

ДИНАМИКА ПАРОГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ

Р. И. НИГМАТУЛИН, Н. С. ХАБЕЕВ

(Москва)

Рассматривается нелинейная задача о тепловом, массовом и динамическом взаимодействии парогазового пузырька с жидкостью. Приведены результаты численного решения задачи о радиальном движении пузырька, вызванном внезапным изменением давления в жидкости, что иллюстрирует поведение парогазовых пузырьков в волнах сжатия и разрежения.

Соответствующая задача для однокомпонентных газовых и паровых пузырьков рассматривалась в [1, 2].

1. Основные уравнения. Принимаются допущения, используемые в постановке Рэлея [3] для динамики одиночного пузырька: сферическая симметрия процесса и однородность давления $p(t)$ (гомобаричность) внутри пузырька. Последнее справедливо, когда скорость поверхности пузырька значительно меньше скорости звука в газе. Вместе с тем предполагается, что плотность парогазовой смеси в каждой точке соответствует своей температуре при данном давлении согласно уравнению состояния. Правомерность такой постановки задачи показана в [1].

Если ввести концентрации компонент парогазовой смеси k_g и k_v , то значения теплофизических параметров смеси в каждой точке будут определяться формулой

$$(1.1) \quad A = k_v A_v + k_g A_g$$

$$(1.2) \quad k_v = \rho_v / \rho, \quad k_g = \rho_g / \rho, \quad \rho = \rho_v + \rho_g, \quad k_v + k_g = 1$$

где ρ — плотность, нижние индексы v, g, l — относятся соответственно к параметрам пара, газа и жидкости

В дальнейшем для простоты будем обозначать $k_v = k, k_g = 1 - k$.

В рамках принятых допущений и обозначений уравнения неразрывности, состояния и притока тепла в сферических эйлеровых координатах r, t имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \rho_v (v + w_v)] &= 0 \quad (0 \leq r < R(t)) \\ \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \rho_g (v + w_g)] &= 0 \\ \rho_g w_g &= -\rho_v w_v = \rho D \delta k / \partial r \\ u_g &= c_{vg} T, \quad p = p_v + p_g = \rho B T, \quad T_v = T_g = T \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad i_v(p_v, T) = c_{pv} (T - T_s(p_v))$$

$$\rho_v \frac{du_v}{dt} + \rho_g \frac{du_g}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho D \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial (u_v - u_g)}{\partial r}$$

$$r^2 v_i = R^2 V_i, \quad u_i = c_i T_i, \quad \rho_i = \text{const} \quad (R(t) < r < \infty)$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial u_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_l r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) + 12\mu \frac{v_l^2}{r^2}$$

где u — удельная внутренняя энергия, i — энтальпия, T — температура, v — скорость, R — радиус пузырька, D — коэффициент взаимной диффузии, c_p, c_v — удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и объеме, c_l — теплоемкость жидкости, λ — коэффициент теплопроводности, $l(p_v)$ — удельная теплота парообразования, $T_s(p_v)$ — температура насыщения, w — диффузионная скорость, V_i — массовая скорость жидкости на поверхности пузырька, B — газовая постоянная. Индекс 0 относится к начальному равновесному состоянию.

При неравновесном характере фазового перехода температура на границе раздела фаз претерпевает скачок, величина которого согласно [4]

$$(1.4) \quad [T] = T_{i\sigma} - T_{v\sigma} = 0.32 T_s \frac{j}{\sqrt{B_v T_s} \rho_v(R)}$$

где j — скорость фазовых переходов, отнесенная к единице поверхности, определяемая уравнением Герца — Кнудсена [5]

$$(1.5) \quad j = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi B_v}} \left(\frac{p_s(T_{i\sigma})}{\sqrt{T_{i\sigma}}} - \frac{p_{v\sigma}}{\sqrt{T_{v\sigma}}} \right)$$

Общепринятое для воды значение коэффициента аккомодации $\alpha = 0.04$. Нижние индексы σ и S относятся соответственно к параметрам на поверхности пузырька и на линии насыщения.

Граничные условия на подвижной границе $R(t)$, в центре и на бесконечности следующие:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} T_l &= T_{i\sigma}, \quad T_v = T_{v\sigma}, \quad \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} - \lambda \frac{\partial T_v}{\partial r} = j l \\ \rho_v (\dot{R} - v - w_v) &= \rho_l (\dot{R} - V_l) = j \\ \rho_g (\dot{R} - v - w_g) &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, \quad T = T_0 \end{aligned}$$

Уравнение пульсации пузырька в вязкой несжимаемой жидкости при наличии фазовых превращений [6] и уравнение изменения массы пузырька

$$(1.7) \quad \begin{aligned} R \dot{V}_l + \frac{3}{2} V_l^2 + 2V_l \frac{j}{\rho_l} &= \frac{p - p_l - 2\sigma/R}{\rho_l} - 4 \frac{\nu}{R} V_l \\ \dot{m} &= 4\pi R^2 j \end{aligned}$$

где p_l — давление жидкости вдали от пузырька, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\nu = \mu / \rho_l$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости, m — масса пузырька.

Для дальнейшего удобно пользоваться уравнением для давления в пузырьке, являющимся интегралом уравнения притока тепла при условии гомобаричности

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \left[-pR^2\nu(R) + \int_0^R Gr^2 dr \right] \left[R^3/3 - \int_0^R \Phi r^2 dr \right]^{-1} \\ \Phi &= \frac{B - \rho A k^2 B_v}{c_p}, \quad A=0 \\ (1.8) \quad G &= \frac{T}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho D r^2 \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{(B_v - B_g) c_v - k \rho A B_v B_g}{c_p} + \\ &+ \frac{B}{c_p} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho D \frac{\partial k}{\partial r} \left[(c_{vv} - c_{vg}) \frac{\partial T}{\partial r} + A p \frac{B_v B_g}{B^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right] \right\} \end{aligned}$$

Из уравнения неразрывности парогазовой смеси с использованием условия гомобаричности и граничного условия $v(0, t) = 0$ можно определить профиль скорости в пузырьке

$$(1.9) \quad v(r, t) = -\frac{r}{3\eta} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{nr^2} \int \left(G + \Phi \frac{dp}{dt} \right) r^2 dr$$

Такое представление удобно при численном решении задачи.

Для давления насыщенного пара p_s и теплоты парообразования использовались следующие аппроксимации [2]:

$$(1.10) \quad p_s = p_* \exp(-T_* / T_s), \quad l(p) = l_0 \exp[(a + b \ln(p / p_0)) \ln(p / p_0)]$$

где T_* , p_* , a , b находились из условия наилучшей аппроксимации зависимостями (1.10) табличных данных в заданном интервале давлений. Для коэффициентов теплопроводности и диффузии использовались обычные степенные зависимости от температуры.

2. Метод расчета. Задача решалась численно аналогично [2] разбиением системы на сферические слои (n слоев внутри пузыря, m — снаружи) с использованием переменной, «замораживающей» подвижную границу пузырька ($\xi = r/R(t)$). Конечно-разностная аппроксимация основных уравнений производится аналогично [1] заменой производных по ξ разностными отношениями. При этом уравнения в частных производных по r и t переходят в систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Контролем счета может служить степень совпадения массы пузырька, определяемой интегрированием уравнения (1.7) и путем непосредственного подсчета, а также сохранение массы газа в пузырьке

$$(2.1) \quad m = \sum_{i=1}^n \rho_i (r_{i+1/2}^3 - r_{i-1/2}^3), \quad m_g = \sum_{i=1}^n \rho_{gi} (r_{i+1/2}^3 - r_{i-1/2}^3) = \text{const}$$

В рассмотренных примерах эти расхождения не превышали 2%. При учете конечной теплопроводности жидкости граничное условие на бесконечности можно сносить на последний слой жидкости.

Для всех функций должны быть заданы начальные условия. В приведенных ниже примерах, как и в [2], предполагается, что до возникновения перепада давления система жидкость — парогазовый пузырек находилась в тепловом и механическом равновесии. Задача Коши решалась на ЭВМ методом Рунге — Кутты для случая паровоздушного пузырька в воде. Варьировались начальное газосодержание, размер пузырька, температура жидкости и перепад внешнего давления. При этом необходимые

параметры воды и теплофизические характеристики водяного пара и воздуха принимались согласно [7]. Предварительно были проведены контрольные расчеты для газовых и паровых пузырьков ($k=0$ и 1). Результаты совпали с решениями [1, 2].

3. Результаты расчетов. Рассматривалась задача о радиальном движении пузырька, возникающем в результате мгновенного при $t=0$ изменения давления в жидкости с p_0 до p_i . Для представления результатов использовались безразмерные переменные

$$(3.1) \quad R^* = \frac{R}{R_0}, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad J = \frac{j}{j_0}, \quad \xi = \frac{r}{R(t)}$$

$$\tau = \frac{t}{t_T}, \quad t_T = \frac{R_0^2}{a_0}, \quad j_0 = \frac{m_0}{4\pi R_0^2 t_T}, \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_{p_0}}$$

Начальное давление в пузырьке $p_0 = p_{v_0} + p_{g_0}$, а так как $p_{v_0} = p_s(T_0)$, то вариация начального паросодержания однозначно связана с вариацией начальной температуры жидкости.

Паровой пузырек, как это следует из диаграммы равновесных состояний пар — вода, при $p_i > p_0 - 2\sigma / R_0$ смыкается, а при $p_i < p_0 - 2\sigma / R_0$ неограниченно растет. Парогазовый пузырек в зависимости от начального газосодержания при $p_i > p_0 - 2\sigma / R_0$ сжимается до нового конечного состояния $R_1 < R_0$, а при $p_i < p_0 - 2\sigma / R_0$ растет, причем при $p_i < p_s(T_0) - 2\sigma / R_0$ растет неограниченно. Конечное состояние пузырька можно определить. Если снабдить индексами 0 и 1 соответственно параметры начального и конечного состояния, то

$$(3.2) \quad p_1 = p_i + 2\sigma / R_1, \quad m_1 = m_0 \frac{1 - k_0}{1 - k_1}, \quad j_1 = 0$$

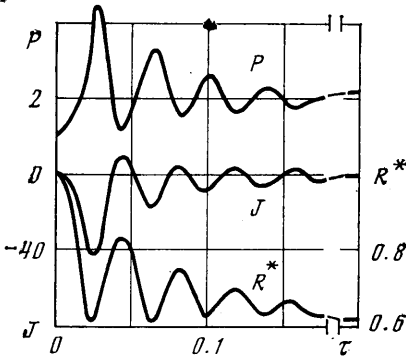
$$k_1 = k_0 \{ 1 + ((p_i - p_0) / p_0) [k_0 (B_v / B_g - 1) + 1] \}^{-1}$$

$$R_1 = R_0 \left[\frac{1 - k_0}{1 - k_1} \frac{p_0}{p_1} \frac{k_1 (B_v / B_g - 1) + 1}{k_0 (B_v / B_g - 1) + 1} \right]^{1/3}$$

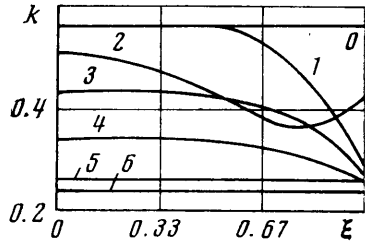
На фиг. 1 приведены зависимости R^* , P , $J(\tau)$ для начальных данных: $R_0 = 0.1$ мм, $p_0 = 1$ бар, $p_e = 2$ бар, $T_0 = 363^\circ$ К ($K_0 = 0.565$). На фиг. 2 представлены соответствующие этому варианту кривые, характеризующие локальное распределение концентрации пара k в пузырьке (кривые 0–6 соответствуют следующим моментам времени: $\tau \approx 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.1, 0.25, 0.4$). Из-за пульсации пузырька кривые распределения концентрации и температуры немонотонны.

Расчеты показали, что в рассматриваемой задаче величина скачка температуры на поверхности пузырька значительно меньше отклонения температуры жидкости у поверхности $T_{l\sigma}$ от температуры насыщения $T_s(p_v)$ (на графике скачок незаметен). Поэтому вполне допустимо, как это сделано в [2], характеризовать поверхностный слой, представляющий собой границу раздела фаз, одной температурой T_σ . Как показано в [4], учет скачка температуры важен для веществ с коэффициентом аккомодации $\alpha \sim 1$ (например, при кипении жидких металлов).

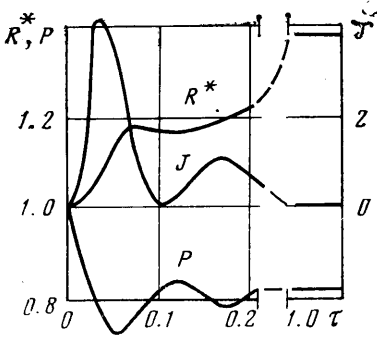
Введем характерные времена пульсации пузырька $t_v = \pi R_0 (\rho_l / p_0)^{1/2}$, теплопроводности $t_T = R_0^2 / a_0$ и диффузии $t_D = R_0^2 / D$ парогазовой смеси. Процесс идет следующим образом: в течение $t \sim 3t_v$ идет динамическая стадия. После нескольких колебаний пузырек монотонно переходит в новое равновесное состояние, определяемое параметрами (3.2). Так как в рассматриваемых примерах $D \sim a_0$, то выравнивание температуры и концентрации в пузырьке происходит примерно одновременно за время $t \sim t_T$, или $\tau \sim 1$. Оценки показывают, что при $R_0 \gg 10^{-6}$ м $t_D, t_T \gg t_v$, поэтому в рас-



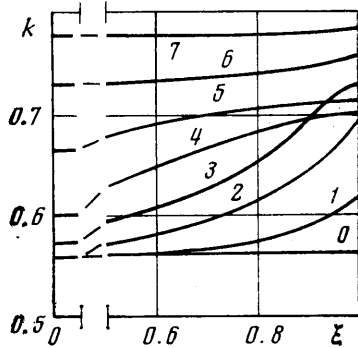
Фиг. 1



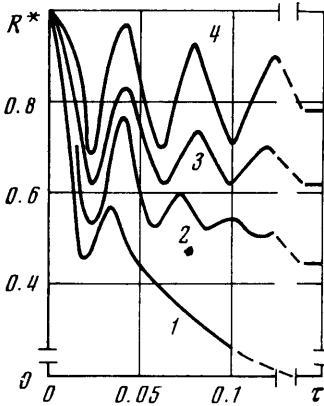
Фиг. 2



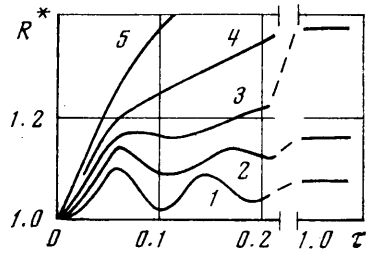
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

смаатриваемых примерах t_T является характерным временем перехода парогазовых пузырьков в новое равновесное состояние. На фиг. 3 те же зависимости приведены для случая роста парогазового пузырька $p_i = 0.8 \text{ бар}$ (остальные параметры те же, что и в предыдущем варианте). На фиг. 4 представлены соответствующие этому варианту кривые распределения концентрации пара в пузырьке (кривые 0–7 соответствуют моментам времени $\tau = 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0$). В этом примере $p_i > p_s(T_0) - 2\sigma/R_0$, поэтому рост пузыря ограниченный. За время $\tau \sim 1$ пузырек переходит в новое равновесное состояние с параметрами (3.2).

На рис. 5 для случая $R_0=0.1$ мм, $p_0=1$ бар, $p_l=2$ бар и для различных начальных температур жидкости T_0 (соответственно паросодержания $p_{v0}=p_s(T_0)$) приведены рассчитанные зависимости $R^*(\tau)$. Кривые 1–4 соответствуют следующим значениям $T_0=373, 370, 363, 293^\circ$ К (соответственно $k_0=1, 0.835, 0.565, 0.015$). Видно, что чем меньше начальное паросодержание пузырька, тем ближе движение пузырька к гармоническим колебаниям, наоборот, чем оно больше, тем менее заметна «затухающая осциллирующая рябь» на фоне угасающего пузырька. Кривые 1 и 4 практически соответствуют случаям парового и газового пузырьков. Как и следовало ожидать, кривые $R^*(\tau)$ для парогазовых пузырьков лежат между этими двумя предельными кривыми.

На фиг. 6 приведены зависимости $R^*(\tau)$ для случая роста парогазовых пузырьков. Начальные данные следующие: $R_0=0.1$ мм, $p_0=1$ бар, $p_l=0.8$ бар. Кривые 1–5 соответствуют следующим значениям $T_0=293, 353, 363, 368, 373^\circ$ К (соответственно $K_0=0.015, 0.337, 0.565, 0.744, 1$). Кривые 1–3 иллюстрируют ограниченный рост парогазовых пузырьков. В вариантах 4 и 5 $p_s(T_0) > p_l + 2\sigma/R_0$ в этих случаях рост парогазового пузырька неограниченный.

Поступила 4 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Теплообмен газового пузырька с жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
2. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Динамика паровых пузырьков. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
3. Rayleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Philos. Mag. Ser. 6, 1917, vol. 34, No. 200.
4. Лабунцов Д. А., Мурагова Т. М. Физические и методические основы формулировки задач тепло- и массообмена при фазовых превращениях. В кн. «Тепло- и массоперенос», т. 2, ч. 1. Минск, 1972.
5. Пол Б. Коэффициенты испарения. Ракетная техника, 1962, № 9.
6. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
7. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., «Наука», 1972.