МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1976

УДК 532.526

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Е. Ю. ШАЛЬМАН

(Москва)

В работе найдены асимптотические вблизи внешней границы решения неавтомодельных уравнений ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости и сжимаемом газе. Показано, что характер асимптотического решения определяется видом начального профиля скорости и энтальпии.

1. Выберем следующую систему координат: ось x направим вдоль обтекаемой поверхности, а ось y – по нормали к ней. Тогда в переменных Лиза – Дородницына уравнения ламинарного пограничного слоя запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)+f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\beta\left(g-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)=2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial\xi}-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial g}{\partial z}\right)+f\frac{\partial g}{\partial z}+2\frac{\Pr-1}{\Pr}U\frac{\partial}{\partial z}\left(N\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)=$$
$$=2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \xi}-\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)$$

$$\xi=\int_0^x \rho_e\mu_e u_e\,dx,\quad z=\frac{u_e}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y \rho\,dy$$

$$N=\frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e},\quad f=\int_0^z\frac{u}{u_e}dz,\quad g=\frac{H}{H_e},\quad \beta=\frac{1}{1-U}\frac{2\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi},\quad U=\frac{u_e^2}{2H_e}$$

Здесь u – проекция скорости на ось x, ρ – плотность, μ – коэффициент вязкости, H – энтальпия торможения, $\Pr$ – число Прандтля, индексом e обозначены параметры внешнего потока.

Граничные условия имеют вид

$$f=\frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad g=g_w\quad (z=0);\quad \frac{\partial f}{\partial z}\to 1,\quad g\to 1\quad (z\to\infty)$$

Кроме того, для (1.1) необходимо задать начальные условия при некотором $\xi=\xi_0$. В зависимости от способа задания начальных условий будем разделять задачу A, когда $\xi_0=0$ и решение начинается с автомодельного решения с $\beta=\beta(0)$, и задачу B, когда при $\xi_0>0$ заданы f и g (задача о продолжении решения).

При численном интегрировании уравнений пограничного слоя граничные условия из бесконечности переносятся на конечное расстояние от стенки. Чтобы оценить, как влияет этот перенос на решение, исследуем асимптотические (при больших z) решения уравнений (1.1).

Обозначим $F=1-\partial f/\partial z$, $G=1-g$, $\Delta N=1-N$ и перейдем от переменной z к переменной $\eta=f$. При больших η после линеаризации (так как $F\ll 1$, $G\ll 1$, $\Delta N\ll 1$) система уравнений пограничного слоя перейдет в

$$F''+\eta F'+\beta(G-2F)=2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi} \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{\Pr}G''+\eta G'+2\frac{\Pr-1}{\Pr}UF''=2\xi\frac{\partial G}{\partial\xi}$$

Штрихом обозначена производная по η. Отметим, что получившиеся уравнения не зависят от выбранного закона зависимости вязкости от температуры.

Граничные условия для системы (1.2) имеют вид

$$F\to 0,\ G\to 0\ (\eta\to\infty);\quad F(\xi,\eta_*)=F_*(\xi),\quad G(\xi,\eta_*)=G_*(\xi) \tag{1.3}$$

Последнее условие определяется из склейки асимптотического решения с решением уравнений (1.1) при $0\leqslant\eta\leqslant\eta_*$. При $G\equiv 0$, $U\equiv 0$ уравнения (1.2) переходят в уравнение для несжимаемой жидкости

$$F''+\eta F'-2\beta F=2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi} \tag{1.4}$$

Асимптотические решения автомодельных уравнений (получаются из (1.2) в предположении $\beta=\text{const}$, $U=\text{const}$, $\partial F/\partial\xi=\partial G/\partial\xi=0$) исследовались многими авторами [1-5]. При этом было обнаружено, что при отрицательных β условие (1.3) не определяет решение однозначно. Выбор решения проводился на основе различных физических соображений и всегда сводился к отбрасыванию медленно затухающего алгебраического члена. В [6] рассмотрена задача B для уравнения (1.4) при постоянном β. Получено, что в зависимости от характера начальных условий при $\xi\to\infty$ может осуществляться любое из автомодельных решений. В работе [7] получены оценки для решения неавтомодельных уравнений пограничного слоя в несжимаемой жидкости.

2. Для несжимаемой жидкости найдем решение уравнения (1.4), удовлетворяющее при $\eta\to\infty$ граничному условию (1.3). Предположим, что $F(\xi,\eta)=\varphi(\eta)\cdot\Psi(\xi)$. Тогда из (1.4) получим

$$\varphi''+\eta\varphi'-\lambda\varphi=0,\quad 2\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+(2\beta-\lambda)\Psi=0 \tag{2.1}$$

Здесь λ – некоторая константа. Последнее уравнение легко интегрируется

$$\Psi=c_1\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\lambda-2\beta}{2\xi}d\xi\right)$$

Для задачи A из условия сходимости интеграла следует, что $\lambda=2\beta_0$, здесь $\beta_0=\beta(0)$. При этом первое уравнение (2.1) переходит в автомодельное. Так как $\beta_0\geqslant 0$, то алгебраический член в решении уравнения (2.1) отсутствует и решение задачи A представимо в виде

$$F(\xi,\eta)=c_0\eta^{-m}Z\exp\left(\int_0^{\xi}\frac{\beta_0-\beta}{\xi}d\xi\right),\quad m=2\beta_0+1 \tag{2.2}$$

$$Z=\exp(-\eta^2/2)$$

Задачу B рассмотрим с начальным условием $F(\xi_0, \eta)=\eta^{-\alpha}$, $\alpha>0$. Тогда из (2.1) следует, что $\lambda=-\alpha$ и решение задачи имеет вид

$$(2.3)\qquad F(\xi,\eta)=c\eta^{-\alpha}\exp\left(-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{\alpha+2\beta}{2\xi}d\xi\right)$$

Если $\beta_0>\beta$, то решение (2.2) возрастает при увеличении ξ, так же как и решение (2.3) при $\alpha+2\beta<0$. Это указывает на возможную неустойчивость решения уравнения (1.4).

3. Так как метод разделения переменных не удается распространить на течение сжимаемого газа с $\mathrm{Pr}\neq1$, то рассмотрим другой возможный подход к решению уравнения (1.4). Анализ выражений (2.2) и (2.3), а также выводы работы [7] позволяет заключить, что если начальный профиль имеет вид

$$F(\xi_0, \eta)=c_1\eta^\gamma Z+c_2\eta^{-\alpha},\quad \alpha>0$$

то решение представимо в виде

$$(3.1)\qquad F(\xi,\eta)=F_1(\xi,\eta)Z+F_2(\xi,\eta)$$

где $F_i'\sim F_i/\eta$, $F_i''\sim F_i/\eta^2$, $i=1, 2$. Функция $F_2\to0$ при $\eta\to\infty$. На функцию F_1 такое ограничение не накладывается. Подстановка (3.1) в (1.4) приводит с точностью до малых более высокого порядка по $1/\eta$ к следующей задаче для F_1 и F_2:

$$(3.2)\qquad 2\xi\frac{2F_1}{\partial\xi}+\eta F_1'+(2\beta+1)F_1=0$$

$$(3.3)\qquad 2\xi\frac{\partial F_2}{\partial\xi}-\eta F_2'+2\beta F_2=0$$

$$F_1(\xi_0,\eta)=c_1\eta^\gamma,\quad F_2(\xi_0,\eta)=c_2\eta^{-\alpha}$$

Получившиеся уравнения легко решаются методом характеристик

$$(3.4)\qquad F_1(\xi,\eta)=c_1\eta^\gamma\exp\left(\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{1-\gamma-2\beta}{2\xi}d\xi\right)$$

$$(3.5)\qquad F_2(\xi,\eta)=c_2\eta^{-\alpha}\exp\left(-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{\alpha+2\beta}{2\xi}d\xi\right)$$

Характеристики уравнений (3.2) и (3.3) имеют вид $\eta=c\sqrt{\xi}$ и $\eta=c/\sqrt{\xi}$ соответственно. Последние характеристики совпадают с линиями тока.

Экспоненциально убывающие начальные условия определяют решение над характеристикой $\eta=c\sqrt{\xi}$, выходящей из точки ξ_0, $\eta_*(\xi_0)$. Решение в области под этой характеристикой определяется условиями склейки (1.3). Пусть $\beta\to\beta_1$ при $\xi\to\infty$. Тогда вдоль характеристики $\eta=c\sqrt{\xi}$ решение (3.4) стремится к величине $c\eta^{-m}$, $m=2\beta_1+1$. Следовательно, вдоль характеристики решение выходит на автомодельное, отвечающее β_1. Поэтому возрастание решения (3.4) вдоль линии $\eta=\mathrm{const}$ при $1-\gamma-2\beta>0$ вызвано не неустойчивостью решения уравнения (1.5), а изменением толщины пограничного слоя в переменных ξ, η при торможении или ускорении потока.

Аналогично тому, как это сделано в [6], можно показать, что уравнение (3.3) описывает течение, в котором силы вязкости не существенны. Здесь также возможен рост решения вдоль линии $\eta=\text{const}$ при $\alpha+2\beta<0$, но вдоль характеристики $\eta=c/\sqrt{\xi}$, т. е. линии тока, решение остается ограниченным и стремится к алгебраически затухающему автомодельному решению, отвечающему β_1, что совпадает с выводами [6]. Условия склейки не влияют на решение уравнений (3.3).

Так как уравнение (1.4) линейно, то полученные решения позволяют исследовать довольно широкий класс начальных условий

$$F(\xi_0,\eta)=\int\limits_0^\infty \frac{\alpha(\omega)}{\eta^\omega}\,d\omega+Z\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\eta^\omega B(\omega)\,d\omega$$

4. Рассмотрим течение сжимаемого газа. Если $\mathrm{Pr}=1$, то заменой $\Phi=F-0.5\,G$ система (1.2) сводится к

$$\Phi''+\eta\Phi'-2\beta\Phi=2\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi},\quad G''+\eta G'=2\xi\frac{\partial G}{\partial\xi} \tag{4.1}$$

Первое уравнение по виду совпадает с (1.4), а второе получается из первого при $\beta=0$. Поэтому исследование решения асимптотических уравнений при $\mathrm{Pr}=1$ сводится к несжимаемой жидкости. Выпишем решение задачи A

$$F=\left(c_1\eta^{-m}\exp\left(\int\limits_0^\xi\frac{\beta_0-\beta}{\xi}\,d\xi\right)+0.5c_2/\eta\right)Z,\quad m=2\beta_0+1$$

$$G=c_2Z/\eta$$

Характерной особенностью полученного решения является то, что в рассматриваемых переменных полная энтальпия не зависит от ξ.

Чтобы показать, что при $\mathrm{Pr}\neq1$ поведение решения определяется характером убывания начального профиля, предположим, что параметры внешнего потока и решение уравнений (1.2) представимы в виде сходящихся рядов по степеням $(\xi-\xi_0)$

$$\beta=\sum_{k=0}^\infty\beta_k(\xi-\xi_0)^k,\quad U=\sum_{k=0}^\infty U_k(\xi-\xi_0)^k,\quad F=\sum_{k=0}^\infty F_k(\eta)\,(\xi-\xi_0)^k$$

$$G=\sum_{k=0}^\infty G_k(\eta)\,(\xi-\xi_0)^k$$

Подстановка этих разложений в (1.2) приводит к следующей системе уравнений:

$$F_k''+\eta F_k'+\beta_0G_k-2(\beta_0+k)F_k=2\xi_0(k+1)F_{k+1}+\sum_{i=1}^k\beta_i(G_{k-i}-2F_{k-i}) \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}G_k''+\eta G_k'+2\frac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}}U_0F_k''-2kG_k=2\xi_0(k+1)G_{k+1}+$$

$$+2\frac{1-\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}}\sum_{i=1}^k U_iF_{k-i}''$$

Рассмотрим сначала задачу B, когда при $\xi_0>0$ заданы F_0 и G_0. Тогда F_1 и G_1 определяются из (4.2) через F_0, G_0 и их производные; F_k и G_k определяются через F_0, G_0, F_1, G_1, …, F_{k-1}, G_{k-1} и их производные. Поэтому в области сходимости рядов асимптотика решения определяется асимптотикой начального профиля.

Для задачи A $\xi_0=0$ и уравнения (4.2) при $k=0$ совпадают с автомодельными. Их решение имеет вид [5]

$$
\begin{aligned}
&(4.3)\qquad F_0=c_1\eta^{-m}Z-\frac{\beta_0 c_2}{\Pr(\Pr-1)}\eta^{-s}Z_1\\
&G_0=2U_0c_1\eta^{-m}Z+c_2\eta^{-s}Z_1\\
&m=1+2\beta_0(1-U_0),\quad s=2\beta_0U_0,\quad Z_1=\exp(-\Pr\eta^2/2)
\end{aligned}
$$

Решение k-го уравнения можно представить в виде суммы решения однородного уравнения ((4.2) без правых частей) и частного решения. При этом содержащее четыре произвольные постоянные решение однородного уравнения оказывается на $2k$ порядка ниже, чем частное решение, отвечающее члену $\beta_k F_0$. Поэтому и для задачи A асимптотика решения определяется асимптотикой начального профиля. Следовательно, если начальные условия имеют вид

$$
\begin{aligned}
&F(\xi_0,\eta)=c_1\eta^m Z+c_2\eta^s Z_1+c_3\eta^{-\alpha},\quad \alpha>0\\
&G(\xi_0,\eta)=d_1\eta^q Z+d_2\eta^r Z_1+d_3\eta^{-\gamma},\quad \gamma>0
\end{aligned}
$$

то решение уравнений (1.2) можно искать в виде

$$
(4.4)\qquad
\begin{aligned}
&F(\xi,\eta)=F_1(\xi,\eta)Z+F_2(\xi,\eta)Z_1+F_3(\xi,\eta)\\
&G(\xi,\eta)=G_1(\xi,\eta)Z+G_2(\xi,\eta)Z_1+G_3(\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

Функции F_3 и $G_3\to0$ при $\eta\to\infty$. На F_1, G_1, F_2, G_2 такое ограничение не накладывается. Наличие в асимптотике двух экспоненциально убывающих членов объясняется различием в толщине температурного и пограничного слоев при $\Pr\neq1$. Подстановка (4.4)в (1.2) приводит к следующим системам уравнений:

$$
(4.5)\qquad \eta F_1'+2\xi\frac{\partial F_1}{\partial\xi}=\beta(G_1-2F_1),\quad G_1=2UF_1
$$

$$
(4.6)\qquad \Pr(\Pr-1)\eta^2F_2=-\beta G_2,\quad 2\xi\frac{\partial G_2}{\partial\xi}+\eta G_2'=2\frac{\Pr-1}{\Pr}U\eta^2\Pr^2F_2
$$

$$
(4.7)\qquad \eta F_3'+\beta(G_3-2F_3)=2\xi\frac{\partial F_3}{\partial\xi},\quad \eta G_3'+\frac{2(\Pr-1)}{\Pr}UF_3''=2\xi\frac{\partial G_3}{\partial\xi}
$$

Решение уравнений (4.5) отвечает пограничному, а (4.6) — температурному слоям. Уравнения (4.7) описывают развитие невязких возмущений, для которых верен интеграл Бернулли. Характеристики уравнений (4.5) и (4.6) имеют вид $\eta=c\sqrt{\xi}$, а уравнений (4.7) — вид $\eta=c/\sqrt{\xi}$. Последние совпадают с линиями тока. Полученные уравнения легко решаются методом характеристик. Ввиду громоздкости получающихся выражений ограничимся тем, что выпишем решение задачи A

$$F(\xi,\eta)=c_1\eta^{-\delta}ZX_1+c_2\frac{\beta}{\Pr(\Pr-1)}\eta^{-s}Z_1X_2$$

$$G(\xi,\eta)=c_2\eta^{-s}Z_1X_2+2Uc_1\eta^{-\delta}ZX_1$$

$$\delta=1+2\beta_0(1-U_0),\quad s=2\beta_0U_0,\quad X_1=\exp\left(\int_0^\xi\frac{\beta_0U_0-\beta U}{\xi}d\xi\right)$$

$$X_2=\exp\left(\int_0^\xi\frac{\beta_0(1-U_0)-\beta(1-U)}{\xi}d\xi\right)$$

Все результаты предыдущего раздела о влиянии условий склейки на асимптотическое решение и о различии экспоненциально убывающих решений от решения уравнений (4.7) без изменения распространяются на течение сжимаемого газа с $\Pr\neq1$.

В заключение автор благодарит Н. М. Белянина и Ф. А. Слободкину за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 22 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
2. *Hartree D. R.* On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Combridge Philos. Soc., 1937, vol. 33, pt 1, 2.
3. *Cohen C. B., Reshotko E.* Similar solutions for compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. Nat. Advis. Communs Aeronaut., Rept No. 1956.
4. *Башкин В. А.* Расчет уравнений автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя методом квазилинеаризации. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
5. *Белянин Н. М.* Определение величины критерия отрыва трехмерного ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
6. *Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А.* О выборе автомодельного решения в теории пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
7. *Олейник О. А.* Математические задачи теории пограничного слоя. Усп. матем. н., 1968, т. 23, № 3.