

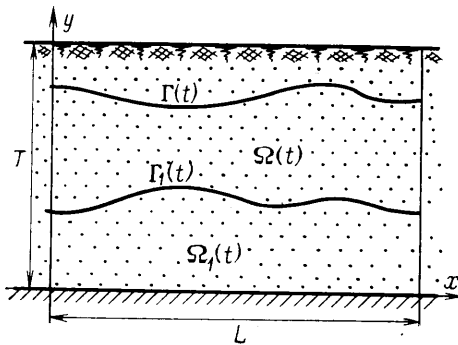
О БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. КАПРАНОВ

(Новосибирск)

Рассматривается безнапорная, неустановившаяся фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в слое однородной и изотропной пористой среды. Сформулирована нелинейная гидродинамическая задача и отмечен ряд ее особенностей. Построено решение соответствующей линеаризованной задачи.

1. Постановка задачи. Рассматривается двумерное течение в вертикальной плоскости xOy , схематически представленное на фиг. 1. Слой пористой среды $0 < y < T$, $-\infty < x < +\infty$ ограничен снизу водоупором $y=0$ и имеет постоянные пористость m и проницаемость k . Две жидкости с постоянными плотностями и вязкостями ρ, ρ_1, μ, μ_1 , фильтруются в областях $\Omega(t)$ и $\Omega_1(t)$ соответственно. Предполагается, что давление в зоне капиллярной каймы, примыкающей сверху к свободной границе $\Gamma(t)$: $F(x, y, t) = 0$, гидростатическое [1], а течение каждой из жидкостей описывается уравнениями Дарси [1]:



Фиг. 1

(1.1)

$$\Delta\varphi=0, \quad \mathbf{u}=\nabla\varphi,$$

$$\varphi=-k\left(\frac{p}{\rho g}+y\right)+a$$

$$\Delta\varphi_1=0, \quad \mathbf{u}_1=\nabla\varphi_1,$$

$$\varphi_1=-k_1\left(\frac{p_1}{\rho_1 g}+y\right)+a_1$$

Здесь \mathbf{u}, \mathbf{u}_1 — скорости фильтрации; φ, φ_1 — соответствующие им потенциалы; p, p_1 — давления; g — ускорение силы тяжести; a, a_1 — произвольные функции времени t ; $\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$; $k_1=Kg\rho_1/\mu_1, k=Kg\rho/\mu$ — коэффициенты фильтрации. Величины, относящиеся к области $\Omega_1(t)$, помечены индексом 1.

При переходе через границу раздела $\Gamma_1(t)$: $F_1(x, y, t) = 0$ давление претерпевает разрыв ([2], стр. 18) $p-p_1=p_c$, причем капиллярный скачок p_c предполагается зависящим лишь от времени. В терминах (1.1) это динамическое условие на $\Gamma_1(t)$ записывается в виде

$$(1.2) \quad \frac{\rho_1}{k_1}\varphi_1 - \frac{\rho}{k}\varphi + (\rho_1 - \rho)y = \frac{n}{g} + \frac{\rho_1}{k_1}a_1 - \frac{\rho}{k}a$$

В рамках модели поршневого вытеснения требование неразрывности потока при переходе через границу раздела жидкостей приводит к двум

кинематическим условиям на $\Gamma_1(t)$ ($[^2]$):

$$(1.3) \quad -m \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \frac{\partial F_1}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} \frac{\partial F_1}{\partial n_1}, \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\nabla F_1}{|\nabla F_1|}$$

Динамическое условие на свободной границе имеет вид ($[^1]$, стр. 32) $p = p_0 = p_a - \rho g h_c$, где p_a — атмосферное давление и $h_c = h_c(t)$ — высота капиллярной каймы. В силу (1.1) это означает, что на $\Gamma(t)$

$$(1.4) \quad \varphi + ky = a - kp_0 / \rho g$$

Если D_n — скорость перемещения $\Gamma(t)$ в направлении внешней нормали $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ и ε — интенсивность инфильтрации, то $D_n = -\frac{\partial F}{\partial t} / |\nabla F|$,

и в силу неразрывности потока $mD_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \varepsilon \cos(n, y)$. Отсюда и из (1.1) вытекает следующее кинематическое условие на $\Gamma(t)$:

$$(1.5) \quad m \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

Для рассматриваемой далее модельной задачи нижнее основание области фильтрации $y=0$ и ее боковые стороны $x=0$, $x=L$ предполагаются непроницаемыми, и потому

$$(1.6) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad y=0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad x=L$$

Положения искомых границ $\Gamma(t)$ и $\Gamma_1(t)$ считаются известными в некоторый принимаемый за $t=0$ момент времени, что приводит к начальным условиям

$$(1.7) \quad F(x, y, 0) = F^0(x, y), \quad F_1(x, y, 0) = F_1^0(x, y)$$

Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\frac{x}{L}, \quad \frac{y}{L}, \quad \frac{kt}{mL}, \quad \left(\varphi - a + \frac{kp_0}{\rho g} \right) \frac{1}{kL}, \quad \left(\varphi_1 - a_1 + k_1 \frac{p_0 - p_c}{\rho_1 g} \right) \frac{1}{k_1 L}$$

которые в дальнейшем будут снова обозначаться через x , y , t , φ и φ_1 соответственно. Пусть уравнения границ $\Gamma(t)$ и $\Gamma_1(t)$ представлены в разрешенном относительно y виде, т. е. $F = y - f(x, t)$, $F_1 = y - f_1(x, t)$, и пусть $\varepsilon = 0$. Тогда модельная задача (1.1) — (1.7) запишется следующим образом:

$$(1.8) \quad \Delta \varphi = 0, \quad 0 < x < 1, \quad f_1(x, t) < y < f(x, t)$$

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < f_1(x, t)$$

$$(1.9) \quad \varphi + y = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad y = f(x, t)$$

$$(1.10) \quad \varphi - (1 + \lambda) \varphi_1 = \lambda y, \quad y = f_1(x, t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right] = \frac{\partial f_1}{\partial t}$$

$$(1.11) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad y=0; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad x=1$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad x=1$$

$$(1.13) \quad f(x, 0) = f^0(x), \quad f_1(x, 0) = f_1^0(x)$$

Здесь $f^0(x)$ и $f_1^0(x)$ заданы и

$$(1.14) \quad \lambda = (\rho_1/\rho) - 1, \quad \kappa = k_1/k$$

Решение задачи (1.8)–(1.12) удовлетворяет интегральным соотношениям

$$(1.15) \quad \iint_{\Omega(t)} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\psi|_{y=f} \frac{\partial f}{\partial t} - \psi|_{y=f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} \right] dx$$

$$\kappa \iint_{\Omega_1(t)} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \psi_1 \, dx \, dy = \int_0^1 \psi_1|_{y=f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} dx$$

для произвольных гладких функций $\psi(x, y, t)$, $\psi_1(x, y, t)$, определенных в $\Omega(t)$ и $\Omega_1(t)$ соответственно.

В частном случае $\psi = \psi_1 = 1$ отсюда и из (1.13) следует свойство сохранения «объемов»:

$$(1.16) \quad \int_0^1 f \, dx = s \equiv \int_0^1 f^0 \, dx, \quad \int_0^1 f_1 \, dx = s_1 \equiv \int_0^1 f_1^0 \, dx$$

Если в (1.15) положить $\psi = \varphi$, $\psi_1 = (1 + \lambda)\varphi_1$, затем сложить получившиеся равенства и использовать условия (1.9), (1.10), то придем к полезному для дальнейшего соотношению

$$(1.17) \quad \iint_{\Omega(t)} |\nabla \varphi|^2 \, dx \, dy + \kappa(1 + \lambda) \iint_{\Omega_1(t)} |\nabla \varphi_1|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [f^2 + f_1^2] \, dx = 0$$

Допустим, что в $\Omega_1(t)$ фильтруется более плотная жидкость, т. е. (см. (1.14))

$$(1.18) \quad \lambda > 0$$

и под положением равновесия в момент $t_0 > 0$ будем понимать такое решение задачи (1.8)–(1.12), что $\nabla \varphi = 0$ и $\nabla \varphi_1 = 0$ в $\Omega(t_0)$ и $\Omega_1(t_0)$ соответственно.

Из (1.9), (1.10) и (1.16) следует, что при $t = t_0$, когда достигается положение равновесия, свободная граница и граница раздела горизонтальны, причем $f(x, t_0) \equiv s$, $f_1(x, t_0) \equiv s_1$. Если $u(x, t) \equiv f(x, t) - s$, $v(x, t) \equiv f_1(x, t) - s_1$, то в силу (1.16) и (1.17) имеем

$$\|u\|^2 \equiv \int_0^1 u^2 \, dx = \int_0^1 f^2 \, dx - s^2, \quad \|v\|^2 \equiv \int_0^1 v^2 \, dx = \int_0^1 f_1^2 \, dx - s_1^2$$

причем функция $\delta(t) = \|u\|^2 + \lambda \|v\|^2$, оставаясь в условиях (1.18) неотрицательной, с течением времени убывает. При $t = t_0$, как было отмечено выше, $\delta(t_0) = 0$; следовательно, $\delta(t) \equiv 0$ для всех $t \geq t_0$ и, тем самым, $f(x, t) \equiv s$, $f_1(x, t) \equiv s_1$ для любых $0 < x < 1$, $t \geq t_0$. Отсюда и из (1.17) следует, что $\nabla \varphi = 0$ в $\Omega(t)$ и $\nabla \varphi_1 = 0$ в $\Omega_1(t)$ при всех $t \geq t_0$.

Таким образом, положение равновесия, если оно достигается в некоторый момент, сохраняется и в дальнейшем. Положение равновесия во все моменты времени — единственное стационарное решение задачи (1.8) — (1.13).

Пусть $\Gamma(t)$ остается горизонтальной для всех $t > 0$. Тогда условия (1.9) на ней запишутся в виде $\varphi = -s$, $\partial\varphi/\partial y = 0$, что влечет $\varphi = -s$ в $\Omega(t)$ для всех $t > 0$, и поэтому в силу второго условия (1.10) $\partial\varphi_1/\partial n_1 = 0$ на $\Gamma_1(t)$. Отсюда и из соотношения (1.15), если в последнем положить $\psi_1 = \varphi_1$, следует: $\nabla\varphi_1 = 0$ в $\Omega_1(t)$, при $t > 0$. В силу первого условия (1.10) это означает, что $f_1(x, t) = s_1$, и потому по (1.13) необходимо $f_1^\circ(x) = s_1$.

Таким образом, если при $t = 0$ свободная граница горизонтальна, а граница раздела — нет, то первая из них с течением времени обязана перемещаться. Это свойство, как будет показано ниже, проявляется и в эксперименте.

2. Линеаризованная постановка. Для построения приближенного решения Φ , Φ_1 , f^* , f_1^* задачи (1.8) — (1.13) используется обобщение известного в случае однородной жидкости способа линеаризации [2].

Области $\Omega(t)$, $\Omega_1(t)$ заменяются прямоугольниками $\omega = \{0 < x < 1, h < y < H\}$, $\omega_1 = \{0 < x < 1, 0 < y < h\}$ с некоторыми наперед заданными числами $H > h > 0$. Требуется, чтобы функции Φ и Φ_1 были решениями уравнения Лапласа в ω и ω_1 соответственно и удовлетворяли крайевым условиям

$$(2.1) \quad \Delta\Phi = 0; \quad \Delta\Phi_1 = 0$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = 0, \quad y = 0; \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$$

Первое условие (1.9) сначала переписывается в виде $\varphi(x, f(x, t), t) + f(x, t) = 0$, затем дифференцируется отдельно по x и по t . Из полученных соотношений производные $\partial f/\partial t$, $\partial f/\partial x$ выражаются через значения $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial t$ на свободной границе и подставляются во второе условие (1.9). Последнее преобразуется к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + |\nabla\varphi|^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad y = f(x, t)$$

затем сносятся на прямую $y = H$ и нелинейные члены в нем отбрасываются:

$$(2.3) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad y = H$$

Первое условие (1.9) заменяется приближенным:

$$(2.4) \quad f^*(x, t) = -\Phi(x, H, t)$$

Последние два условия (1.10) также переписываются сначала в виде

$$\begin{aligned} \kappa \left[\lambda \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + (1+\lambda) |\nabla\varphi_1|^2 - \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_1 \right] &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} - (1+\lambda) \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \\ &= \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (1+\lambda) \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_1 - |\nabla\varphi|^2, \quad y = f_1(x, t) \end{aligned}$$

затем они сносятся на прямую $y = h$ и нелинейными членами в них пренебрегается:

$$(2.5) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \kappa \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} - (1+\lambda) \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad y = h$$

Первое условие (1.10) также заменяется приближенным

$$(2.6) \quad \lambda f_1^*(x, t) = \Phi(x, h, t) - (1 + \lambda) \Phi_1(x, h, t)$$

а начальные условия (1.13) сохраняются

$$(2.7) \quad f^*(x, 0) = f^\circ(x), \quad f_1^*(x, 0) = f_1^\circ(x)$$

Описанный способ линеаризации позволяет сохранить ряд особенностей нелинейной задачи (1.8)–(1.13). Приближенная постановка (2.1)–(2.7), как показывают расчеты, находится в разумном согласии с экспериментом и в количественном отношении.

Для построения решения задачи (2.1)–(2.7) продолжим функции Φ , Φ_1 , f^* , f_1^* , f° , f_1° четным образом на $x < 0$ и представим их в виде рядов

$$(2.8) \quad \begin{aligned} f^\circ &= \sum_{n \geq 0} c_n^\circ \cos(\pi n x), & f_1^\circ &= \sum_{n \geq 0} d_n^\circ \cos(\pi n x) \\ \Phi &= \sum_{n \geq 0} a_n \cos(\pi n x), & \Phi_1 &= \sum_{n \geq 0} b_n \cos(\pi n x) \\ f^* &= \sum_{n \geq 0} c_n \cos(\pi n x), & f_1^* &= \sum_{n \geq 0} d_n \cos(\pi n x) \end{aligned}$$

Подставляя (2.8) в (2.1), (2.2) и требуя выполнения первого условия (2.5), находим для коэффициентов разложений a_n , b_n ($n \geq 1$) следующие представления:

$$(2.9) \quad a_n = \alpha_n e^{\pi n y} + \beta_n e^{-\pi n y}, \quad b_n = (\alpha_n e^{\pi n h} - \beta_n e^{-\pi n h}) \frac{\operatorname{ch}(\pi n y)}{\kappa \operatorname{sh}(\pi n h)}$$

Входящие сюда функции времени α_n и β_n должны удовлетворять, как это следует из (2.8) и второго условия (2.5), системе обыкновенных уравнений вида

$$\begin{aligned} e^{\pi n H} \alpha_n' + e^{-\pi n H} \beta_n' + \pi n (e^{\pi n H} \alpha_n - e^{-\pi n H} \beta_n) = \\ = e^{\pi n h} \left(1 - \frac{1 + \lambda}{\kappa \gamma}\right) \alpha_n' + e^{-\pi n h} \left(1 + \frac{1 + \lambda}{\kappa \gamma}\right) \beta_n' - \\ - \lambda \pi n (e^{\pi n h} \alpha_n - e^{-\pi n h} \beta_n) = 0 \end{aligned}$$

с параметром γ_n , определенным выражением

$$(2.10) \quad \gamma_n = \operatorname{th}(\pi n h)$$

Общее решение указанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений представляется в виде

$$(2.11) \quad \alpha_n e^{\pi n H} = A_n (1 + p_n) e^{-\pi n p_n t} + B_n (1 + q_n) e^{-\pi n q_n t}$$

$$\beta_n e^{-\pi n H} = A_n (1 - p_n) e^{-\pi n p_n t} + B_n (1 - q_n) e^{-\pi n q_n t}$$

$$2p_n (1 + \lambda + \kappa \gamma_n r_n) = (1 + \lambda) (\kappa \gamma_n + r_n) - \Delta_n$$

$$(2.12) \quad (p_n - q_n) (1 + \lambda + \kappa \gamma_n r_n) = \Delta_n, \quad r_n = \operatorname{th}[\pi n (H - h)]$$

$$\Delta_n^2 = (1 + \lambda)^2 (\kappa \gamma_n + r_n)^2 - 4\lambda \kappa \gamma_n r_n (1 + \lambda + \kappa \gamma_n r_n)$$

Здесь A_n и B_n — произвольные постоянные.

При $n \geq 1$ выполняются неравенства $0 < \gamma_n, r_n < 1$. Поэтому величина Δ_n^2 , рассматриваемая как функция κ , имеет единственную экстремальную точ-

ку (точку минимума) κ_n^* :

$$\kappa_n^* = \frac{(\lambda^2 - 1)r_n}{\gamma_n [(1 + \lambda)^2 - 4\lambda r_n^2]},$$

$$\Delta_n^2 \geq \Delta_n^2(\kappa_n^*) = \frac{4\lambda(1 - r_n^2)r_n^2(1 + \lambda)^2}{(1 + \lambda)^2 - 4\lambda r_n^2}$$

Это минимальное значение положительно или отрицательно в зависимости от того, положительно или отрицательно λ , причем физически со-держателен лишь случай $\lambda > -1$, $\kappa > 0$ (см. (1.14)). Если $|\lambda| < 1$, то $\kappa_n^* < 0$ и $\Delta_n^2(0) > 0$; если же $\lambda \geq 1$, то $\Delta_n^2 > 0$ для всех $\kappa > 0$. Это означает, что для всех имеющих физический смысл значений параметров λ и κ входящие в (2.11) показатели p_n и q_n вещественны, причем в силу (2.12) выполнено неравенство $p_n > q_n$.

Подставляя (2.11) в (2.9) и требуя выполнения условий (2.6), (2.7), находим постоянные A_n и B_n . В результате для искомым коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n при $n \geq 1$ получаем следующие представления:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} 2\Delta_n c_n &= (\delta_n \theta_n + \sigma_n T_n) c_n^0 - 2\lambda \kappa \gamma_n \frac{(\theta_n - T_n) d_n^0}{\text{ch}[\pi n(H - h)]} \\ 2\Delta_n d_n &= (\sigma_n \theta_n + \delta_n T_n) d_n^0 - 2\kappa \gamma_n \frac{(\theta_n - T_n) c_n^0}{\text{ch}[\pi n(H - h)]} \\ \frac{2\Delta_n a_n}{\text{ch}[\pi n(H - y)]} &= \frac{2\lambda \kappa \gamma_n d_n^0}{\text{ch}[\pi n(H - h)]} [(1 - q_n R_n) \theta_n - \\ &- (1 - p_n R_n) T_n] - c_n^0 [\delta_n (1 - q_n R_n) \theta_n + \sigma_n (1 - p_n R_n) T_n] \\ 2\Delta_n b_n \frac{\text{sh}(\pi n h)}{\text{ch}(\pi n y)} &= 2\lambda \gamma_n d_n^0 [(q_n - r_n) \theta_n - (p_n - r_n) T_n] - \\ &- \text{ch}[\pi n(H - h)] c_n^0 [\delta_n (q_n - r_n) \theta_n - (p_n - r_n) T_n \sigma_n] / \kappa \\ \delta_n &= \Delta_n - (1 - \lambda) \kappa \gamma_n - (1 + \lambda) r_n, \quad \sigma_n = \Delta_n + (1 - \lambda) \kappa \gamma_n + (1 + \lambda) r_n \\ R_n &= \text{th}[\pi n(H - y)], \quad \theta_n = e^{-\pi n q_n t}, \quad T_n = e^{-\pi n p_n t} \end{aligned}$$

Для $n=0$ из (2.1)–(2.8) получаем

$$(2.14) \quad a_0 = -c_0 = -c_0^0, \quad d_0 = d_0^0, \quad b_0 = -(c_0^0 + \lambda d_0^0) / (1 + \lambda)$$

Из (2.10), (2.12) и (2.13) при достаточно больших n вытекают оценки $1 - \gamma_n = O(1) \exp(-2\pi n h)$, $1 - r_n = O(1) \exp[-2\pi n(H - h)]$, $1 - R_n = O(1) \exp[-2\pi n(H - y)]$. Отсюда и из (2.12) следует, что при $0 < \lambda < 1$ и $\kappa > 0$, или при $\lambda > 1$ и $\kappa \neq (\lambda + 1) / (\lambda - 1)$

$$\Delta_n \approx |(1 - \lambda) \kappa \gamma_n + 1 + \lambda| [1 + O(1) e^{-2\pi n(H - h)}]$$

причем первый сомножитель правой части отличен от нуля. В силу (2.12) и (2.13) это означает, что при $0 < \lambda \leq 1$ и $\kappa > 0$, или при $\lambda > 1$ и $\kappa < (\lambda + 1) / (\lambda - 1)$

$$p_n = 1 + O(1) e^{-2\pi n(H - h)}, \quad \delta_n = O(1) e^{-2\pi n(H - h)}$$

а при $\lambda > 1$ и $\kappa > (\lambda + 1) / (\lambda - 1)$

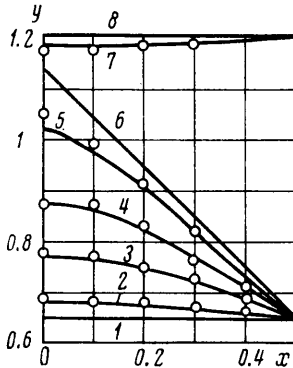
$$q_n = 1 + O(1) e^{-2\pi n(H - h)}, \quad \sigma_n = O(1) e^{-2\pi n(H - h)}$$

Таким образом, при $\lambda > 0$ и $\kappa \neq (\lambda + 1) / (\lambda - 1)$ получаем следующие оценки коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n :

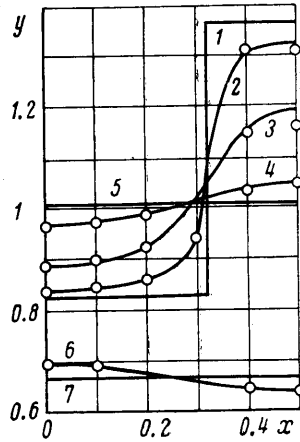
$$(2.15) \quad \begin{aligned} a_n &= O(1) [d_n^\circ e^{-\pi n(y-h)} + c_n^\circ e^{-\pi n(H-y)}] e^{-\pi n(q-\varepsilon)t} \\ b_n &= O(1) [d_n^\circ + c_n^\circ e^{-\pi n(H-h)}] e^{-\pi n[h-y+(q-\varepsilon)t]} \\ c_n, d_n &= O(1) \max(|c_n^\circ|, |d_n^\circ|) e^{-\pi n(q-\varepsilon)t} \end{aligned}$$

Здесь ε — произвольно малое положительное число; $q=1$, если $\lambda > 1$ и $\kappa > (\lambda+1)/(\lambda-1)$; $q=\lambda\kappa/(1+\lambda+\kappa)$, если $0 < \lambda \leq 1$ и $\kappa > 0$, или $\lambda > 1$ и $\kappa < (\lambda+1)/(\lambda-1)$.

Аналогичные оценки можно получить и в исключительном случае $\lambda > 1$, $\kappa = (\lambda+1)/(\lambda-1)$. Единственное отличие последних от (2.15) — «равномерность» относительно c_n°, d_n° .



Фиг. 2



Фиг. 3

Если начальные данные $f^\circ(x), f_1^\circ(x)$ квадратично интегрируемы, т. е.

$$(2.16) \quad \int_0^1 (f^\circ)^2 dx < \infty, \quad \int_0^1 (f_1^\circ)^2 dx < \infty$$

то, как следует из (2.15), ряды (2.8) сходятся в среднем, при любых $t \geq 0$. Определяемые ими функции Φ, Φ_1, f^*, f_1^* оказываются при этом бесконечно дифференцируемыми по совокупности переменных x, y, t ($t > 0$) и удовлетворяют условиям (2.1)–(2.6) в обычном смысле. Что касается начальных условий (2.7), то в случае гладких данных f°, f_1° они выполняются в классическом смысле. В общем случае (2.16) — условия (2.7) удовлетворяются лишь в среднем:

$$(2.17) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 [f^*(x, t) - f^\circ(x)]^2 dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 [f_1^*(x, t) - f_1^\circ(x)]^2 dx = 0$$

Для решения линеаризованной задачи выполняется аналогичное (1.17) интегральное соотношение

$$\begin{aligned} & \iint_{\omega} |\nabla \Phi|^2 dx dy + \kappa(1+\lambda) \iint_{\omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [(f^*)^2 + \lambda(f_1^*)^2] dx = 0 \end{aligned}$$

Из него вытекает единственность решения задачи (2.1)–(2.7) в общем случае (2.16), если при этом начальные условия понимаются в смысле (2.17).

Пусть $-1 < \lambda < 0$. Тогда в силу (2.12) разность $\Delta_n - (1 + \lambda)(\kappa \gamma_n + r_n)$, а потому и входящий в (2.13) показатель q_n , станут отрицательными. Следовательно, коэффициенты $c_n(t)$, $d_n(t)$ с течением времени неограниченно растут и течение становится неустойчивым. В этом смысле неравенство (1.18) является необходимым условием возможности линеаризации.

Отметим, что случай однородной жидкости, соответствующий $\lambda = 0$, содержится в полученных в настоящем пункте представлениях (2.8)–(2.13).

На фиг. 2 представлены результаты расчетов построенного выше решения линеаризованной задачи в случае начальных данных вида

$$f^\circ(x) \equiv H, f_1^\circ(x) = a - (a-b)x \equiv h + (a-b)(1/2 - x)$$

При этом полагалось: $H = 1.206$; $a = 1.15$; $b = 0.14$; $\lambda = 0.32$ и $\kappa = 2.34$. Кривые 1–6 изображают рассчитанные положения границы раздела в моменты $t = \infty$; 4; 2; 1; 0.3 и 0 соответственно. Свободная граница представлена лишь в момент ее наибольшего отклонения $t = 0.5$ (кривая 7) и в положении равновесия $t = 0$; ∞ (кривая 8). Точками отмечены (для соответствующих моментов времени) положения этих границ, взятые из опыта, который проводился на целевом лотке Н. С. Колодеем. В качестве более плотной жидкости использовался подкрашенный глицерин, в качестве менее плотной — касторовое масло.

Согласие линеаризованной постановки с экспериментом в данном случае вполне удовлетворительное. Эффект возмущения свободной границы за счет первоначального отклонения границы раздела имеет место, однако его величина сравнительно мала.

На фиг. 3 представлены результаты расчетов для начальных данных вида

$$f^\circ(x) \equiv c, \quad b < |2x-1| < 1; \quad f^\circ(x) \equiv c+a, \quad |2x-1| < b; \quad f_1^\circ(x) \equiv h \\ 0 < h < c, \quad H = c+ab$$

При этом полагалось: $h = 0.67$; $a = 0.53$; $b = 0.33$; $c = 0.83$; $\lambda = 0.32$ и $\kappa = 3.29$. Кривые 1–5 изображают рассчитанные положения свободной границы в моменты $t = 0$; 0.025; 0.1; 0.3 и $t = \infty$ соответственно. Граница раздела представлена в момент ее наибольшего отклонения от горизонтали (кривая 6, $t = 0.3$) и в положении равновесия (кривая 7, $t = 0$). Там же нанесены точки, взятые из опыта.

Видно, что динамика границы раздела описывается линейным приближением достаточно хорошо. Это справедливо и для левой «половины» свободной границы, но для правой при некоторых значениях времени расхождение с опытом оказывается довольно значительным. Последнее объясняется не только нелинейностью исходной гидродинамической задачи, но и влиянием зоны неполного насыщения. Ширина последней с течением времени увеличивается, достигает максимального значения в некоторый момент, а затем, когда скорость оседания свободной границы падает, уменьшается. В результате сначала часть жидкости уходит со свободной границы, затем наступает некоторый период стабилизации и, наконец, наблюдается приток из зоны неполного насыщения на свободную границу.

Поступила 29 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубарина-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М., «Наука», 1969.