_\infty^2 \gg 1$ ,  $n \gg 1$  и  $\theta_c \ll \theta_*$ , где  $\theta_*$  — предельный угол разворота потока для данного  $M_c$  при расширении газа в вакуум.

Сначала рассмотрим область течения, примыкающую к срезу сопла и ограниченную вниз по потоку требованием  $p_i \gg p_\infty$ , где  $p_i$  — давление на границе струи (область I на фиг. 1).

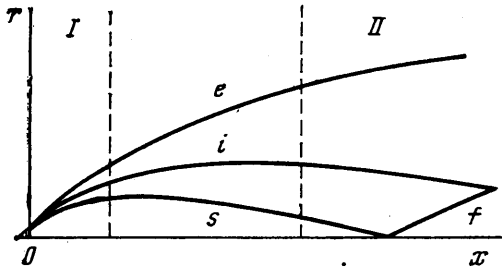
В силу условий  $M_c^2 \gg 1$  и  $\theta_c \ll \theta_*$  продольная составляющая скорости газа в струе  $u$  меняется слабо. Кроме того, поскольку в рассматриваемых условиях поперечные размеры струи много меньше продольных [1], продольная составляющая скорости спутного потока также близка к постоянной.

Это позволяет в той и другой области воспользоваться законом плоских сечений и с помощью замены  $x=u_c t$  ( $x=u_\infty t$ ) перейти к рассмотрению соответствующей одномерной нестационарной задачи. Известно, что задача о струе сводится к задаче о расширении цилиндрического сгустка газа, а задача о спутном потоке — к задаче о вытеснении газа расширяющимся цилиндрическим поршнем. Такой подход был использован в [2], где совместное рассмотрение этих задач проводилось методом тонкого ударного слоя Г. Г. Черного [5].

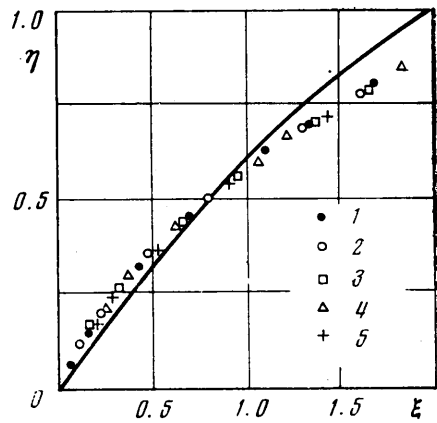
Возвращаясь в формулах [2] к переменной  $x$ , для  $r_i \gg R_c$ , когда практически весь газ струи сосредоточен в ударном слое, имеем

$$\frac{d}{dx} \left[ (\rho_c u_c^2 R_c^2 + \rho_\infty u_\infty^2 r_i^2) \frac{dr_i}{dx} \right] = 0$$

Для интегрирования этого уравнения необходимо знать начальный угол наклона контактной поверхности к оси струи  $\theta_0$ . В [3]  $\theta_0$  полагался равным



Фиг. 1



Фиг. 2

$\theta_*$ , а в [4] он выбирался с помощью теории размерностей, оставляющей в данном случае произвол по зависимости от  $\kappa_c$ . Руководствуясь тем соображением, что теплосодержание газа на срезе сопла  $h_c$  в области, прилегающей к срезу сопла, при  $M_c^2 \gg 1$  идет в основном на увеличение поперечной составляющей скорости [1], в качестве  $\theta_0$  возьмем  $\sqrt{2}h_c/u_c$ . Тогда с учетом  $r_i \gg R_c$ ,  $\theta_c \ll \theta_*$  и  $M_c^2 \gg 1$  начальные условия могут быть записаны в виде

$$r_i=0, \quad \frac{dr_i}{dx} = \sqrt{\frac{2}{\kappa_c-1}} \frac{1}{M_c} \quad (x=0).$$

После интегрирования получаем

$$\eta = \sqrt[3]{\xi + \sqrt{1+\xi^2}} + \sqrt[3]{\xi - \sqrt{1+\xi^2}}, \quad \eta = r_i/R^*, \quad \xi = x/X^* \quad (1)$$

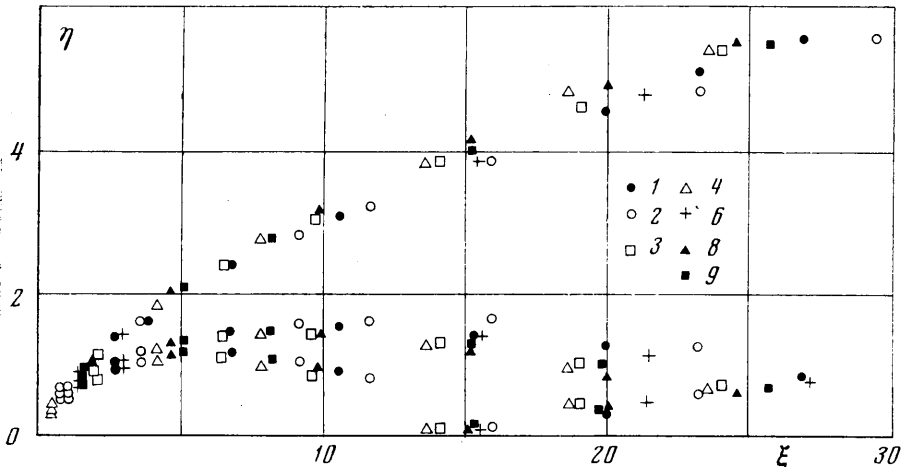
$$R^* = R_c \sqrt{\frac{\rho_c u_c^2}{\rho_\infty u_\infty^2}} \approx R_c \frac{M_c}{M_\infty} \sqrt{\frac{\kappa_c p_c}{\kappa_\infty p_\infty}}$$

$$X^* = \frac{\sqrt{2}}{3} R_c \frac{M_c^2}{M_\infty} \sqrt{\frac{\kappa_c(\kappa_c-1)p_c}{\kappa_\infty p_\infty}}$$

Для иллюстрации на фиг. 2 приведено сравнение полученного решения (сплошная линия) с результатами численных расчетов [1]; цифры 1—6 соответствуют различным режимам [1], параметры которых даны ниже.

$M_c$	4	4	4	5	4	4	4	4	5
$\kappa_c$	1.3	1.3	1.4	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
$\theta_c$	$10^\circ$	$10^\circ$	$10^\circ$	$10^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$10^\circ$	$10^\circ$
$M_\infty$	12	15	12	12	12	12	10	10	15
$n$	$10^5$	$10^5$	$10^5$	$10^5$	$10^4$	$10^5$	$10^5$	$10^7$	$10^7$

В области I толщина ударных слоев ( $r_s, r_i$ ) и ( $r_i, r_c$ ) мала по сравнению с  $r_i$  [1], поэтому зависимость  $r_c$  и  $r_s$  от определяющих параметров задачи будет носить тот же характер, что и  $r_i$ . Таким образом, в качестве масштабов по  $x$  и  $r$  в области I следует взять величины  $X^*$  и  $R^*$  (1). На фиг. 3



Фиг. 3

представлены положения поверхностей сильного разрыва [1] в автомодельных переменных  $\eta, \xi$ . Видно, что удовлетворительное обобщение структуры газодинамической области имеет место для  $\xi = x/X^* \leq 5$ .

В связи с полученными выражениями для  $X^*$  и  $R^*$  необходимо заметить следующее. Во-первых, они не включают в себя величину  $\theta_c$ , что означает, что положения поверхностей в случае  $\theta_c \ll \theta_0$  не зависят от величины  $\theta_c$ , это обстоятельство отмечалось ранее в [3, 4]. Во-вторых, выражения для  $X^*$  и  $R^*$  (1) имеют несколько иную зависимость от  $\kappa_0$ , чем соответствующие в [3, 4] (также отличающиеся между собой); это связано с различным заданием начального угла  $\theta_0$ .

Перейдем теперь к выводу масштабов в области II, характерной точкой которой является точка падения висячего скачка на ось струи. Здесь движение в поперечном направлении внутреннего и внешнего ударных слоев надо рассматривать отдельно.

Рассмотрим движение внутреннего ударного слоя. Как показывают численные расчеты [1], давление  $p_i$  вдоль границы струи в области II меняется слабо и по величине близко к  $p_\infty$ . Используя этот факт, в приближении тонкого ударного слоя имеем [2]

$$(2) \quad \frac{d^2 r_i}{dt^2} + 2 \frac{p_\infty}{\rho_c R_c^2} r_i = 0$$

где  $t=x/u_{\max}$  (здесь в качестве характерной скорости по  $x$  взята  $u_{\max}$ , поскольку область II лежит в дальнем поле струи).

Уравнение (2) является уравнением движения для гармонического осциллятора. Период колебаний осциллятора  $\sim \sqrt{\rho_c R_c^2 / p_\infty}$ , следовательно, в качестве масштаба по  $x$  в области II можно взять величину

$$(3) \quad X^\circ = u_{\max} \sqrt{\frac{\rho_c R_c^2}{p_\infty}} = R_c \sqrt{\frac{\kappa_c}{\kappa_c - 1} \left(1 + \frac{\kappa_c - 1}{2} M_c^2\right) \frac{p_c}{p_\infty}}$$

Масштаб по  $r$  пропорционален амплитуде осциллятора, которая может быть выражена через его энергию, в данном случае  $R^\circ \sim \sqrt{E_+ / p_\infty}$ . Энергия осциллятора  $E_+ \sim I_c = \pi R_c^2 C_p \rho_c T_c$ . Поэтому окончательно можем положить

$$(4) \quad R^\circ = R_c \sqrt{\frac{\kappa_c}{\kappa_c - 1}} \sqrt{\frac{p_c}{p_\infty}}$$

Обратимся теперь к поведению спутного потока в области II. Его движение в поперечном направлении происходит здесь по существу независимо от струи и определяется энергией торможения спутного потока на участке, где ударные слои ( $r_e, r_i$ ) и ( $r_i, r_s$ ) движутся совместно. Переходя к рассмотрению одномерной нестационарной задачи ( $x=u_\infty t$ ), можно считать, что движение спутного потока в поперечном направлении происходит так же, как при взрыве цилиндрического заряда. Энергия взрыва

$$E \simeq \pi \rho_\infty r_{il} \left(\frac{dr_i}{dt}\right)_{il}^2 \simeq \eta_i^2 \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_i^2 I_c$$

где индексом  $l$  помечены значения соответствующих величин в «момент» разъединения ударных слоев. Поскольку точка разъединения лежит в области удовлетворительного обобщения структуры течения в переменных  $\xi$  и  $\eta$  (фиг. 3), величина  $\eta_i^2 (d\xi/d\eta)_i^2$  не зависит от параметров потока. С учетом этого при  $r_e \gg r_{il}$  по теории сильного взрыва [6] имеем  $r_e \sim (E/\rho_\infty)^{1/4} t^{1/2} \sim (I_c/\rho_\infty)^{1/4} t^{1/2}$  или, возвращаясь к переменной  $x$

$$(5) \quad r_e/R^* \sim (x/X^*)^{1/2}$$

Таким образом, масштабы для ударной волны в спутном потоке в областях I и II совпадают; разумно предположить, что это имеет место и в промежуточной области. Справедливость этого утверждения иллюстрируется фиг. 3.

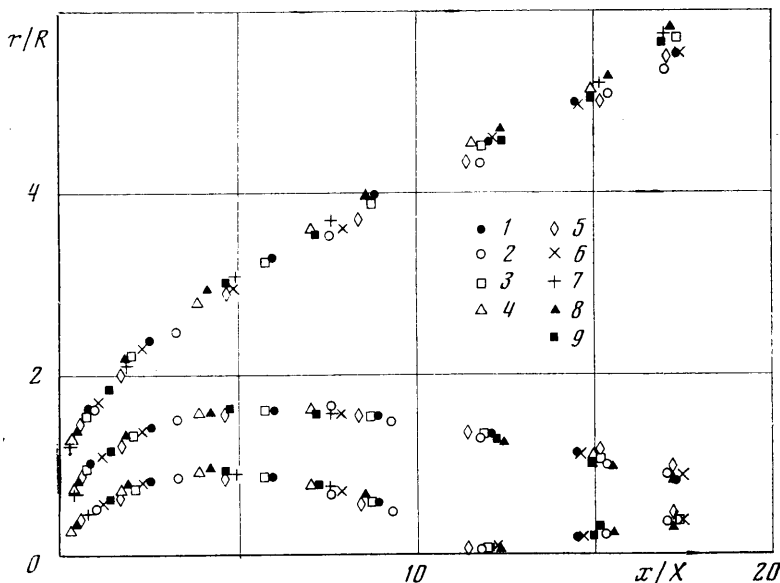
Необходимо заметить, что для режимов, представленных на фиг. 3 (как и вообще в [1]), предположение о том, что взрыв является сильным, не выполняется. Имеющийся в связи с этим разброс точек в положении волны  $e$  можно устранить, если выбрать масштабы из решения задачи о взрыве с учетом противодавления (собственной внутренней энергии газа) [6]. Однако, поскольку разброс точек невелик ( $\sim 4\%$ ), этого делать не будем.

В области течения, относящейся к струе, обобщением в переменных ( $x/X^*$ ,  $r/R^*$ ) удовлетвориться нельзя. Выше было показано, что масштабы, характеризующие струю, меняются при движении вниз по потоку от  $X^*$  и  $R^*$  до  $X^\circ$  и  $R^\circ$ . Зададимся теперь целью определить масштабы струи по  $x$  и  $r$  так, чтобы при отнесении к ним координат границы струи и скачков  $s$  и  $f$  получались автомодельные зависимости по определяющим параметрам задачи. Ясно, что эти масштабы будут функциями определяющих параметров и координаты  $x$ . Определим сначала продольный размер  $X$ . Не ограничивая общности, можем считать  $X = X(\kappa_c, M_c, \kappa_\infty, M_\infty, n, \xi)$ , где

$\xi = x/X^*$ . Разложим эту зависимость в ряд по  $\xi$ , ограничиваясь двумя членами разложения

$$X = X_{\xi=0} + \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \xi$$

Поскольку по переменной  $\xi$  размеры области течения обобщаются удовлетворительно (фиг. 3), точность разложения от конкретных значений определяющих параметров будет зависеть слабо. При  $\xi \rightarrow 0$   $X \rightarrow X^*$ , следовательно,  $X_{\xi=0} = X^*$ . Далее, из физических соображений ясно, что



Фиг. 4

$(\partial X / \partial \xi)_{\xi=0} = \alpha X^*$ , где  $\alpha$  — константа, не зависящая от определяющих параметров; она подбирается экспериментально. Аналогично определяется поперечный размер  $R$ . Таким образом

$$(6) \quad X = X^* + \alpha X^* \frac{x}{X^*}, \quad R = R^* + \beta R^* \frac{x}{X^*}$$

На фиг. 4 представлены положения поверхностей сильного разрыва для тех же режимов течения, что и на фиг. 3. Для удобства поверхности  $i$  и  $e$  отодвинуты от оси на 0.5 и 1. Продольные и поперечные координаты поверхностей, относящихся к струе, т. е. границы струи ( $i$ ), висячего ( $s$ ) и отраженного ( $f$ ) скачка, нормированы соответственно по  $X$  и  $R$  (6). Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  получились равными:  $\alpha = 1.48 \cdot 10^{-3}$  и  $\beta = 0.74 \cdot 10^{-2}$ .

Чтобы иметь одинаковый масштаб по оси  $x$  для всех поверхностей, что для приложений может быть более удобным, характерные размеры для волны  $e$  на фиг. 4 выбраны следующим образом. Пользуясь автомательностью решения для  $r_e$  в области II, заменим постоянный размер  $X^*$  (1) на  $X$  (6). При этом в соответствии с (5) вместо  $R^*$  получим поперечный масштаб

$$(7) \quad R_e = R^* \sqrt{1 + \alpha \frac{X^*}{X^*} \frac{x}{X^*}}$$

Для области I, где решение (5) несправедливо, замена  $X^*$  на  $X$  и  $R^*$  на  $R$  не внесет большой погрешности, так как при  $x \leq 5X^*$   $X$  и  $R_e$  отличаются от  $X^*$  и  $R^*$  не более чем на 5%.

Таким образом, можно полагать, что с определенной степенью точности положения поверхностей сильного разрыва подчиняются уравнениям

$$\frac{r_\omega}{R(x)} = \Phi_\omega \left[ \frac{x}{X(x)} \right] \quad (\omega = s, f, i), \quad \frac{r_e}{R_e(x)} = \Phi_e \left[ \frac{x}{X(x)} \right]$$

где  $R(x)$ ,  $X(x)$ ,  $R_e(x)$  даны формулами (6), (7), а вид функций  $\Phi_\omega$  ( $\omega = s, f, i, e$ ) определяется результатами численного решения задачи (фиг. 4) или опытными данными.

Авторы благодарят С. С. Кутателазде и А. К. Реброва за полезные обсуждения.

Поступила 9 II 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова Н. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И. Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 1. Изд. МГУ, 1970.
2. Зак Л. И. Гиперзвуковая струя, истекающая в покоящуюся среду или в спутный сверхзвуковой поток. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. Гусев В. Н., Климова Т. В. К подобию гиперзвуковых струйных течений. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
4. Васильков А. П., Мурзинов И. Н. Подobie при истечении сильно недорасширенных струй в спутный гиперзвуковой поток. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
5. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.