

ДВИЖЕНИЕ УЕДИНЕННОЙ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН
С АМПЛИТУДОЙ, БЛИЗКОЙ К ПРЕДЕЛЬНОЙ,
В СЛОЕ ЖИДКОСТИ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕЙСЯ
ГЛУБИНЫ

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ, В. А. РЕУТОВ

(Москва)

При движении слабоискривленной уединенной волны с медленно меняющейся амплитудой на поверхности слоя идеальной жидкости медленно меняющейся глубины сохраняется [1, 2] энергия каждого элемента волны. Под элементом волны понимается отрезок волны, отсчитываемый вдоль ее гребня, концы которого всегда движутся по нормали к линии гребня. Кроме того, в силу малости кривизны волны и медленности изменений глубины дна и амплитуды принимается, что амплитуда (высота гребня) волны и ее скорость выражаются через плотность энергии E и глубину H жидкости в данном месте так же, как и при двумерном движении волны в слое жидкости постоянной глубины. Под величиной E понимается волновая энергия, приходящаяся на единицу длины, отсчитываемой вдоль гребня. Поэтому функция $v = V(E, H)$, задающая скорость движения волны, может считаться известной. Это позволяет выписать систему уравнений, эквивалентную полученной в [2].

$$(0.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial l}{\partial \xi} \right) = -v \frac{\partial \alpha}{\partial l}, \quad E \frac{\partial l}{\partial \xi} = E_0(\xi), \quad \left(\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial \xi}{\partial l} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = vn, \quad v = V(E, H(r))$$

Здесь α — угол между линией гребня волны и осью x , n — вектор нормали к линии гребня, ξ — лагранжева координата элемента волны, который движется со скоростью vn , l — длина, отсчитываемая вдоль волны. Величины l , E , α , r считаются функциями ξ и t .

Функция $F_0(\xi)$ задает начальное распределение энергии. Первое и второе уравнения выражают изменение длины элемента и сохранение его энергии, а третье и четвертое — угловую и поступательную скорости элемента. Аналогичные уравнения получаются и для периодических волн [3].

При решении уравнений (0.1) могут появиться области, где E велико. Однако известно [4], что амплитуда уединенной волны, которая является растущей функцией плотности энергии E , не может превышать ≈ 0.8 невозмущенной глубины. Это объясняется интенсивным разрушением волны с образованием турбулентной зоны («барашка») около гребня. Поэтому и плотность энергии E оказывается ограниченной некоторой предельной величиной $E_*(H)$. В связи с этим было предложено [5] в области, где плотность энергии E достигает предельного значения и в силу уравнений (0.1) имеет тенденцию к дальнейшему росту по сравнению с величиной $E_*(H)$, считать, что $E = E_*(H)$ и не использовать второе уравнение (0.1). Такую систему уравнений будем называть упрощенной в противоположность полной системе (0.1), а движение волны, описываемое ею, будем называть движением с предельной амплитудой или предельным движением в противоположность допредельному движению, описываемому системой (0.1).

При движении волны может оказаться, что часть ее имеет предельную амплитуду, а другая часть — амплитуду, меньшую предельной. Некоторые частные случаи таких движений рассмотрены в работе [5]. Части волны с допредельной и предельной амплитудами описываются различными системами уравнений, а граница, их разделяющая, должна рассматриваться как поверхность разрыва.

Настоящая работа посвящена построению и изучению поведения границы, разделяющей области с допредельной и предельной амплитудами. Указаны условия эво-

люционности, рассмотрена структура и проведена классификация границ раздела. Рассмотрены задачи о движении границ раздела, и в частности в окрестности точек, где один тип границы раздела сменяется другим. Обсуждаются результаты численного расчета некоторых задач.

1. Упрощение системы уравнений. Предположим, что в некоторой области $H=H_0+h(x, y)$, где $H_0=\text{const}$, а $h(x, y)$ мало, и что α и v мало отличаются соответственно от нуля и от $V_*(h)=V(E_*(h), h)$. Эти условия можно считать выполненными в некоторой окрестности точки на границе раздела. Кроме того, существуют задачи, в которых эти условия выполнены всюду. Линеаризуем уравнения (0.1) по α и $v_1=v-V_*(h)$, считая, что производные по координатам содержат дополнительный малый параметр ϵ , $1/\epsilon$ — масштаб явления, с самого начала предполагавшийся большим

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \left(E \frac{\partial V}{\partial E} \right)_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= -(K-1) \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{1}{V_0} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{K}{V_0} \frac{\partial v}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ K &= 1 + \frac{\partial V}{\partial E} \frac{\partial E_*}{\partial h} / \frac{\partial V}{\partial h} \end{aligned}$$

где $V_0, (E \partial V / \partial E)_0$ — значения величин, взятые при $E=E_*, h=0$. При получении первого уравнения (1.1) была вычислена производная от скорости с учетом пятого, второго и первого уравнений (0.1). Кроме того, производные по времени выражены через производные по нормали, которые в линейном приближении совпадают с производными по y . Величина K больше единицы, так, $\partial V / \partial E > 0, \partial E_* / \partial h > 0, \partial V / \partial h > 0$. Коэффициенты в уравнениях (1.1) в рассматриваемом линейном приближении можно считать постоянными. Вводя новую неизвестную α_1 :

$$(1.2) \quad \alpha_1 = \alpha - \int_0^y \frac{K}{V_0} \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} dy$$

изменяя масштабы по x и по y и возвращаясь для простоты к прежним обозначениям v, α для неизвестных функций, систему уравнений (1.1) приведем к следующему виду:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= F(x, y) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad F(x, y) = - \frac{\partial V}{\partial h} \left[(K-1) \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{K}{V_0} \int_0^y \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dy \right] \end{aligned}$$

Если $F(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$, то заменой, аналогичной (1.2), в которой интеграл берется от функции $F_1(x)$ на промежутке $[0, x]$, можно исключить зависимость правой части первого уравнения (1.3) от x . В тех случаях когда функция F представляется рядом, этим приемом можно исключить из нее все члены, не зависящие от y .

Соответствующая уравнениям (1.3) упрощенная система имеет вид

$$(1.4) \quad v = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

Эта система уравнений справедлива, если при этом производная $\partial v / \partial y$, вычисленная с помощью системы (1.3), неотрицательна, т. е. если

$$(1.5) \quad \frac{\partial v}{\partial y} = M = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + F \geq 0$$

Решением системы (1.3) будет

$$v = 1/2(J_1 + J_2), \quad \alpha = 1/2(J_2 - J_1)$$

$$(1.6) \quad J_1 = f(x-y) + \int_0^y F(x-y+\gamma, \gamma) d\gamma$$

$$J_2 = g(x+y) + \int_0^y F(x+y-\gamma, \gamma) d\gamma$$

J_1 и J_2 — инварианты Римана.

Решение системы (1.4) имеет вид

$$(1.7) \quad v=0, \alpha=\alpha(x) \text{ или } J_1=J_1(x), \quad J_2=J_2(x)$$

где J_1 и J_2 связаны с v и α по-прежнему первыми двумя равенствами (1.6).

2. Эволюционность границ раздела. Система уравнений (1.1) обладает двумя семействами характеристик ($x=y$ и $x=-y$). Вдоль первого семейства распространяются возмущения J_1 , а вдоль второго — J_2 . В области предельной амплитуды согласно последним равенствам (1.7) каждую прямую $x=\text{const}$ можно рассматривать как двукратную характеристику, на которой сохраняются оба инварианта. Предполагая, что граница раздела — некоторая линия L на плоскости xy , обозначим через U тангенс угла между касательной к границе раздела и осью y . Физический смысл величины U — отношение скорости границы раздела к характеристической скорости, роль времени играет переменная y . Положительным направлением на оси x будем считать направление от области предельной амплитуды к области допредельной амплитуды.

Возможны следующие случаи:

$$\text{I: } 1 < U, \quad \text{II: } 0 < U < 1, \quad \text{III: } -1 < U < 0, \quad \text{IV: } U < -1$$

Согласно условиям эволюционности поверхностей разрыва [6-8] для типов I и III необходимы два граничных условия для величин α и v или J_1 и J_2 , а для типов II и IV — три граничных условия.

3. Структура границы раздела. Соотношения на границе раздела. До сих пор предполагалось, что разрушение волны не позволяет амплитуде превысить предельное значение и жестко ограничивает значения v условием $v \leq 0$. Однако если считать, что разрушение волны, амплитуда которой по каким-то причинам превысила предельную, требует некоторого времени, то можно принять, что система уравнений, обобщающая системы (1.3) и (1.4), имеет вид

$$(3.1) \quad \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x} = F(x, y) - D\chi(v), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Здесь $\chi(v)$ — некоторая непрерывная монотонная функция v , такая, что $\chi(v) = 0$ при $v \leq 0$ и $\chi(v) > 0$ при $v > 0$, $D = \text{const}$. Произведение $D\chi(v)$ задает интенсивность разрушения волны. Если $D \rightarrow \infty$, то в пределе, очевидно, получим в зависимости от величины v либо систему (1.3), либо систему (1.4). При конечных значениях D система (3.1) имеет один и тот же тип как в области $v < 0$, так и в области $v > 0$ и поэтому удобна для исследования структуры границы раздела.

Будем считать, что D велико и что граница раздела (линия, на которой $v=0$) задается уравнением $x=f_1(y)$, причем $df_1/dy=U$. Примем для определенности, что $v>0$ при $x<f_1(y)$ и $v<0$ при $x>f_1(y)$. При больших D в области $v>0$ решение будет близко к некоторому решению системы (1.4) $v=0$, $\alpha=\alpha_0(x)$, причем выполняется условие (1.5). Поправки v , $\alpha_1=\alpha-\alpha_0$ к этому решению (величины, обозначенные α_1 , здесь и в п. 1 различны) удовлетворяют уравнениям

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} &= M - D\chi(v), \quad M = F(x, y) - \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Рассматривая малую окрестность некоторой точки на границе раздела и считая границу достаточно гладкой, можно положить $U=\text{const}$, $M=\text{const}$ и разыскивать решение системы (3.2), зависящее только от $s=x-Uy$. Будем считать, что уравнение $s=0$ задает границу раздела. Для v получается уравнение

$$(3.3) \quad (1/U - U)v_s' = M - D\chi(v)$$

Структуру границы раздела может, очевидно, представлять решение, которое остается ограниченным при $s \rightarrow -\infty$ или для конечных s , но $D \rightarrow \infty$.

Если $U > 1$ или $-1 < U < 0$, то такое решение существует независимо от значения M . При $s \rightarrow -\infty$ величина v стремится к некоторому значению v_∞ , определяемому из уравнения $\chi(v_\infty) = M/D$ и стремящемуся к нулю при $D \rightarrow \infty$. Ширина переходной зоны, в которой скорость меняется от нуля до указанного значения, также стремится к нулю при $D \rightarrow \infty$. Изменение α в ней по порядку величины совпадает с изменением v . В пределе при $D \rightarrow \infty$ будем иметь непрерывный переход от допредельного к предельному случаю. Два граничных условия, необходимые для эволюционности границ типов I и III, представляют собой, таким образом, условия непрерывности v и α .

При $0 < U < 1$ и при $U < -1$ решение уравнения (3.2), принимающее значение $v=0$ при $s=0$, может быть ограниченным при $s \rightarrow -\infty$ только при $M=0$. Это условие задает еще одно дополнительное граничное условие, которое, как будет видно из дальнейшего, может служить для определения величины U для границ типов II и IV. Два других граничных условия выражают непрерывность решения.

Если $U = \pm 1$, то в области $s < 0$ при $D \neq \infty$ из (3.3) имеем $v = v_\infty$, а в пределе при $D \rightarrow \infty$ получим $v=0$ при $s < 0$ и непрерывность α при $s \rightarrow -0$. Однако при $U = \pm 1$ к границе раздела со стороны допредельного движения ($s > 0$) может примыкать разрыв решения уравнения (1.2), на котором при $U=1$ рвется J_1 , а при $U=-1$ рвется J_2 .

Таким образом, могут существовать четыре различных типа границы раздела. Граница типа I распространяется со сверхзвуковой скоростью $U > 1$, и решение перед ней не чувствует наличия этой границы. Эта граница представляет собой линию, где в силу решения (1.5) величина v обращается в нуль. Величина U на ней определяется этим решением.

Граница типа III находится из условия непрерывного сопряжения допредельного и предельного решений. Так как характеристика $x=y+\text{const}$ является для этого разрыва уходящей в допредельную область, то для непрерывности решения достаточно совпадения инвариантов J_2 , определяемых из предельной и допредельной областей. Это и задает положение границы и ее скорость.

Положение границы типа IV определяется тем, что на ней величина $\partial\alpha/\partial x + F$, вычисленная по предельному решению, обращается в нуль. Пользуясь этим, нетрудно найти скорость движения этой границы.

Движение границы типа II находится из условия обращения в нуль величины $\partial\alpha/\partial x + F$, вычисленной со стороны области предельной амплитуды. Так как в этой области $\partial\alpha/\partial y = 0$, то $\partial\alpha/\partial x$ можно заменить на производную $d\alpha/dx = \partial\alpha/\partial x + U\partial\alpha/\partial y$, вычисляемую вдоль границы. В силу непрерывности α на границе эту производную можно вычислять и со стороны области допредельной амплитуды. Так как на границе $v=0$, то $\alpha=J_2$ и граничное условие можно записать в виде

$$(3.4) \quad \frac{\partial J_2}{\partial x} + F = 0$$

В этом равенстве опущен множитель $(1+1/U)$, так как $U \neq -1$. Последнее соотношение позволяет найти положение границы и ее скорость

$$(3.5) \quad U = \frac{dx}{dy} = -1 - \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 J_2}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} \right)^{-1}$$

Это соотношение получено дифференцированием равенства (3.4) вдоль границы с использованием равенства

$$\partial^2 J_2 / \partial x \partial y = \partial^2 J_2 / \partial x^2 + \partial F / \partial x$$

следующего из (1.6).

При рассмотрении ряда важных модельных задач, которое проводится ниже, потребуются использование всех четырех типов границ раздела.

4. Задача о распаде слабого разрыва первого порядка при наличии границы раздела. Рассмотрим локальную задачу об эволюции начального распределения $J_1(x, 0) = f(x)$, $J_2(x, 0) = g(x)$, такого, что при $x > 0$ имеется допредельное состояние $f(x) + g(x) < 0$, а при $x < 0$ — предельное состояние $f(x) + g(x) = 0$ и выполнено условие (1.5).

Пусть, кроме того, функции f и g непрерывны, а их производные постоянны при $x > 0$ и $x < 0$ и могут терпеть разрыв при $x = 0$. Тогда при $x > 0$ и $x < 0$ получим

$$(4.1) \quad f_+' + g_+' > 0, \quad f_-' + g_-' = 0$$

Индексы плюс и минус означают, что данная величина берется соответственно при $x > 0$ или $x < 0$. Если ограничиться достаточно малой окрестностью начала координат, в которой $F = \text{const}$, то, используя результаты п. 1, можно сделать преобразование переменных такое, что получим $F = 0$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Условие (1.5) в этом случае примет вид

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{v=0} = g_-' = -f_-' \geq 0 \quad (x < 0)$$

В этом пункте будем предполагать, что неравенство выполняется строго. Возможны следующие варианты задания начальных условий при $x > 0$.

а) $g_+' > 0$ и согласно (4.1) $f_+' < 0$. В этом случае в области, примыкающей к правой полуоси x , решение описывается равенствами (1.6), в которых положено $F = 0$. Граница раздела находится из условия обращения в нуль величины v и оказывается типа I

$$(4.2) \quad U = \frac{dx}{dy} = \frac{f_+' - g_+'}{f_+' + g_+'}$$

При $x < 0$, а также выше границы раздела при $x > 0$ выполняются соотношения (1.4), причем в последней области

$$(4.3) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{2f'_+ g'_+}{f'_+ - g'_+} > 0$$

б) $g'_+ < 0$. В этом случае линия раздела типа III идет налево. Ее наклон находится по-прежнему из условия $v = 1/2(f+g) = 0$, однако в этом случае величина f согласно (1.4) переносится без изменений вдоль прямых $x = \text{const}$, а величина g остается постоянной на прямых $x+y = \text{const}$. Наклон границы раздела оказывается следующим:

$$(4.4) \quad U = \frac{dx}{dy} = - \frac{g'_+}{f'_+ + g'_+}$$

Отметим, что решение задачи о распаде сильного разрыва легко получить, если сильный разрыв заменить двумя близко расположенными слабыми разрывами с большими значениями производных между ними.

При решении задачи этого пункта не были использованы границы раздела типов II и IV. Это связано с тем, что если производные α и v кусочно-постоянны, то условие (1.5), которое должно выполняться на указанных границах раздела, либо не выполняется, либо выполняется тождественно в некоторой области. В связи с этим представляют интерес задачи об эволюции слабых разрывов, в которых испытывают разрыв вторые производные. Такие задачи будут рассмотрены ниже. Эти задачи связаны с особенностями решения в окрестностях точек, в которых происходит смена типов границы раздела.

5. Поведение решения в окрестности точки касания границы раздела типа I с характеристикой. Можно показать, что в случае общего положения, когда скорость U линии раздела L не принадлежит концам допустимых для каждого типа границы интервалов, продолжение заданного участка линии L осуществляется непрерывно тем же самым типом. Поэтому смена типов может происходить, только если U — концевая точка интервала. При этом линия раздела касается либо характеристик при $U = \pm 1$, либо вертикали (оси y) при $U = 0$, либо горизонтали (оси x) при $U = \pm \infty$.

В окрестности точки касания, которую поместим в начало координат, будем считать, что слева от заданного участка L при $x < 0$ движение предельное, а справа при $x > 0$ — допредельное. Случай, когда зоны расположены в обратном порядке, аналогичен рассматриваемому.

Рассмотрим сначала точку касания с характеристикой границы раздела типа I. Предположим, что граница раздела первого типа L_{1+} (фиг. 1, кривая $I+$) движется направо и U достигает значения $U=1$ в точке $x=0$, $y=0$. (Индексом плюс на фигурах обозначены кривые, распространяющиеся направо, а индексом минус — распространяющиеся налево. Тонкими линиями указаны характеристики). Небольшим поворотом системы координат (изменением α на постоянную) можно добиться, чтобы в начале координат выполнялись равенства $J_1=0$, $J_2=0$, а согласно п. 1 в некоторой окрестности этой точки можно считать, что $F=by$, где $b=\text{const}$. Учитывая последнее равенство и ограничиваясь в (1.6) первыми членами разложения функций f и g в ряды, получим в области допредельной амплитуды

$$(5.1) \quad \begin{aligned} J_1(x, y) &= f'(x-y) + 1/2 f''(x-y)^2 + 1/2 by^2 \\ J_2(x-y) &= 1/2 g''(x+y)^2 + 1/2 by^2 \end{aligned}$$

где штрихами обозначены производные функций по их аргументам. Во втором равенстве отсутствует член с первой производной, так как $g'=0$ в силу условия, что граница раздела в начале координат имеет наклон $U=1$. Оставляя главные члены в уравнении границы раздела, получим

$$(5.2) \quad J_1 + J_2 = -f' \Delta y + (2g'' + b)x^2 = 0$$

где $\Delta y = y - x$.

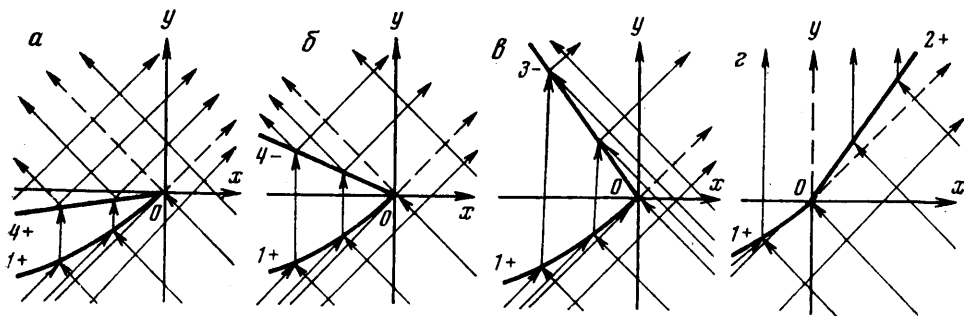
Для выполнения неравенств $\partial v / \partial y$ и $U > 1$ на границе раздела при $x < 0$ необходимо, чтобы

$$(5.3) \quad f' < 0, \quad 2g'' + b < 0$$

Эти неравенства в дальнейшем будем считать выполненными.

Из (5.3) следует, что на границе раздела (5.2) выполнено условие (1.5)

$$(5.4) \quad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + F \right)_{y=x} = [(4g'' + b)x + by]_{y=x} > 0$$



Фиг. 1

Это позволяет продолжать решение с предельной амплитудой от границы раздела (5.2) в сторону увеличения y , причем в этой области

$$(5.5) \quad \alpha = (2g'' + 1/2 b)x^2$$

Дальнейшее исследование разбивается на несколько случаев.

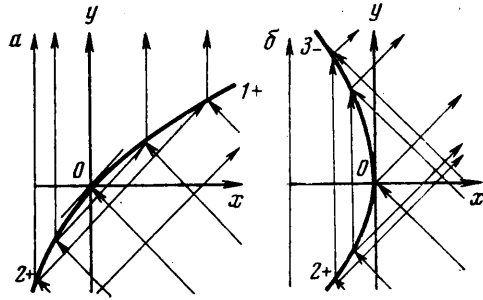
а) $g'' > 0$. Выполнение этого неравенства возможно согласно второму неравенству (5.3) только при $b < 0$.

В этом случае область предельной амплитуды ограничена по y линией раздела типа IV, на которой

$$(5.6) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + F = (4g'' + b)x + by = 0, \quad U_4 = -\frac{b}{4g'' + b}$$

При $-b/4 < g'' < -b/2$ граница L_{1+} встречается с кривой типа IV L_{4+} (фиг. 1, а, кривая 4+), а при $0 < g'' < -b/4$ граница L_{1+} продолжается кривой типа IV L_{4-} (фиг. 1, б, кривая 4-). Легко проверяется, что из $g'' > 0$ и $2g'' + b < 0$ следует $|U| > 1$. Нетрудно проверить также, что при $x < 0$ выше этой границы раздела и всюду при $x > 0$ решение допредельное, которое легко строится по заданным функциям f и g . На характеристике $x = y$ в допредельном решении имеется разрыв первой производной функции J_1 , а на характеристике $x = -y$ — разрыв второй производной J_2 . На фигурах они отмечены пунктирными линиями.

б) $g'' < 0, g'' + b < 0$. В этом случае область предельной амплитуды находится в полуплоскости $x < 0$ и ограничена по y сверху границей раздела типа III L_{3-} (фиг. 1, в, кривая 3-), наклон которой находится из условия непрерывного сопряжения предельного и допредельного решений $U_3 = -(g'' + b) / (3g'' + b)$. Легко проверяется, что $-1 < U_3 < 0$. При $x < 0, y > U_3 x^{-1}$ и при $x > 0$ решение допредельное, которое можно построить, зная, функции J_1 и J_2 на полуоси $x > 0$ и на прямой $x = U_3 y$. На характеристике $x = y$ в области допредельного решения имеется разрыв первой производной функции J_1 (фиг. 1, в).



Фиг. 2

в) $g'' < 0, g'' + b > 0$. В этом случае в сторону положительных x распространяется граница раздела типа II L_{2+} (фиг. 1, г, кривая 2+), на которой согласно (3.5) $U_2 = -1 - b / g''$. При сделанных предположениях о величинах b и g'' $0 < U_2 < 1$. У функции J_1 на характеристике $x = y$ в области допредельного решения имеется разрыв первой производной, а у функции $J_2 = G'x + G''x^2 + \dots$ на оси y в области предельного решения — разрыв второй производной G'' ($G' = 0$).

Таким образом граница L_{1+} может переходить в границы других типов по одному из способов а), б), в), г), (фиг. 1), которые заполняют всю допустимую для продолжений область, задаваемую неравенствами (5.3) и которые при изменении параметров b и g'' непрерывно переходят один в другой. Однако сама граница скачком меняет скорость, а иногда меняется и знак скорости.

6. Другие случаи смены типов границы раздела. В некоторых других случаях смены типов границы раздела, рассмотренных ниже, необходимо учитывать члены третьего порядка малости в разложении величин инвариантов и F в окрестности рассматриваемой точки. Преобразованием, указанным в п. 1, можно добиться, чтобы

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad & F(x, y) = by + Byx + Cy^2 \\
 & J_1^+(x, y) = f'(x-y) + 1/2 f''(x-y)^2 + 1/6 f'''(x-y)^3 + y^2 [b + B(x-y)] + 1/3 y^3 (B+C) \\
 & J_2^+(x, y) = g'(x+y) + 1/2 g''(x+y)^2 + 1/6 g'''(x+y)^3 + 1/2 y^2 [b + B(x+y)] + 1/3 y^3 (C-B) \\
 & J_2^-(x) = -J_1^-(x) = G'x + G''x^2 + G'''x^3
 \end{aligned}$$

где индексы плюс и минус означают, что инварианты вычислены соответственно в области допредельной или предельной амплитуды (штрихами, как и выше, обозначены производные функций по их аргументам).

В остальном исследование аналогично предыдущему.

Если L_{2+} касается характеристики ($U_2 = 1$) (фиг. 2, а), то $g' = 0, g'' = -1/2 b, b > 0$ и в окрестности точки касания L_{2+} описывается уравнением

$$y = x + x^2 / D_1, \quad y < 0, \quad D_1 = -b / (4g''' + 3B + 2C) < 0$$

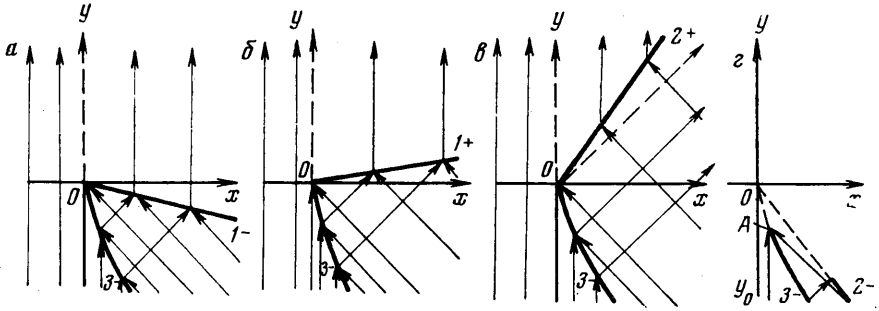
В этом случае L_{2+} продолжается кривой типа I L_{1+} , касающейся характеристики (фиг. 2, а) $y = x + 1/4 x^2 / D_1, y > 0$.

Отметим, что при определении из условия $J_1^+ = -J_2^+$ на L_{2+} инварианта J_1^+ необходимо функцию $f(x-y)$ в (1.6) искать в виде ряда по дробным степеням $(x-y)^{1/2}$. Тогда найдем

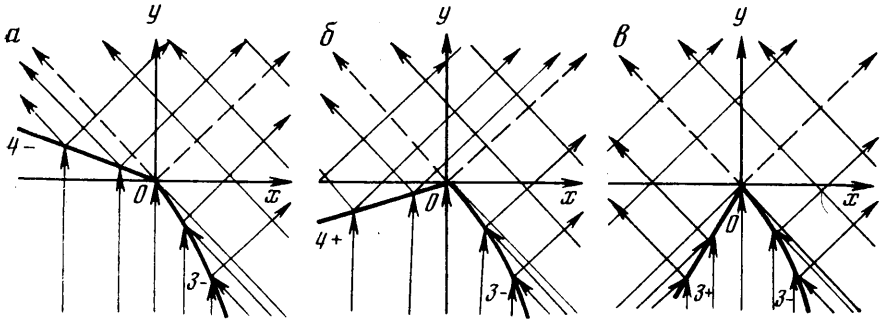
$$J_1^+ = -3/2 b (-D_1)^{1/2} (x-y)^{3/2} + 1/2 y^2 b + 1/3 y^3 (B+C)$$

В случае касания кривой типа II вертикали ($U = 0$) (фиг. 2, б) $g' = 0, g'' = -b < 0$. Граница L_{2+} описывается кривой

$$y = -\sqrt{D_1} x, \quad D_1 = -2g''' / (g''' + B + 2C) < 0$$



Фиг. 3



Фиг. 4

и продолжается кривой типа III L_{3-} : $y=2\sqrt{D_1}x$ (фиг. 2, б), касающейся оси y в точке O . Инвариант J_2^- в зоне предельного движения определим по значениям на границе L_{2+}

$$J_2^-(x, -\sqrt{D_1}x) = -^2/3b\sqrt{D_1}x^3 + O(x^2)$$

В случае касания кривой типа III, когда $U_3=0$ (фиг. 3), L_{3-} находится из условия $J_2^- = J_2^+$ и описывается уравнением

$$y = -[2G'x/(g''+b)]^{1/2}, \quad g'=0, \quad g''+b>0, \quad G'>0$$

При $b>0$ L_{3-} продолжается либо типом I $U_1=2(b+g'')/b$ (фиг. 3, б), если $g'' > -1/2b$, либо типом II $U_2=-(g''+b)/g''$ (фиг. 3, в), если $-b < g'' < -1/2b$.

При $b<0$ L_{3-} встречается с границей типа I L_{1-} $U_1=2(b+g'')/b$ (фиг. 3, а, кривая 1-), если $g'' > -3/2b$, либо с границей типа II L_{2-} (фиг. 3, в, кривая 2-) при $-b < g'' < -3/2b$. Однако в последнем случае нельзя задавать начальные условия на прямой $y=y_0<0$, так как характеристики семейства $x+y=\text{const}$ не доходят до части AO кривой L_{3-} в окрестности точки O . Этот специальный случай здесь не рассматривается.

Отметим, что все указанные переходы происходят с изломом L в точке O .

Если L_{3-} касается характеристики ($U_3=-1$) (фиг. 4), то L_{3-}

$$y = -x + y^2(2G''-b)/(2g'), \quad y<0, \quad g'<0, \quad G''>1/2b, \quad b<0.$$

L_{3-} продолжается типом IV $U_4=-1/2b/G''$: кривой L_{4-} (фиг. 4, а) при $1/2b < G'' < 0$: кривой L_{4+} (фиг. 4, б) при $0 < G'' < -1/2b$. Случай $G'' > -1/2b$ специальный.

Очевидно, что при $G'' > -1/2b$ можно продолжить L_{3-} границей типа III L_{3+} (фиг. 4, в), подобрав соответствующим образом инвариант J_1^+ слева от L_{3+} . Однако он не считается заданным в этой области. Продолжение $L_{3-}L_{3+}$ (фиг. 4, в) — специальный случай и поэтому не рассматривается.

При продолжениях $L_{3-}L_{4-}$ (фиг. 4, а) и $L_{3-}L_{4+}$ (фиг. 4, б) в точке O имеется излом границы L .

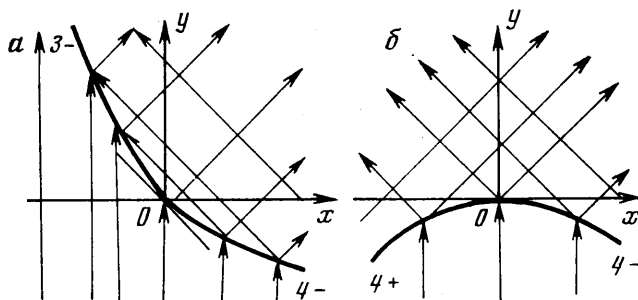
Когда кривая типа IV L_{4-} , определяемая из условия $\partial J_2 / \partial x + F = 0$, касается характеристики ($U_4 = 1$) (фиг. 5, а), она описывается уравнением

$$\begin{aligned} y &= -x + D_1 x^2, & x > 0, & D_1 = (B - C - 3G'')/b > 0 \\ b &< 0, & G' &= 0, & G'' &= 1/2 b \\ J_1^+ &= -1/2 b (x - y)^2 + 1/2 b y^2 \\ J_2^+ &= 2/3 b / D_1 (x + y)^{3/2} + 1/2 y^2 [b + B(x + y)] + 1/3 y^3 (C - B) \end{aligned}$$

Граница L_{4-} гладко продолжается кривой L_{3-} (фиг. 5, а)

$$y = -x + D_1 x^2 / 4, \quad x < 0$$

Наконец в случаях, когда кривые типов IV и I касаются горизонтали (оси x) и соответственно $U_4 = -\infty$, $U_1 = \infty$, продолжение строится тривиальным образом по значениям приносимых на границу инвариантов и является гладким. Один из этих случаев изображен на фиг. 5, б, а другой отличается от него только тем, что выше границы движение предельное, а ниже — допредельное, и поэтому соответствующая фигура не приведена.



Фиг. 5

Во всех рассмотренных случаях можно показать, что для построенных продолжений выполняются необходимые условия на рост величины v при подходе к линии раздела со стороны допредельного движения и неотрицательность $\partial v / \partial y$ в зоне предельного движения, вычисленной в силу системы (1.3) допредельного движения, что дает возможность продолжать решение с предельной амплитудой.

Как и в разобранном в п. 5 случае, построенные продолжения границы заполняют всю отведенную для них область и единственны, а способы продолжений непрерывно переходят один в другой.

7. Численный расчет движения волны. В качестве примера в окрестности точки касания границы типа I, когда $U_4 = 1$, $F = by$, проведен расчет на ЭВМ.

Начальные данные задавались непрерывными на прямой $y = y_0$ так, чтобы $g'' < -1/2 b$, $f' < 0$. Расчет проводился методом характеристик, примененным к разностной схеме, соответствующей системе (1.3), причем на каждом шаге осуществлялись замена значений $v > 0$, полученных в результате счета на $v = 0$, и пересчет инвариантов J_i^+ , $i = 1, 2$.

Погрешности округления при счете приводили к тому, что поворот происходил не в точке O, а вблизи нее, что не влияло на характер перехода одного участка L в другой.

В численном решении реализовались случаи продолжения в соответствии с изложенным выше. По результатам счета построены фиг. 1, в и г.

Таким образом, можно считать вполне удовлетворительной для качественного исследования модель разрушения, заданную полной системой уравнений (3.1) с членом $D\chi(v)$.

В заключение отметим, что в решении, построенном в [5] для бесконечного подводного хребта неизменного поперечного сечения, зона предельной амплитуды ограничена двумя прямыми, одна из которых является гребнем хребта, а другая ей параллельна; эти прямые — границы типов IV и I соответственно.

Авторы благодарят А. А. Бармина за обсуждение работы и полезные советы.

Поступила 27 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth, pt 1, *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 42, pt 3.
 2. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth, pt 2. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 46, pt 3.
 3. Нелинейная теория распространения волн. Сб. статей. М., «Мир», 1970.
 4. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
 5. *Резцов В. А.* Движение уединенной волны над подводным хребтом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
 6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
 7. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws II. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1957, vol. 10, № 4.
 8. *Ахиезер А. И., Любарский Т. Я., Половин Р. В.* Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 25, № 3.
-