

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ЛОКАЛЬНОГО САМОПОДОБИЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Б. Н. КОРОТКОВ

(Ленинград)

К исследованию пульсационного движения трех типов пристеночных течений несжимаемой жидкости — в пограничном слое продольно обтекаемой пластины, в круглой трубе и в плоском канале — применен анализ размерностей и подход, использованный Миллиkenом [1] к анализу среднего движения. Показано, что при достаточно больших числах Рейнольдса существует диапазон расстояний от стенки x_2 , внутри которого интегральные одноточечные корреляции и узкополосные одноточечные корреляции Φ_{jk} не зависят от x_2 . В частотном пространстве существует гиперболический интервал, в котором $\Phi_{jk} = A_{jk} u_\tau^2 f^{-1}$. Здесь $A_{jk} = \text{const}$, u_τ — динамическая скорость, f — частота.

Показано также, что с точки зрения среднего движения необходимо различать кармановское турбулентное течение при достаточно больших числах Рейнольдса и некармановское течение при малых, но «турбулентных» числах Рейнольдса. В последнем случае коэффициенты в логарифмических профилях скорости и законе сопротивления зависят от числа Рейнольдса. Приведена оценка числа Рейнольдса, которое можно считать достаточно большим.

1. Профили средних скоростей и закон сопротивления. Профиль средних скоростей для трех типов рассматриваемых пристеночных турбулентных течений может быть охарактеризован дефектом скорости $\Delta u_1 = u_1 - U_1$, который в общем случае зависит от следующих определяющих параметров [1, 2]:

$$(1.1) \quad \Delta u_1 = \Delta u_1(x_2; l_e; \nu; u_\tau)$$

Здесь U_1 — средняя характерная скорость течения (на внешней границе пограничного слоя либо на оси трубы или плоского канала); u_1 — средняя продольная скорость на расстоянии x_2 от стенки; l_e — характерный «невязкий» размер течения (для пограничного слоя l_e равно толщине его δ , а для напорных течений в трубе или плоском канале — радиусу трубы либо полуширине канала соответственно); ν — кинематический коэффициент вязкости; $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$, τ_w — среднее напряжение трения на стенке при $x_2 = 0$; ρ — массовая плотность несжимаемой жидкости. Зависимость Δu_1 от продольной координаты x_1 для течения в пограничном слое пластины учитывается через средство l_e и u_τ .

Приняв за основные размерные величины x_2 и u_τ , согласно л-теореме теории подобия и размерности [3], соотношение (1.1) без потери общности можно переписать в безразмерном виде

$$(1.2) \quad \Delta u_1 / u_\tau = F(x_2 / l_e; x_2 / l_i)$$

где $l_i = \nu / u_\tau$ — динамическая длина, а F — безразмерная функция двух безразмерных расстояний от стенки. Соотношение (1.2) должно быть справедливо во всей толще пристеночного течения, поскольку при его выводе

не использовались какие-либо предположения о механизме движения или о характере связи рассматриваемых величин.

Предположим теперь, что вдали от стенки (при $l_i \ll x_2$) течение зависит от вязкости только через l_e и u_τ . Тогда в соотношении (1.4) можно исключить ν из числа определяющих параметров. Поэтому вдали от стенки профиль дефекта скорости описывается законом дефекта скорости

$$(1.3) \quad \Delta u_1/u_\tau = F_1(x_2/l_e)$$

В этом законе F_1 — универсальная функция единственного аргумента x_2/l_e при всех значениях x_1 для течения в погранслое и при всех значениях l_e для напорных течений (которые не зависят от x_1). Функции F_1 могут быть, вообще говоря, различными для трех типов рассматриваемых течений. Предположение, приводящее к закону (1.3), может быть названо гипотезой локального по пространству самоподобия турбулентности вдали от стенки. По этому поводу см. также [4]. Многочисленные эксперименты [1, 2, 4] подтверждают справедливость этой гипотезы в обширном диапазоне x_2/l_e .

Здесь и далее используется термин «самоподобие», при этом, когда речь идет о сравнении множества течений, отличающихся по числу Рейнольдса, следует часть этого термина (само) опускать и говорить о подобии течений по числу Рейнольдса.

Однако вблизи стенки, где уже нельзя считать, что $l_i \ll x_2$, непосредственно проявляется влияние вязкости в соответствии с (1.2). Это указывает на то, что самоподобие (1.3) является не полным, а локальным. Объясняется это тем, что именно вязкость обуславливает прилипание жидкости к поверхности твердого тела и профиль скорости вблизи стенки.

В той же мере, что и дефектом скорости, профиль средних скоростей может быть охарактеризован значением скорости u_1 на расстоянии x_2 от стенки. Это величина зависит от тех же самых определяющих параметров, что и Δu_1 . Поэтому в общем случае во всей толще пристеночного течения должно быть справедливо безразмерное соотношение

$$(1.4) \quad u_1/u_\tau = F(x_2/l_i; x_2/l_e)$$

Предположим теперь, что вблизи стенки (при $x_2 \ll l_e$) течение зависит от l_e только через u_τ , а от вязкости зависит непосредственно. Тогда вблизи стенки можно исключить l_e из числа определяющих параметров. Поэтому вблизи стенки профиль скорости должен описываться законом стенки

$$(1.5) \quad u_1/u_\tau = F_2(x_2/l_i)$$

Здесь F_2 — универсальная функция единственного аргумента x_2/l_i . Поскольку (1.5) вовсе не зависит от l_e , то имеются основания считать, что функции F_2 могут быть одинаковы для всех трех типов течений.

Предположение, приводящее к закону стенки, может быть названо гипотезой локального по пространству самоподобия турбулентности вблизи стенки. Эксперименты [1, 2, 4] подтверждают справедливость этой гипотезы в широком диапазоне x_2/l_i , который расширяется по мере увеличения числа Рейнольдса $Re = U_1 l_e / \nu$ и включает все полупространство $0 \leq x_2/l_i < \infty$ при $Re \rightarrow \infty$.

Однако вдали от стенки, когда уже нельзя считать, что $x_2 \ll l_e$, проявляется непосредственное влияние l_e в соответствии с (1.4). Это означает, что самоподобие (1.5) является не полным, а локальным. Связано это с тем, что вдали от стенки профиль скорости обусловлен не величиной вязкости непосредственно, а крупномасштабными компонентами пульсационного движения, поведение которых прямо зависит от l_e .

Предположим далее вслед за [1, 2], что существует область $l_i \ll x_2 \ll l_e$. Очевидно, это может иметь место, если $l_i \ll l_e$, т. е. если велико число Рейнольдса l_e/l_i , построенное по динамической скорости. Тогда в этой области одинаково справедливы законы (1.3) и (1.5). Поэтому обе функции F_1 и F_2 должны быть логарифмическими [1, 2]

$$(1.6) \quad \Delta u_1/u_\tau = A \lg(x_2/l_e) + B$$

$$(1.7) \quad u_1/u_\tau = A \lg(x_2/l_i) + C$$

Вычитая (1.6) из (1.7), приходим к закону сопротивления течений около гладких стенок

$$(1.8) \quad U_1/u_\tau = C - B + A \lg(l_e/l_i)$$

В этих уравнениях A , B , C — эмпирические константы. Есть основания полагать, что A и C должны быть одинаковыми для всех трех типов течений. Ведь величина l_e влияет на профиль (1.7) только через u_τ . При малых l_e/l_i формулы (1.6) — (1.8) могут перестать быть справедливыми. В частности, коэффициенты A , B , C могут при этом зависеть от числа Рейнольдса.

Эксперименты, проведенные при достаточно больших числах Рейнольдса, позволяют конкретизировать введенное выше двойное неравенство и получить представление о том, что же следует называть достаточно большими l_e/l_i . В самом деле, логарифмический интервал ограничен пределами $\beta l_i \leq x_2 \leq \alpha l_e$, где $\beta = 30$ и α — постоянные числа. В случае пограничного слоя $\alpha = 0.2$, поэтому логарифмический интервал ограничен пределами

$$(1.9) \quad 30l_i \leq x_2 \leq 0.2\delta$$

Будем считать, что логарифмический участок профиля достаточно выражен, если он занимает одну декаду $30l_i \leq x_2 \leq 300l_i$. Тогда на верхнем пределе логарифмического интервала получаем равенство $0.2\delta = 300l_i$. Отсюда следует оценка числа Рейнольдса, которое можно считать достаточно большим $\delta/l_i = 1.5 \cdot 10^3$.

Эта оценка имеет довольно ограниченную ценность. Она дает представление о порядке величин, с которыми приходится иметь дело. Составить же суждение о числе Рейнольдса, начиная с которого, например, коэффициент A перестает зависеть от числа Рейнольдса, можно либо на основании более строгой теории, свободной от предположения $l_i \ll l_e$, либо с помощью специально поставленных экспериментов.

Анализ профилей средней скорости, измеренных при малых, но «турбулентных» числах Рейнольдса [5, 6], показывает, что при этом величина A существенно отличается от тех значений, которые получаются при больших числах Рейнольдса. Величина логарифмического интервала при этом также оказывается незначительной. Поэтому имеет смысл, говоря о полностью турбулентных пристеночных течениях, различать некармановское течение при малых числах Рейнольдса и кармановское течение, когда имеет место вполне выраженный логарифмический интервал в профиле скорости, а значение константы A соответствует общепринятому значению постоянной Кармана.

При произвольных числах Рейнольдса, в том числе и при малых l_e/l_i , анализ размерностей позволяет получить закон сопротивления в гораздо менее определенном, чем (1.8), виде

$$(1.10) \quad U_1/u_\tau = F_0(U_1 l_e/\nu)$$

2. Одноточечные корреляции пульсаций скорости. Применим использованный выше подход к исследованию пульсационного движения. Одноточечные корреляции пульсаций скорости в полубесконечной полосе ча-

стот $0 < f < \infty$ зависят от тех же самых определяющих параметров, что и профили средних скоростей

$$(2.1) \quad \langle u_j' u_k' \rangle = F_{jk}(x_2; l_e; \nu; u_\tau)$$

Здесь u_j' , u_k' — мгновенные значения j , k -компонент пульсаций скорости в одной и той же точке потока, j ; $k=1, 2, 3$ — индексы направлений: 1 — вдоль потока, 2 — по нормали к стенке, 3 — перпендикулярно первым двум. Угловые скобки означают осреднение по времени. В безразмерном виде (2.1) можно переписать так:

$$(2.2) \quad \langle u_j' u_k' \rangle / u_\tau^2 = F_{jk}(x_2/l_e; x_2/l_i)$$

Предположим теперь, что вдали от стенки (при $l_i \ll x_2$) пульсационное движение в широкой полосе частот (как и среднее) не зависит от вязкости. Тогда

$$(2.3) \quad \langle u_j' u_k' \rangle / u_\tau^2 = F_{jk}^e(x_2/l_e)$$

Это соотношение выражает гипотезу локального самоподобия турбулентности вдали от стенки для пульсационного движения. Основанием для этой гипотезы служит тот факт, что большая часть энергии пульсаций сосредоточена в области низких частот, обусловленных крупномасштабными пульсационными компонентами, поведение которых не зависит от вязкости [4]. Однако вблизи стенки эта гипотеза не может быть справедливой, так как из-за условия прилипания пульсационное движение (как и среднее) должно здесь зависеть от вязкости. Это обуславливает локальный характер самоподобия (2.3).

С другой стороны, предположим, что вблизи стенки (при $x_2 \ll l_e$) течение непосредственно определяется вязкостью, а от l_e зависит только через u_τ . Тогда

$$(2.4) \quad \langle u_j' u_k' \rangle / u_\tau^2 = F_{jk}^i(x_2/l_i)$$

Основанием для выдвижения этой гипотезы локального самоподобия турбулентности вблизи стенки служит тот факт, что даже и крупномасштабные компоненты движения подчиняются влиянию вязкости из-за условия прилипания на стенке. Нетрудно понять, почему и этот вид самоподобия имеет локальный по пространству характер.

Предположим далее по аналогии с [1, 2], что существует область $l_i \ll x_2 \ll l_e$, в которой справедливы соотношения (2.3) и (2.4). Тогда в этой области

$$(2.5) \quad F_{jk}^e(x_2/l_e) = F_{jk}^i(x_2/l_i)$$

Но две функции различных аргументов x_2/l_e и x_2/l_i равны, когда они являются константами. Поэтому в диапазоне перекрытия по x_2 имеем $\langle u_j' u_k' \rangle / u_\tau^2 = a_{jk}$, где a_{jk} — универсальные константы.

Вне диапазона перекрытия, ближе к стенке, величина $\langle u_j' u_k' \rangle$ уменьшается, так как из-за условия прилипания (и непротекания) $u_j' = u_k' = 0$ при $x_2 = 0$. С удалением от стенки за пределы диапазона перекрытия величина $\langle u_j' u_k' \rangle$ также уменьшается (так как в случае пограничного слоя происходит постепенный переход в область потенциального течения, где также $u_j' = u_k' = 0$). Поэтому внутри диапазона перекрытия имеем $\langle u_j' u_k' \rangle = \max = a_{jk} u_\tau^2$.

Из всех величин $\langle u_j' u_k' \rangle$ наибольший интерес представляет $\langle u_1' u_2' \rangle$, поскольку $-\rho \langle u_1' u_2' \rangle = \rho a_{12} u_\tau^2 (\approx \tau_w)$ есть не что иное, как рейнольдсово напряжение. Из измерений Лауфера в трубе [4] следует, что значение a_{12} в диапазоне $30 < x_2/l_i < 100$ действительно меняется очень мало и весь-

ма близко к единице ($a_{12}=0.90-0.97$). Следовательно, изложенный подход согласуется с концепцией слоя постоянного напряжения.

Нетрудно понять, что все изложенное справедливо при достаточно больших l_e/l_i .

3. Узкополосные одноточечные корреляции пульсаций скорости. Обозначим $\Phi_{jk}=\langle\Delta u_j u_k'\rangle/\Delta f$. Здесь $\langle\Delta u_j u_k'\rangle$ — осредненное по времени произведение компонент пульсаций скорости в одной и той же точке пространства в узкой полосе частот Δf . В частном случае $j=k$ имеем Φ_{jj} — обычную спектральную плотность мощности j -компоненты. Размерность этой характеристики $[\Phi_{jk}]=L^2 T^{-1}$. В общем случае должна быть справедлива зависимость

$$(3.1) \quad \Phi_{jk}=\Phi_{jk}(x_2; l_e; \nu; u_i; f)$$

которую без потери общности можно заменить безразмерным соотношением [3]

$$(3.2) \quad \Phi_{jk}/u_i x_2=F(x_2/l_i; f x_2/u_i; x_2/l_e)$$

Если координата точки наблюдения лежит в интервале $l_i \ll x_2 \ll l_e$, то ввиду изложенных выше причин можно пренебречь влиянием ν и l_e . Поэтому в этом интервале x_2

$$(3.3) \quad \Phi_{jk}/u_i x_2=F_3(f x_2/u_i)$$

При этом частоты f должны быть не слишком высокими и не слишком низкими. Если вместо x_2 в соотношении (3.4) в качестве основной размерной величины принять f , то соотношение (3.2) можно заменить ему эквивалентным

$$(3.4) \quad \Phi_{jk} f/u_i^2=F(f/f_e; f x_2/u_i; f/f_i)$$

Здесь $f_e=u_i/l_e$ — «невязкий» масштаб частоты; $f_i=u_i/l_i=u_i^2/\nu$ — вязкий масштаб частоты. В том случае, если $f_e \ll f \ll f_i$, можно пренебречь влиянием ν и l_e . Тогда вместо уравнения (3.4) может быть справедливо более простое

$$(3.5) \quad \Phi_{jk} f/u_i^2=F_4(f x_2/u_i)$$

При этом x_2 должно быть не слишком большим и не слишком малым.

Таким образом, приходим к выводу о существовании некоторой области

$$(3.6) \quad l_i \ll x_2 \ll l_e, \quad f_e \ll f \ll f_i$$

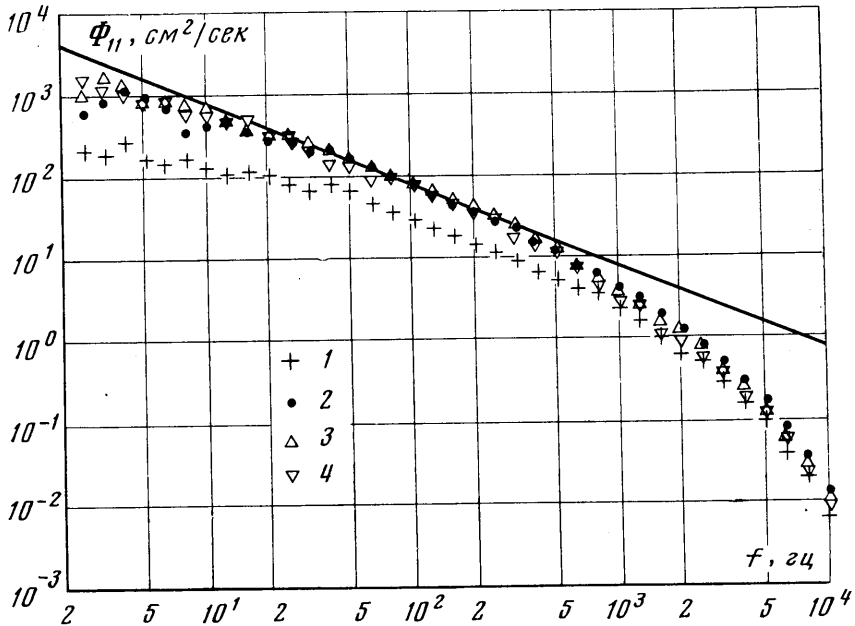
внутри которой безразмерная величина Φ_{jk} зависит от одной безразмерной частоты $f x_2/u_i$. Внутри этой области частот и расстояний от стенки функция Φ_{jk} может быть с равным успехом описана универсальными функциями F_3 и F_4 . Однако это еще не дает возможности указать вид F_3 и F_4 , так как это обстоятельство никоим образом не ограничивает класса интересующих нас функций в пределах такого рода локального по пространству и по частоте самоподобия.

Указанный вид самоподобия может иметь место при $l_i \ll l_e$ и замечателен тем, что он устанавливает соотношение между частотой и x_2 , близкое к взаимно-однозначному соответствию. Действительно, если в пределах этого самоподобия увеличить в 2 раза частоту, то можно получить то же самое значение функций F_3 и F_4 , уменьшив во столько же раз x_2 . Вне области (3.6) безразмерные спектры зависят еще от одного или двух параметров.

Предположим далее, что в области (3.6) функция Φ_{jk} не зависит не только от l_e и ν , но также и от x_2 . Тогда приходим к результату

$$(3.7) \quad \Phi_{jk} f / u_\tau^2 = A_{jk}$$

Здесь A_{jk} — универсальные константы. Нетрудно заметить, что соотношение (3.7) является частным случаем более общего результата (3.5) при $F_4(fx_2/u_\tau) = A_{jk}$.



Фиг. 1

Пользуясь этим же предположением, можно конкретизировать также вид функции F_3 . Умножив обе части (3.7) на $(fx_2/u_\tau)^{-1}$, получим

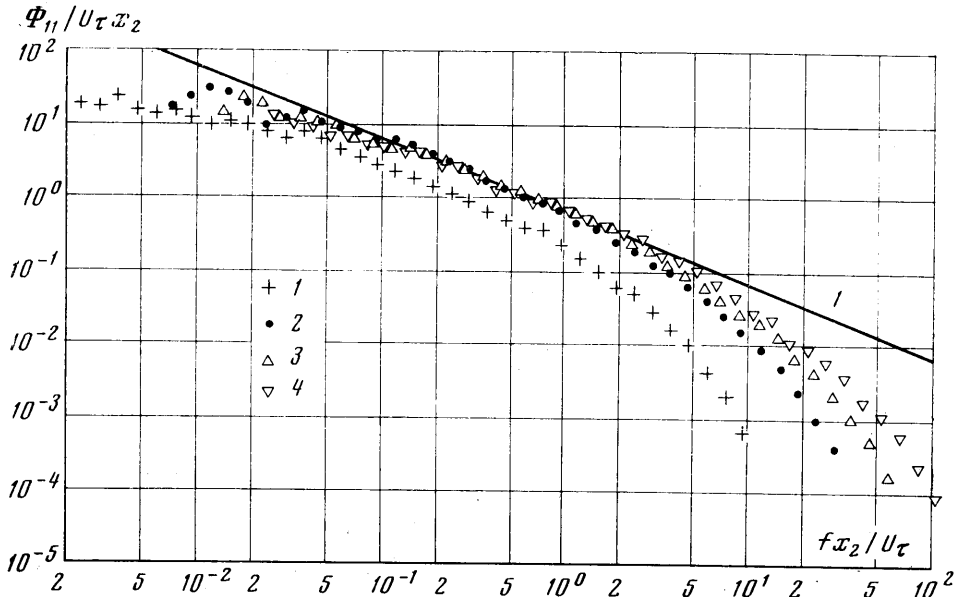
$$(3.8) \quad \Phi_{jk} / u_\tau x_2 = A_{jk} (fx_2/u_\tau)^{-1}$$

Это означает, что $F_3(fx_2/u_\tau) = A_{jk} (fx_2/u_\tau)^{-1}$. Можно видеть, что и в этом случае зависимость Φ_{jk} от x_2 чисто формальная, так как эта величина сокращается в обеих частях (3.8). Формальное введение x_2 в данном случае обусловлено соображениями размерностей.

Предположение о независимости Φ_{jk} от x_2 является развитием результата, полученного в п. 2 настоящей работы, о независимости корреляций $\langle u_j' u_k' \rangle$ от этой координаты в некотором диапазоне расстояний от стенки. Вместе с тем эти два утверждения, вообще говоря, не эквивалентны друг другу. Так как можно представить себе случай, когда при $x_2 = \text{var}$ величина $\langle u_j' u_k' \rangle$ остается константой, в то время как распределение Φ_{jk} по частотам с изменением x_2 изменяется, так что Φ_{jk} также изменяется с изменением x_2 . Нетрудно понять, что эти два утверждения совпадают, если $\Phi_{jk} / \langle u_j' u_k' \rangle$ остается одной и той же функцией частоты при $x_2 = \text{var}$. Эксперименты показывают [7], что это условие выполняется в широком диапазоне изменения величины x_2/l_e . Поэтому спектры (3.7) и (3.8) должны обнаруживаться в экспериментах.

На фиг. 1 представлены размерные спектры мощности Φ_{11} продольной компоненты пульсаций скорости, измеренные в безградиентном погранич-

ном слое при достаточно большом числе Рейнольдса ($\delta/l_i=5.22 \cdot 10^3$). Значения $(x_2/\delta) \cdot 10^2$ составляли 1.3, 3.9, 7.8 и 14.3 для точек, обозначенных на фиг. 1 цифрами 1, 2, 3 и 4 соответственно. Отношения x_2/l_i составляли соответственно 68, 204, 408 и 748. Можно видеть, что при $3.9 \leq (x_2/\delta) \cdot 10^2 \leq 14.3$ спектральная плотность Φ_{11} действительно не зависит от x_2 и падает с частотой, как f^{-1} (прямая 1 на фиг. 1) в диапазоне частот $10 \leq f \leq 500$ гц. В ближайшей к стенке точке $(x_2/\delta) \cdot 10^2=1.3$ (при $x_2/l_i=68$) спектральная плотность значительно уменьшается из-за непосредственного влияния



Фиг. 2

вязкости (в особенности на низких частотах, при $f < 40$ гц). При удалении точки наблюдения от стенки дальше $x_2/\delta \approx 0.2$ спектральная плотность Φ_{11} также уменьшается, так как при этом происходит постепенный переход из пограничного слоя в потенциальный поток. Соответствующие точки не приведены на фиг. 1, чтобы ее не загромождать.

Экспериментальные данные фиг. 1 представлены на фиг. 2 в безразмерном виде в соответствии с нормировкой (3.2). Обозначения точек те же, что и на фиг. 1. При этом обнаруживается диапазон частот и значений x_2 , в котором безразмерный спектр мощности удовлетворяет соотношению (3.3), а точнее говоря формуле (3.8). Эта последняя зависимость приведена на фиг. 2 в виде прямой 1. При этом получено значение экспериментальной константы $A_{11}=0.627$. Таким образом, эксперименты подтверждают теоретические формулы (3.7) и (3.8).

Анализируя фиг. 1 и 2, следует указать, что параметрическое расслоение спектров на фиг. 2 при $f x_2 / u_{\tau} \gg 2$ обусловлено не только влиянием x_2/l_i , но также влиянием параметра x_2/λ , учитывающего ограниченную разрешающую способность использованного датчика. Через λ здесь обозначена длина нити термоанемометрического проволочного датчика, которая была равна 1 мм. Ясно, что такой большой датчик не может вести себя как точный на больших частотах. Поэтому истинный спектр мощности может следовать гиперболической зависимости (3.8) до значительно более высоких частот $f x_2 / u_{\tau}$, чем это обнаруживают измеренные спектры на фиг. 2.

Из изложенного видно, что все результаты отличающиеся сколько-нибудь значительной определенностью, относятся к областям перекрытия более общих, а потому и менее определенных зависимостей. Упомянутые области перекрытия могут существовать как в физическом, так и в частотном пространстве, а также в том и другом одновременно при достаточно больших числах Рейнольдса l_o/l_i . Такой подход, развитый в [1] для исследования среднего движения, впервые применен автором настоящей работы к изучению пульсационного движения [8].

Изложенный выше подход позволяет также полностью отказаться от использования понятия волнового числа, а значит, и фазовой скорости и от использования модельных представлений, основанных на гипотезе замороженной турбулентности, в связи с исследованием узкополосных одноточечных корреляций. Это важно, поскольку целым рядом работ показано, что гипотеза Тейлора, вообще говоря, не справедлива для течений со скоростью средней скорости.

Все результаты, полученные в настоящей работе, свободны от предположения о локальной изотропии мелкомасштабных компонент пульсационного движения. И в самом деле, трудно ожидать статистического равенства продольной и нормальной к стенке компонент турбулентного движения вблизи стенки. Но в таком предположении и нет необходимости. Это означает, что константы A_{jk} могут отличаться по величине.

Автор считает приятным долгом выразить признательность М. А. Капиной за предоставленные экспериментальные данные.

Поступила 26 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Millikan C. B. A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. Proc. 5-th Internat. Congr. Appl. Mech., Cambridge (USA), 1939, pp. 386-392.
2. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. В сб. «Проблемы механики», вып. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1959, стр. 297-340.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
5. Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Rundstadler P. W. The structure of turbulent boundary layers. J. Fluid Mech., December 1967, vol. 30, pt 4.
6. Huffman G. D., Bradshaw P. A note on von Karman's constant in low Reynolds's number turbulent flows. J. Fluid Mech., May 1972, vol. 53, pt 1.
7. Блюдзе Ю. Г., Докучаев О. Н. Измерения пульсаций скорости и давления в турбулентных пограничных слоях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
8. Коротков Б. Н. Пульсации давления и касательного напряжения трения на гладких и шероховатых стенках под турбулентными течениями. Краткие тез. докл. на XXII Всес. научн.-техн. конф. по теории корабля, вып. 3. Л., «Судостроение», 1973.