

ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ВИХРЕЙ

Ю. Б. СЕДОВ

(Москва)

Рассматривается дискретная модель двумерных турбулентных течений идеальной жидкости, в которой завихренность сосредоточена в отдельных точках, и облако таких точечных вихрей определяет турбулентный поток. В данной математической модели, в отличие от других конечномерных моделей турбулентности точные уравнения гидродинамики не заменяются конечной системой зацепляющихся обыкновенных дифференциальных уравнений, а используются сингулярные начальные данные. Еще одним преимуществом подобного подхода является наглядность взаимодействия точечных вихрей и сравнительная простота уравнений, описывающих их динамику.

В настоящей работе численно изучается взаимодействие ста одинаковых точечных вихрей, в начальный момент расположенных равномерно по окружности. На примере этой модели прослежена тенденция к направленной передаче энергии от малых масштабов к большим в двумерной турбулентности, на возможность которой указывалось в ряде теоретических работ и в численных экспериментах [1-3]. Это явление было объяснено как следствие статической необратимости турбулентности [4]. Аналогичный эффект, непосредственно наблюдаемый в атмосфере Земли и состоящий в том, что общая циркуляция атмосферы питается энергией циклонов, получили название «отрицательной вязкости» [5].

Для такой вихревой системы проведен спектральный анализ, что является новым для систем точечных вихрей и стало возможным благодаря формулам, полученным в [6]. В ходе эволюции получены спектры с участками, близкими к «закону —⁵/₃» и к «закону — 3». Замечено явление вторичной неустойчивости систем вихрей. К концу численного эксперимента в системе устанавливается квазистационарный режим.

1. Постановка задачи. Пусть на двумерной плоскости имеется система из N точечных вихрей, расположенных в точках с координатами (x_α, y_α) в некоторой фиксированной системе отчета и имеющих интенсивности κ_α ($\alpha=1, 2, \dots, N$). Уравнения движения для α -го вихря с учетом влияния на него остальных вихрей имеют вид [7]

$$(1.1) \quad \frac{dx_\alpha}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\kappa_\beta (y_\alpha - y_\beta)}{r_{\alpha\beta}^2}, \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\kappa_\beta (x_\alpha - x_\beta)}{r_{\alpha\beta}^2}$$

$$r_{\alpha\beta}^2 = (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2$$

Полученная система дифференциальных уравнений является гамильтоновой с

$$(1.2) \quad H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha < \beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta \ln r_{\alpha\beta}$$

Гамильтониан H зависит только от взаимных расстояний между вихрями, и поэтому инвариантен относительно поворотов и сдвигов системы отсчета. Отсюда получаются еще три интеграла движения системы (1.1)

$$(1.3) \quad \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta} = X \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha}, \quad \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} y_{\alpha} = Y \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha}, \quad \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 = R^2 \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha},$$

где $X, Y, R = \text{const}$, $\rho_\alpha^2 = (x_\alpha - X)^2 + (y_\alpha - Y)^2$, а неподвижная точка (X, Y) называется центром завихренности (в случае $\sum_\alpha \kappa_\alpha = 0$ это бесконечно удаленная точка плоскости).

Для одного, двух и трех вихрей получены аналитические решения системы (1.1). Очевидно, что один вихрь остается в покое, расстояние между двумя вихрями сохраняется, а сами они вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг центра завихренности. Движение трех вихрей в относительных координатах r_{12}, r_{23}, r_{13} периодическое, за исключением одного значения непрерывного, определяемого начальными данными параметра [6].

В настоящей работе численно исследуется взаимодействие ста вихрей (всюду в дальнейшем $N=100$) одинаковой интенсивности κ , в начальный момент расположенных равномерно по окружности радиуса R . Число вихрей выбиралось исходя из возможностей ЭВМ. В подходящей системе координат с началом в центре окружности начальные условия

$$(1.4) \quad x_\alpha(0) = R \cos \frac{2\pi\alpha}{N}, \quad y_\alpha(0) = R \sin \frac{2\pi\alpha}{N} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N)$$

Ранее было показано, что такие конфигурации вращаются с постоянной угловой скоростью $\omega = \kappa(N-1)/4\pi R^2$ вокруг центра окружности [8-10]. При этом движение более чем семи вихрей является неустойчивым [10].

Для исследуемой вихревой системы характерным масштабом длины, важным для используемой вычислительной схемы, является расстояние между соседними вихрями $l = 2R \sin \pi/N$ в начальный момент, а характерным временем можно считать период вращения невозмущенной системы вихрей $T = 2\pi/\omega$.

Систему (1.1) и начальные условия (1.4) запишем в безразмерных переменных

$$(1.5) \quad \frac{d\xi_\alpha}{d\tau} = - \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\eta_\alpha - \eta_\beta}{l_{\alpha\beta}^2}, \quad \frac{d\eta_\alpha}{d\tau} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\xi_\alpha - \xi_\beta}{l_{\alpha\beta}^2}, \quad l_{\alpha\beta}^2 = (\xi_\alpha - \xi_\beta)^2 + (\eta_\alpha - \eta_\beta)^2$$

$$(1.6) \quad \xi_\alpha(0) = \cos \frac{2\pi\alpha}{N}, \quad \eta_\alpha(0) = \sin \frac{2\pi\alpha}{N} \quad (\alpha=1, 2, \dots, N)$$

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad \tau = \frac{\kappa}{2\pi R^2} t$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений (1.5) с начальными условиями (1.6) численно интегрировалась на ЭВМ М-222 методом Рунге — Кутты. Для контроля за точностью вычислений использовались известные интегралы (1.2), (1.3). Возмущения начальных условий задавались при использовании в (1.6) числа π с точностью до пятого знака после запятой. В процессе счета выяснилось, что наиболее чувствительным к ошибкам оказался интеграл энергии H , в то время как интегралы (1.3) практически не изменялись. Эволюция системы вихрей была прослежена на протяжении почти десяти периодов T . К концу эксперимента относительная погрешность для H составила 3.5%. Накопление ошибки по интегралу энергии было одной из причин окончания эксперимента. В ходе эксперимента проводился спектральный анализ и велось наблюдение за передачей энергии по спектру. Кроме того, находились одно- и двухвихревые распределения.

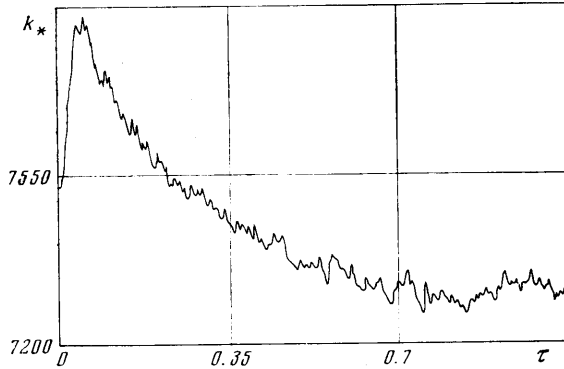
2. Передача энергии по спектру. Для конечных систем точечных вихрей аналитическое выражение для спектральной плотности энергии было получено в [6]

$$(2.1) \quad E_N(k, t) = \frac{1}{4\pi k} \left[\sum_\alpha \kappa_\alpha^2 + 2 \sum_{\alpha < \beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta J_0(kr_{\alpha\beta}(t)) \right]$$

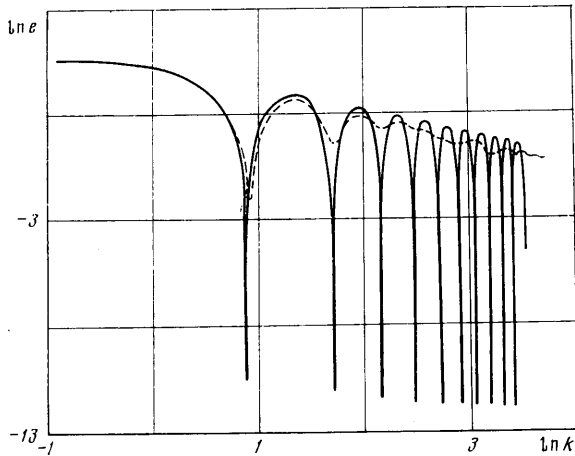
где J_0 — функция Бесселя, и в качестве основной величины, характеризующей направленную передачу энергии по спектру, было введено среднее волновое число k_0 (усреднение проводилось по спектральной плотности (2.1)). При этом уменьшение k_0 означает передачу энергии от малых масштабов к большим. В случае одинаковых вихрей

$$(2.2) \quad k_0(\tau) = ak_*(\tau) + b, \quad k_*(\tau) = \sum_{\alpha < \beta} \frac{1}{l_{\alpha\beta}(\tau)}$$

где a, b — положительные константы и поведение функции $k_*(\tau)$ полностью определяет поведение среднего волнового числа $k_0(\tau)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

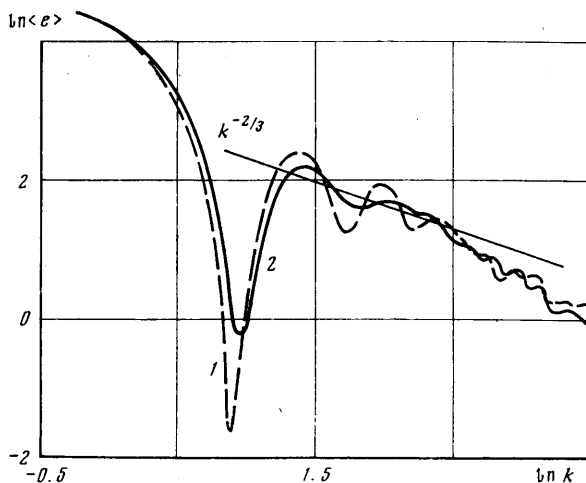
В случае ста вихрей по результатам численного интегрирования системы (1.5) находились значения функции $k_*(\tau)$ с временным шагом $\Delta\tau=0.001$. На фиг. 1 изображен график функции $k_*(\tau)$. Длительное систематическое убывание функции $k_*(\tau)$ соответствует наличию потока энергии от малых масштабов к большим в системе ста вихрей и подтверждает статистически необратимую тенденцию к переносу энергии от малых масштабов к большим в двумерной турбулентности.

3. Эволюция спектров. Спектральный анализ для ста вихрей позволяет провести формула (2.1) для спектральной плотности энергии. В процессе

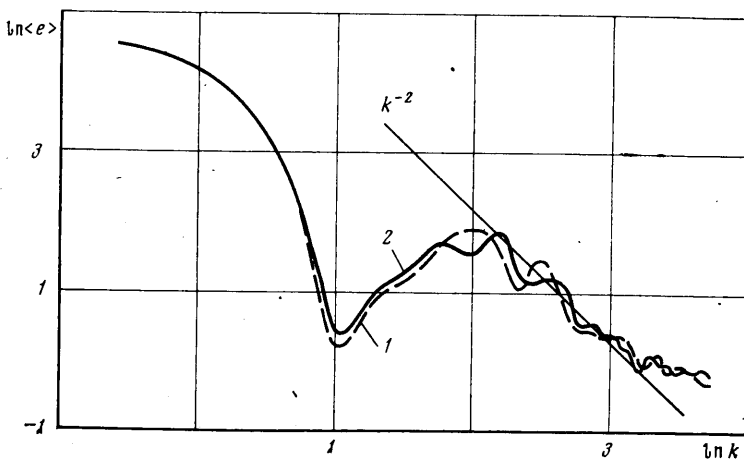
счета с шагом по времени $\Delta\tau=0.05$ находились значения спектральных функций

$$(3.1) \quad e(k, \tau) = \frac{kE_N(k, \tau)}{\pi N} = 1 + \frac{2}{N} \sum_{\alpha < \beta} J_0(kl_{\alpha\beta}(\tau))$$

Выражение для спектра в начальный момент времени можно упростить, так как многие слагаемые в сумме (3.1) совпадают



Фиг. 3



Фиг. 4

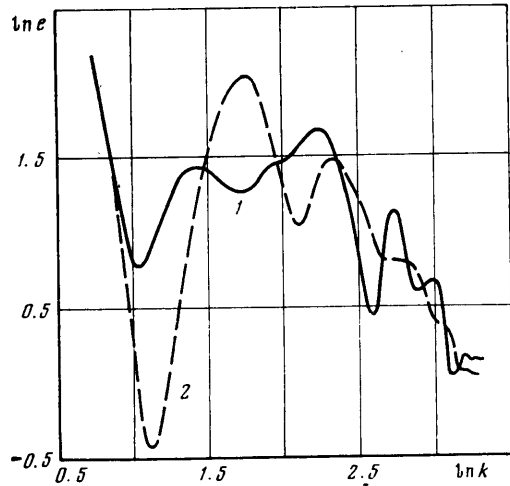
$$(3.2) \quad e(k, 0) = 1 + 2 \sum_{\beta=2}^{50} J_0(kl_{1\beta}(0)) + J_0(kl_{1,51}(0))$$

График начального спектра приведен на фиг. 2. Для сравнения на той же фигуре пунктирной линией изображен спектр в следующий момент времени $\tau=0.05$. Наличие у начального спектра целого ряда глубоких провалов, отличающих его ото всех последующих спектров, объясняется спецификой начальной конфигурации, имеющей несколько характерных масштабов — расстояний между вихрями.

Поведение спектров в последующие моменты времени имеет некоторые общие черты: при больших волновых числах значения спектров, осциллируя, стремятся к единице, далее, если двигаться в сторону убывания k , придем к участку возможного степенного роста приблизительно в интервале $1.2 < \ln k < 3.5$, после чего наблюдается впадина, возникающая из-за финитности движения, и при малых волновых числах значения спектров, возрастая, стремятся к N .

В двумерной турбулентности может возникать каскадный процесс передачи энергии, направленный от малых масштабов к большим, с «законом $-5/3$ » для спектральной плотности энергии в инерционном интервале, а также каскадный процесс передачи завихренности в противоположном направлении и «законом -3 » [1-3, 11]. Для конечных систем точечных вихрей можно ожидать возникновения каскадных процессов лишь на конечном интервале времени, так как такие системы не получают энергии извне. Применительно к спектральной функции $e(k, \tau)$ тогда имеем

$$\begin{aligned} e(k, \tau) &\sim k^{-2/3}, \\ e(k, \tau) &\sim k^{-2} \end{aligned}$$



Фиг. 5

Полученные с временным шагом $\Delta\tau=0.05$ спектры $e(k, \tau)$ усреднялись по времени. Оптимальным оказалось усреднение по двум соседним временным точкам. Через $\langle e(k, \tau + \Delta\tau/2) \rangle$ будем обозначать усредненный по точкам τ и $\tau + \Delta\tau$ спектр. В ходе эволюции усредненных спектров к законам подобия можно выделить два этапа. На первом этапе, соответствующем наиболее быстрому убыванию величины $k_*(\tau)$ (см. фиг. 1), т. е. наиболее интенсивной перекачки энергии от малых масштабов к большим, поведение спектров в некотором интервале волновых чисел близко к «закону $-5/3$ ». На фиг. 3 изображены усредненные спектры: 1 — при $\tau=0.075$, 2 — при $\tau=0.125$. Затем убывание $k_*(\tau)$ замедляется, и в области больших волновых чисел начинает доминировать спектральный перенос завихренности. Эволюция спектров к «закону -3 » показана на фиг. 4, где 1 — $\langle e(k, 0.325) \rangle$, 2 — $\langle e(k, 0.375) \rangle$. Как видно на фиг. 3 и 4, приближение к законам подобия имеет характер затухающих колебаний. Для большего числа вихрей следует ожидать более гладких степенных участков спектра и установления законов подобия в более широком интервале волновых чисел.

4. Вторичная неустойчивость. Из-за неустойчивости начальной конфигурации и нелинейного взаимодействия вихрей происходит их быстрое перемешивание. Это хорошо прослеживается по гистограммам радиального распределения вихрей. Первоначальный пик из ста вихрей ко времени $\tau=0.15$ распался в широкое кольцо. Движение конечной системы точечных вихрей одинакового знака является финитным. Интегралы (1.3) не позволяют вихрям удаляться от центра завихренности на расстояния, большие некоторого внешнего масштаба L , и перемещения вихрей происходят внутри круга этого радиуса. Радиальные распределения вихрей находились с шагом по времени $\Delta\tau=0.05$ и при этом оказалось, что вихри

в своем движении не уходят от центра больше чем на удвоенный радиус первоначальной окружности, т. е. в данном случае $L \approx 2R$.

С тем же временным шагом находились гистограммы двухвихревых распределений. Наблюдение за двухвихревыми распределениями интересно уже потому, что спектральная плотность энергии зависит лишь от всевозможных расстояний между вихрями.

Отметим, что в процессе эволюции системы вихрей происходит резкая скачкообразная перестройка, существенно изменяющая спектры и гистограммы одно- и двухвихревых распределений. На фиг. 5 приведены спектры до и после перестройки: $1 - e(k, 0.55)$, $2 - e(k, 0.6)$. Чтобы лучше разобраться в происшедших изменениях, были нанесены положения вихрей на плоскости в моменты $\tau = 0.55$ и 0.6 . Оказалось, что перестройка уменьшила число компактных групп вихрей как за счет слияния вихревых групп, так и за счет отделения от групп обособленных вихрей. В целом вихри стали более равномерно рассеяны по кругу двойного радиуса, и на этом фоне выделяются несколько крупных компактных вихревых групп.

Таким образом, в турбулентных течениях помимо первоначальной возможности и вторичные неустойчивости на более поздних этапах движения.

5. Квазистационарный режим. В ходе эволюции системы ста вихрей возникает квазистационарный режим. На приближение к этому режиму указывает то, что, начиная с некоторого момента, основные усредненные характеристики движения не подвергаются существенным изменениям во времени. Так, усредненные спектры энергии при временах, больших $\tau = 0.825$, незначительно отличаются друг от друга в соседних временных точках. Аналогичным образом ведут себя одно- и двухвихревые распределения. Поведение функции $k_*(\tau)$ к этому времени стабилизируется и имеет характер колебаний около некоторого среднего значения. Все это позволяет полагать, что к концу эксперимента система ста вихрей находилась в установившемся статистическом режиме.

В заключение благодарю Е. А. Новикова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 2 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraichnan R. H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, No. 7.
2. Batchelor G. K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1969, vol. 12, No. 12, suppl. 2.
3. Lilly D. K. Numerical simulation of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1969, vol. 12, No. 12, suppl. 2.
4. Новиков Е. А. Статистическая необратимость турбулентности и передача энергии по спектру. В сб. «Турбулентные течения», М., «Наука», 1974.
5. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., «Мир», 1971.
6. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей. *ЖЭТФ*, 1975, т. 68, вып. 5.
7. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
8. Murty G. S., Sankara Rao K. Numerical study of the behaviour of a system of parallel line vortices. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 40, pt 3.
9. Morikawa G. K., Swenson E. V. Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices. *Phys. Fluids* 1971, vol. 14, No. 6.
10. Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring. *London Edin. and Dublin Philos. Mag. 7th ser.*, 1931, vol. 11, No. 70.
11. Деснанский В. Н., Новиков Е. А., Эволюция спектров турбулентности к режиму подобия. *Изв. АН СССР, Физ. атмосферы и океана*, 1974, т. 10, № 2.