

**О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ В НЕПРЕРЫВНО
СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ
ГЛУБИНЫ**

С. Ф. ДОЦЕНКО, Л. В. ЧЕРКЕСОВ

(Севастополь)

В работе теоретически исследуется развитие двумерных линейных волн в непрерывно стратифицированном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Волны генерируются независимыми от времени давлениями, прикладываемыми, начиная с момента времени $t=0$, к ограниченной области свободной поверхности первоначально невозмущенного потока.

Стационарные внутренние волны от такого возмущения исследованы в работах [1-3]. При отсутствии потока неустановившиеся волны в непрерывно стратифицированной жидкости, возникающие от начальных возмущений или периодических поверхностных давлений, прикладываемых ко всей свободной поверхности, изучались в работах [4-7].

1. Пусть двумерный горизонтальный поток идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей часть пространства $-\infty < x < +\infty$, $-H \leq z \leq 0$ ($H = \text{const}$) течет со скоростью $v = \text{const}$ в положительном направлении оси x . Плотность жидкости в невозмущенном состоянии ρ_0 непрерывно зависит от вертикальной координаты z . Распределение плотности является устойчивым ($\rho_0'(z) \leq 0$, $\rho_0'(z) < 0$ на некотором интервале).

Исследуем процесс развития волн, вызываемых давлениями $p = p_0(x)$, прикладываемыми в момент времени $t=0$ к ограниченной области свободной поверхности невозмущенного потока.

В линейной постановке движение жидкости описывается следующей системой уравнений граничных и начальных условий:

$$(1.1) \quad Du = -\rho_0^{-1}(p_x + p_{0x}), \quad Dw = -g\rho_0^{-1}\rho - \rho_0^{-1}p_z$$

$$u_x + w_z = 0, \quad D\rho + \rho_{0z}w = 0$$

$$p - \rho_1 g \zeta = 0, \quad D\zeta = w \quad (z=0)$$

$$(1.2) \quad w = 0 \quad (z = -H)$$

$$u = w = \rho = \zeta = 0 \quad (t = 0)$$

Здесь $D \equiv \partial / \partial t + v \partial / \partial x$, u , w , p , ρ — волновые возмущения горизонтальной и вертикальной скоростей, давления и плотности, ζ — возвышение свободной поверхности, $\rho_1 = \rho_0(0)$.

С помощью преобразований Фурье по x и Лапласа по t для трансформанты Фурье — Лапласа $W(m, z, \alpha)$ функции $w(x, z, t)$ из (1.1), (1.2) получаем краевую задачу

$$(1.3) \quad L(m^2, \beta^2)W = 0 \quad (-H \leq z \leq 0)$$

$$(1.4) \quad l(m^2, \beta^2)W = -m^2 P(m) (\alpha \beta \rho_1)^{-1} \quad (z=0), \quad W = 0 \quad (z = -H)$$

$$L \equiv \frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{d}{dz} \right) - (m^2 \rho_0 - gm^2 \beta^{-2} \rho_{0z}), \quad l \equiv \frac{d}{dz} + gm^2 \beta^{-2}$$

Здесь $\beta = \alpha + imv$, $P(m)$ — трансформанта Фурье функции $p_0(x)$.

Пусть $\Phi = \Phi(m^2, z, \beta^2)$ — решение задачи Коши: $L\Phi = 0$, $\Phi(m^2, -H, \beta^2) = 0$, $\Phi_z(m^2, -H, \beta^2) \neq 0$. Положим $W = A\Phi$ и найдем A из граничного условия при $z=0$. Тогда, применяя формулы обращения, получаем

$$(1.5) \quad w = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} m^2 P(m) \rho_1^{-1} I(m, z, t) e^{imx} dm$$

$$(1.6) \quad I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \Phi(m^2, z, \beta^2) [\alpha \beta \Delta(m^2, \beta^2)]^{-1} e^{\alpha t} d\alpha$$

$$(1.7) \quad \Delta = \Phi_z(m^2, 0, \beta^2) + gm^2 \beta^{-2} \Phi(m^2, 0, \beta^2)$$

Вычислим интеграл I , используя теорию вычетов. Полюсами подынтегральной функции в (1.6) являются точки $\alpha=0$, $\alpha=\beta-imv$, где β — любой из корней уравнения $\Delta=0$. Последнее при $\beta=i\sigma$ переходит в дисперсионное уравнение для периодических внутренних волн. Поэтому [8] уравнение $\Delta=0$ имеет по β только чисто мнимые простые корни, расположенные симметрично относительно точки $\beta=0$. Следовательно, отличные от $\alpha=0$ полюсы имеют вид $\alpha = -i(mv \pm \sigma_j)$ ($j=1, 2, \dots$), где $\sigma_j(m)$ можно считать нечетными функциями m , занумерованными в порядке убывания их модулей; $\sigma_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Применим теорему Коши о вычетах и лемму Жордана к интегралу (1.6). Несмотря на существование точки накопления полюсов $\alpha = -imv$, законность применения этой теоремы можно обосновать [8]. Получаем из (1.5):

$$(1.8) \quad w = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P \left[F_0 e^{imx} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 F_j k_{s_j}^{-1} e^{i(mx - k_{s_j} t)} \right] dm$$

$$F_0 = -im \Phi_0(\rho_1 v \Delta_0)^{-1}, \quad F_j = m^2 \Phi_j(\rho_1 \sigma_j \Delta_j)^{-1}$$

$$\Delta_0 = \Delta(m^2, -m^2 v^2), \quad \Delta_j = \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} \right|_{\beta=i\sigma_j}$$

$$\Phi_0 = \Phi(m^2, z, -m^2 v^2), \quad \Phi_j = \Phi(m^2, z, -\sigma_j^2)$$

$$k_{s_j} = mv + (-1)^s \sigma_j$$

Ряд в (1.8) и соответствующий интеграл сходятся, если $P = O(|m|^{-\tau})$ ($\tau > 1$) при $m \rightarrow \infty$. Хотя функции $F_0, F_j k_{1j}^{-1}$ могут иметь вещественные полюсы, подынтегральное выражение в целом является регулярной функцией в окрестности вещественной оси. Это позволяет деформировать путь интегрирования в наиболее удобный для анализа контур на плоскости m , обходящий полюсы отдельных слагаемых подынтегрального выражения.

Вещественные полюсы функций F_0 и $F_j k_{1j}^{-1}$ совпадают соответственно с корнями уравнений $\Delta_0=0$ и $k_{1j}=0$ и расположены симметрично относительно точки $m=0$. Поскольку первое слагаемое в (1.8) отвечает стационарным волнам, можно воспользоваться результатами анализа корней уравнения $\Delta_0=0$ (волновых чисел, незатухающих с расстоянием стационарных волн), проведенного в работах [2, 8]. Основной вывод работы [2] следующий.

Пусть $\rho_{0z} \leq 0$, $\rho_{0z} \neq 0$, $v_1 > v_2 > \dots$ — положительные собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} (\rho_0 W_z)_z - g v^{-2} \rho_{0z} W &= 0 \\ W_z(0) - g v^{-2} W(0) &= 0, \quad W(-H) = 0 \end{aligned}$$

Тогда при $v_{n+1} < v < v_n$ существует n положительных корней $m = m_l$ ($m_l > 0$) уравнения $\Delta_0 = 0$, при $v > v_1$ вещественные корни уравнения $\Delta_0 = 0$ отсутствуют.

Занумеруем m_l в порядке убывания. При $m = \pm m_l$, $\Delta_0 = 0$ и $k_{1l} = 0$, но $k_{1j} \neq 0$ ($j \neq l$) и $k_{2j} \neq 0$ ($j \geq 1$). Следовательно, при $v_{n+1} < v < v_n$ функция F_0 имеет $2n$ полюсов $m = \pm m_l$, причем $m = \pm m_l$ являются единственными полюсами функции $F_l k_{1l}^{-1}$.

Следуя работе [9], деформируем исходный путь интегрирования в контур C , идущий по вещественной оси с обходом всех действительных полюсов по малым полуокружностям снизу. При $m \in C$ имеем $\operatorname{Re}(-ik_{1j}) \leq 0$, поэтому неустановившаяся часть волнового движения (двойная сумма в (1.8)) стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$ и $x = \text{const}$, что вполне соответствует физическому смыслу задачи.

Учитывая сказанное выше, при $v_{n+1} < v < v_n$ для w получаем

$$(1.9) \quad w = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

$$\eta_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_C P F_0 e^{imx} dm, \quad \eta_2 = \sum_{j=1}^n \eta_{j1}'$$

$$\eta_3 = \sum_{j=1}^n \eta_{j2}' + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \eta_{js}'$$

$$\eta_{js}' = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_j} P F_j k_{sj}^{-1} e^{i(mx - k_{sj}t)} dm$$

В интегралах η_{js}' контур C деформирован в контуры C_j , идущие по вещественной оси с обходом снизу только полюсов $m = \pm m_j$. Такая замена не изменяет значений интегралов, так как значения $m = \pm m_j$ являются единственными вещественными полюсами функций $P F_j k_{1j}^{-1}$ ($j = 1, \dots, n$). В интегралах, входящих в η_3 , можно в качестве пути интегрирования взять интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Проведем асимптотический анализ волнового поля (1.9).

Рассмотрим стационарные волны η_1 . С использованием теории вычетов получаем для η_1 следующее асимптотическое выражение при $|x| \rightarrow \infty$:

$$(2.1) \quad \eta_1 = \theta(x) \sum_{j=1}^n w_j(z) \cos(m_j x + \varphi_j) + O(e^{-\delta|x|})$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w_j &= 2m_j |P| \Phi(m_j^2, z, -m_j^2 v^2) [\rho_1 v \Delta_0'(m_j)]^{-1} \\ P &= P_1 + iP_2, \quad \operatorname{tg} \varphi_j = P_2(m_j) [P_1(m_j)]^{-1} \end{aligned}$$

Здесь θ — функция Хэвисайда, $\delta > 0$, $v_{n+1} < v < v_n$. Фазовые сдвиги φ_j определяются видом функции $p_0(x)$, в частности $\varphi_j = 0, \pm\pi$ для четной $p_0(x)$.

В соответствии с формулой (2.1) незатухающие с расстоянием волны образуются только вниз по потоку и возникают при $v < v_1$. В силу

оценки [2]

$$\sqrt{1 - \frac{1}{4} \ln[\rho_0(-H)\rho_1^{-1}]} < v_1(gH)^{-1/2} < 1$$

волновой след возникает при скоростях потока, меньших \sqrt{gH} . Можно показать [2, 8], что w_j является j -й собственной функцией задачи типа Штурма — Лиувилля. Поэтому самой короткой из образующихся волн ($j=1$) является поверхностная, остальные (более длинные) — внутренними волнами, возникающими только при $v < v_2$.

Рассмотрим неустановившуюся часть $\eta_2 + \eta_3$ волнового движения. Исследование интегралов η_{js}' проведем для больших $|x|$ и t методом стационарной фазы.

Запишем фазовую функцию интеграла η_{js}' в виде $m x - k_{sj} t = |x| \tau_{sj}(m, \xi)$, где $\tau_{sj} = q(m - k_{sj} \xi)$, $\xi = t x^{-1}$, $q = \text{sign } x$. Стационарные точки τ_{sj} являются корнями уравнения

$$1 - [v + (-1)^s \sigma_j'(m)] \xi = 0 \quad (s=1, 2)$$

Функция $\sigma_j' > 0$ монотонно возрастает при $m < 0$ и монотонно убывает при $m > 0$, $\sigma_j'(0) = v_j$, $\sigma_j' \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ [8]. Отсюда следует, что при условиях $v - v_j < \xi^{-1} < v$ и $v < \xi^{-1} < v + v_j$ функции τ_{1j} и τ_{2j} соответственно имеют по две стационарные точки, расположенные симметрично относительно $m=0$. В остальных случаях стационарные точки отсутствуют.

Необходимо также учесть, что при $0 < v < v_j$ и $\xi^{-1} > v - \sigma_j'(m_j)$ неравенство $\text{Re}(i\tau_{1j}) \leq 0$ ($j=1, \dots, n$) выполняется на контуре, отличающемся от контура C_j только тем, что он обходит точки $m = \pm m_j$ сверху. Значения интеграла η_{js}' ($j=1, \dots, n$) и преобразованного интеграла отличаются на величину, определяемую вычетами в точках $m = \pm m_j$.

Учитывая сказанное выше и применяя методику работы [9], получаем для $\eta_2 + \eta_3$ выражение

$$(2.3) \quad \eta_2 + \eta_3 = \zeta_2 + \zeta_3$$

$$(2.4) \quad \zeta_2 = - \sum_{j=1}^n \theta(x - u_j t) w_j(z) \cos(m_j x + \varphi_j), \quad \zeta_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{3j}$$

$$(2.5) \quad \eta_{3j} = \begin{cases} O(|x|^{-1/2}) & (v - v_j)t < x < (v + v_j)t \\ O(|x|^{-1}) & x < (v - v_j)t, \quad x > (v + v_j)t \end{cases}$$

$$(2.6) \quad u_j = v - \sigma_j'(m_j)$$

Из формул (1.9), (2.1), (2.3) находим окончательно выражение для нестационарного волнового поля при $v_{n+1} < v < v_n$:

$$(2.7) \quad w = w^{(1)} + w^{(2)}$$

$$(2.8) \quad w^{(1)} = \theta(x) \sum_{j=1}^n \theta(u_j t - x) w_j(z) \cos(m_j x + \varphi_j), \quad w^{(2)} = \zeta_3$$

Выражения (2.7), (2.8) позволяют дать следующую физическую картину развития волнового движения.

Пусть $v > v_1$. В соответствии с (2.7), (2.8), (2.4), (2.5) давления, прикладываемые в момент времени $t=0$, генерируют в потоке только затухающие с расстоянием (как $|x|^{-\beta}$, $\beta \geq 1/2$) поверхностные и внутренние волны. Они существуют вверх и вниз по потоку. Основные волновые возмущения, связанные с j -й затухающей волной, сосредоточены в интервале $(v - v_j)t < x <$

$< (v+v_j)t$ и, следовательно, охватывают большую область вниз, чем вверх по потоку.

Пусть $v_{n+1} < v < v_n$. В соответствии с (2.7), (2.8) в этом случае генерируются как незатухающие, так и затухающие волны. Волны первого вида существуют только вниз по потоку, причем образуется ровно n гармонических по x волн. Передние фронты незатухающих волн распространяются вниз по потоку с различными скоростями, определяемыми формулой (2.6). Волны второго вида проникают как вверх, так и вниз по потоку, но основные возмущения, связанные с первыми n затухающими волнами, локализованы только вниз по потоку.

Покажем, что для нахождения u_j достаточно знать функции $m_j = m_j(v)$ и $\Delta_0 = \Delta_0(m)$, т. е. решение задачи о стационарных волнах в потоке.

Действительно, при $m = m_j$ имеем [3]

$$k_{1j}(m_j(v)) = 0, \quad d\sigma_j/dm|_{m=m_j} = v + m_j dv/dm_j$$

Используя теорему о неявной функции, находим

$$(2.9) \quad u_j = -m_j \left[\frac{dm_j}{dv} \right]^{-1} = m_j \frac{\partial \Delta_0}{\partial m} / \frac{\partial \Delta_0}{\partial v} \Big|_{m=m_j}$$

Получим асимптотические выражения для u_j при $v \rightarrow 0$. В этом случае [2] $m_1 \sim gv^{-2}$, $m_j \sim \sqrt{gk}v^{-1}$ ($j \geq 2$), где $k = \max_z (-\rho_0^{-1} \rho_{0z})$. Используя (2.9), отсюда получаем

$$(2.10) \quad u_1 \sim 1/2v, \quad u_j \sim v \quad (j \geq 2)$$

Формулы (2.10) показывают, что при фиксированном $j \geq 2$ и достаточно малых v передний фронт незатухающей поверхностной волны отстает от переднего фронта j -й внутренней волны.

3. Расчеты u_j проводились для закона изменения плотности, моделирующего жидкость со слоем скачка плотности ($k > 0$, $\epsilon = kh_2$)

$$(3.1) \quad \rho_0 = \rho_1 \begin{cases} 1, & -h_1 \leq z \leq 0 \\ \exp[-k(z+h_1)], & -h_1 - h_2 \leq z \leq -h_1 \\ \exp \epsilon, & -H \leq z \leq -h_1 - h_2 \end{cases}$$

Для ρ_0 вида (3.1) анализ стационарных волн проведен в работе [1].

Зависимости u_s от $\omega = \sqrt{gh_2\epsilon}(\pi v)^{-1}$ для $\epsilon = 10^{-2}$, $h_2 = 10^2$ м, $h_3 = 2 \cdot 10^3$ м даны на фиг. 1. Номерам кривых соответствуют порядковые номера волн; для сплошных линий $h_1 = 20$ м, для пунктирных $h_1 = 10^2$ м.

Отсюда следует, что $u_s = 0$ при $v = v_s$, $u_s(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, $u_{s+1} < u_s$ ($s \geq 2$), а каждая из зависимостей $u_s = u_s(\omega)$ имеет единственный максимум. Значения u_s возрастают при увеличении h_i ($i = 1, 2, 3$) и ϵ .

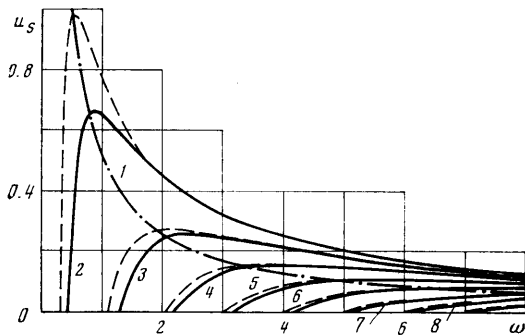
Сопоставление кривых фиг. 1 показывает, что в данную точку x в процессе развития волнового движения в большинстве случаев первыми приходят короткие незатухающие с расстоянием внутренние волны, затем поверхностная волна и, наконец, внутренние волны наибольшей амплитуды (об амплитудах волн см. [1]).

Величина $u^* = \max_{\omega} u_2(\omega)$ дает максимально возможную при всех значениях v скорость распространения передних фронтов незатухающих внутренних волн. Зависимость u^* от ϵ для $H = 2 \cdot 10^3$ м представлена на фиг. 2. Кривым 1-6 отвечают случаи: 1) $h_1 = h_3 = 0$; 2) $h_1 = 0$, $h_2 = 10^2$ м; 3) $h_1 = 20$, $h_2 = 10^2$ м; 4) $h_1 = 10^2$, $h_2 = 10^2$ м; 5) $h_1 = 2 \cdot 10^2$, $h_2 = 10^2$ м; 6) $h_1 = 950$, $h_2 = 10^2$ м.

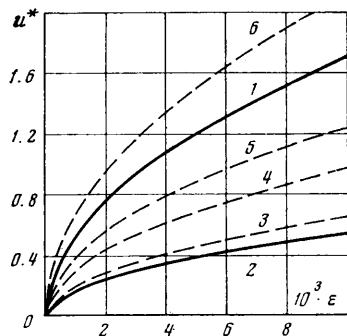
Кривые фиг. 2 дают количественные оценки u^* для трех моделей плотности, описывающих: 1) полностью стратифицированный слой жидкости;

2) слой жидкости с неоднородным приповерхностным слоем; 3)–6) жидкость со слоем скачка. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что скорости распространения передних фронтов внутренних волн больше для первой модели плотности, чем для второй. Сопоставление кривых 2 и 3–6 позволяет сделать вывод о существенном увеличении u^* при погружении неоднородного слоя. Во всех рассмотренных случаях $u^* < 2.2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$.

4. В работе [1] отмечалось, что значения $v=v_j$ являются особыми для линейной задачи: при $v \rightarrow v_j - 0$ длина и амплитуда горизонтальной скорости j -й незатухающей волны неограниченно возрастают, а скорость ее переднего фронта стремится к нулю. В нелинейной постановке значениям v , близким к



Фиг. 1



Фиг. 2

v_j , соответствуют уединенные волны [10, 11]. Рассмотрение волнового движения при $v=v_j$ в линейной постановке тем не менее представляет интерес, так как резонансный механизм является одним из возможных механизмов возбуждения внутренних волн. Для периодических по времени давлений, распределенных по всей поверхности жидкости, амплитуда вертикальной скорости при резонансе нарастает во времени по линейному закону [6].

Пусть $v=v_l$. Следуя [9], рассмотрим поведение w_l при $t \rightarrow \infty$ и $x = \text{const}$. Из (1.8) имеем

$$(4.1) \quad w_l = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 I_{sj}$$

$$(4.2) \quad I_{sj} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P F_j e^{i(mx - k_{sj}t)} dm = \int_{-\infty}^{+\infty} m^2 \psi_j e^{-ik_{sj}t} dm$$

где $\psi_j \neq 0$ при $m=0$. Для оценки интегралов (4.2) при $t \rightarrow \infty$ воспользуемся методом стационарной фазы.

Стационарные точки функций k_{sj} при $v=v_l$ являются корнями уравнений $k_{sj}' = v_l - (-1)^s \sigma_j' = 0$. Используя свойства σ_j' , изложенные в п. 2, можно утверждать, что при $(sj) \neq (1, n)$ ($n \geq l+1$) k_{sj} стационарных точек не имеет, k_{1l} имеет двукратную стационарную точку $m=0$, k_{1j} ($j=1, \dots, l-1$) имеет две простые ненулевые стационарные точки. Поэтому, учитывая вид подынтегральной функции в (4.2), находим

$$(4.3) \quad \sum_{j=l+1}^{\infty} I_{1j} + \sum_{j=1}^{\infty} I_{2j} = O(t^{-3})$$

$$\sum_{j=1}^{l-1} I_{ij} = O(t^{-1/2}), \quad I_{il} = O(t^{-1})$$

Из (4.1), (4.3) окончательно получаем

$$(4.4) \quad w_i = O(t^{-1}) + rO(t^{-1/2})$$

где $r=0$ при $l=1$, $r=1$ при $l>1$.

Таким образом, с ростом времени $w=O(\ln t)$ при $v=v_1$, $w=O(t^{1/2})$ при $v=v_l$ ($l \geq 2$). Первая асимптотика согласуется с результатами работы [9]. При $t = \text{const}$ и $x \rightarrow \infty$ из (1.8) находим, что $w=O(x^{-\beta})$, где $\beta \geq 1$.

Поступила 13 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Доценко С. Ф., Черкесов Л. В. О влиянии непрерывного изменения плотности жидкости на волны, генерируемые движущимися поверхностными давлениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
2. Доценко С. Ф. О структуре волнового движения в потоке при произвольном изменении плотности по глубине. В сб. «Морские гидрофизические исследования». Севастополь, 1973, № 3 (62).
3. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. Киев, «Наукова думка», 1973.
4. Kon R. C. Y. Transient motions induced by local disturbances in a linear density-stratified fluid. J. Hydraulic Res., 1971, vol. 9, No. 3.
5. Кузнецов Б. Г., Черных Г. Г. Численное исследование поведения однородного «пятна» в идеальной стратифицированной по плотности жидкости. ПМТФ, 1973, № 3.
6. Леонов А. И., Миропольский Ю. З. О резонансном возбуждении внутренних гравитационных волн в океане колебаниями атмосферного давления. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 8.
7. Зайцев А. А. К вопросу о возбуждении внутренних волн колебаниями атмосферного давления. Океанология, 1975, т. 15, № 2.
8. Yanowitch M. Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid. Comm. pure and Appl. Math., 1962, vol. 15, No. 1.
9. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
10. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
11. Тер-Крикоров А. М. К теории волн установившегося типа в неоднородной жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.