

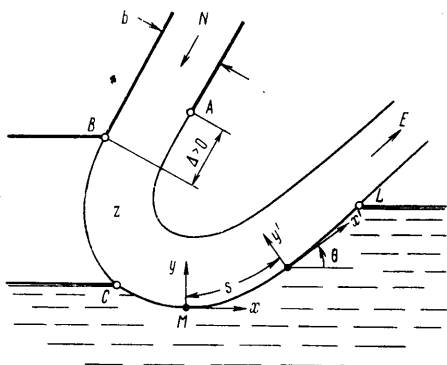
ОБ УРАВНЕНИЯХ И ФОРМАХ ТЕЧЕНИЯ  
ДЛЯ СТРУИ, НАТЕКАЮЩЕЙ НА ЖИДКОСТЬ

Д. С. ЦЕЛЬНИК

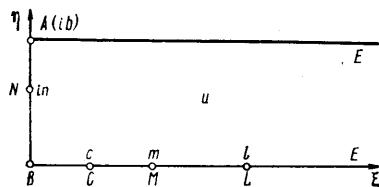
(Москва)

Для тонкой струи вязкой, несжимаемой, невесомой жидкости, натекающей из сопла на поверхность неподвижной тяжелой жидкости, построена нелинейная теория, асимптотически (по толщине струи) более точная, чем теория, приведенная в работе [1]. Изучены формы течения в зависимости от заданных параметров сопла, струи и тяжелой жидкости.

1. Рассмотрим задачу о натекании плоской струи вязкой, несжимаемой, невесомой жидкости плотности  $\rho_1$  из сопла шириной  $b$  на поверхность неподвижной тяжелой жидкости плотности  $\rho_2$  по схеме фиг. 1. Скорости и давления в  $N$ , на  $BC$  и на  $AE$  обозначим соответственно через  $v_\infty$ ,  $p_\infty$ ;  $v_0$ ,  $p_0$  и  $v_1$ ,  $p_1$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть  $w$  — комплексный потенциал,  $v$  — модуль скорости,  $\theta$  — угол вектора скорости с осью  $x$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $u$  — параметрическая комплексная переменная фиг. 2.

Имеем [1]

$$\omega(u) = i \ln \left( \frac{dw}{v_1 dz} \right) = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln V, \quad V = \frac{v}{v_1} \left( V_\infty = \frac{v_\infty}{v_1}, \dots \right)$$

$$\omega(u) = \theta_\infty + \frac{1}{2b} \int_{-i}^{+i} \tau(\varepsilon) \operatorname{cth} \frac{\pi(\varepsilon - u)}{2b} d\varepsilon, \quad \theta_\infty = \theta(N)$$

$$(1.1) \quad \theta(\xi) = \theta_\infty + \frac{1}{2b} \int_{-i}^{+i} \tau(\varepsilon) \operatorname{cth} \frac{\pi(\varepsilon - \xi)}{2b} d\varepsilon$$

$$(1.2) \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_c^l \tau'(\varepsilon) [K(\xi, \varepsilon) - K(m, \varepsilon)] d\varepsilon$$

$$K(\xi, \varepsilon) = \ln \frac{\text{sh}[\pi(\xi + \varepsilon)/2b]}{\text{sh}[\pi|\xi - \varepsilon|/2b]}$$

$$\frac{dz}{du} = V_\infty e^{-\tau+i\theta} f(u), \quad f(u) = \frac{\text{sh}(\pi u/b)}{\text{ch}(\pi u/b) - \cos(\pi n/b)}$$

$$(1.3) \quad \tau'(\varepsilon) = \pi \lambda f(\varepsilon) \sin \theta(\varepsilon) e^{-\tau(\varepsilon)}, \quad (c \leq \varepsilon \leq l)$$

$$\lambda = (bV_\infty^3/\pi)v, \quad v = \rho_2 g / b \rho_1 v_\infty^2$$

В уравнениях задачи имеются пять свободных безразмерных параметров:  $n/b$ ,  $c/b$ ,  $l/b$ ,  $m/b$  и  $\lambda b$ . Распоряжаясь ими, можно подбирать пять безразмерных параметров, например

$$\frac{\Delta}{v}, \quad \frac{y(B) - y(L)}{b}, \quad \theta_\infty, \quad vb^2, \quad \frac{p_\infty - p_1}{\rho_1 v_\infty^2}$$

или с заменой  $[y(B) - y(L)]/b$  на  $(p_0 - p_1)/\rho_1 v_\infty^2$ , определяющих течение в физической плоскости.

2. Асимптотика тонкой струи — это асимптотика  $b \rightarrow 0$  при  $b\rho_1 v_\infty^2 = \text{const}$ ; тогда  $v = O(b^{-1/2})$  и (из интеграла Бернулли)  $\tau = O(b)$ . При  $b \rightarrow 0$  на  $[c, l]$

$$f(\varepsilon) = 1 + O(e^{-\pi c/b}), \quad \frac{bK(\xi, \varepsilon)}{\pi} \approx K^\circ(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} \xi & \text{при } \varepsilon > \xi \\ \varepsilon & \text{при } \varepsilon < \xi \end{cases}$$

Приближение  $f \approx 1$  предполагает, что сопло  $BNA$  расположено достаточно далеко от  $C$ . Приводимое приближение для  $bK(\xi, \varepsilon)$  соответствует течению струи по жидкости достаточно далеко от точек  $C, L$  и предположению о тонкости струи (члены  $o(b)$  отброшены). Последние утверждения следуют из того, что принятое приближение для  $bK(\xi, \varepsilon)$  эквивалентно учету только первого члена разложения ядра (1.1) по производным  $\delta$ -функции ( $-\infty < t = \xi - \varepsilon < +\infty$ )

$$(2.1) \quad \text{cth}(\pi t/2b) = \text{sgn}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+1} \delta^{(2j+1)}(t-0)$$

$$\alpha_{2j+1} = -\frac{(2b)^{2j+2} B_{j+1}}{[(2j+1)!](j+1)} = O(b^{2j+2})$$

Здесь  $B_j$  — числа Бернулли.

В (2.1) слагаемое  $\text{sgn}(t)$  есть асимптотика функции  $\text{cth}(\pi t/2b)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ . При достаточно малых  $b$  приближение  $\text{cth}(\pi t/2b) \approx \text{sgn}(t)$  перестает быть справедливым лишь в малой окрестности нуля. Отклонение  $\text{cth}(\pi t/2b)$  от  $\text{sgn}(t)$  в этой окрестности (в том числе особенность в нуле) учитывается в (2.1) рядом по функциям  $\delta^{(h)}(t-0)$ , каждая конечная линейная комбинация которых сосредоточена в точности в нуле.

Разложение

$$(2.2) \quad f(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \delta^{(h)}(t-0)$$

получается путем записи сначала с неопределенными коэффициентами, затем умножением на каждую из степеней  $t^j$  и интегрированием в пределах  $-\infty < t < +\infty$ . Коэффициенты  $\alpha_h$  выражаются через моменты порядка  $k$  функции  $f(t)$

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) dt$$

Относительно  $f(t)$  достаточно предположить, что как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$   $\lim t^k f(t) = 0$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ), а при  $t=0$  все функции  $t^k f(t)$  интегрируемы по крайней мере в смысле главного значения по Коши.

Сложение двух разложений вида (2.2) или умножение такого разложения на постоянную соответствует обычным правилам вычисления моментов.

Пусть коэффициенты разложения по  $\delta^{(k)}(t-0)$  могут быть вычислены и для  $f(t)$ , и для  $f'(t)$ . Обозначим коэффициент при  $\delta^{(k)}(t-0)$ , соответствующий  $f'(t)$ , через  $\beta_k$ . При  $\beta_0=0$  и  $\beta_k=\alpha_{k-1}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) разложение для  $f'(t)$  совпадает с результатом почленного дифференцирования (2.2) по  $t$ .

Интегрируя (2.2), получаем

$$f_1(t) = \int f(t) dt - \alpha_0 g(t) + \text{const} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} \delta^{(k)}(t-0), \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Последний результат справедлив, если коэффициенты  $\gamma_k$  разложения  $f_1(t)$  по  $\delta^{(k)}(t-0)$  могут быть вычислены и  $\gamma_k = \alpha_{k+1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

После записи разложения (2.1) встает вопрос о его сходимости. В теории обобщенных функций  $f(t)$  о сходимости последовательности  $f_n(t)$  к  $f(t)$  судят по сходимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n \varphi dt \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi dt$$

где  $\varphi$  — любая функция из некоторого пространства  $\{\varphi\}$  так называемых основных функций [2]. Пусть, например, функция  $\varphi(t)$  имеет производные всех порядков по  $t$  на вещественной оси, причем каждая из производных на всей оси  $t$  ограничена. Тогда, вычислив производные по  $b$  от функции  $\Phi(b)$

$$\begin{aligned} \Phi(b) &= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \left\{ \text{cth} \left( \frac{\pi t}{2b} \right) - \text{sgn } t \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \left( \frac{2bt_1}{\pi} \right) \{ \text{cth } t_1 - \text{sgn } t_1 \} dt_1 \end{aligned}$$

при  $b=0$  (с использованием дифференцирования под знаком интеграла) убеждаемся, что ряд, получаемый для  $\Phi(b)$  при помощи (2.1)

$$(2.3) \quad \Phi(b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j+2} \varphi^{(2j+1)}(0) B_{j+1}}{(2j+2)!} b^{2j+1}$$

есть ряд Тейлора для функции  $\Phi(b)$  в окрестности точки  $b=0$ .

Ряд (2.3) будет сходиться по признаку Даламбера при

$$\lim_{(j \rightarrow \infty)} D_j = (b/\pi)^2 \lim_{(j \rightarrow \infty)} \left| \frac{\varphi^{(2j+3)}(0)}{\varphi^{(2j+1)}(0)} \right| = D < 1$$

и расходиться при  $D > 1$ . При доказательстве последнего утверждения использованы соотношения

$$B_j = [2((2j)!)/(2\pi)^{2j}] s_{2j}, \quad s_{2j} \rightarrow 1 \quad (j \rightarrow \infty)$$

Если, например  $\varphi(t) = \sin(\gamma t)$ , то ряд  $\Phi(b)$  будет сходиться при  $-\pi/b < \gamma < \pi/b$  (т. е., если период  $\sin(\gamma t)$  больше четырех ширин полосы фиг. 2) и расходиться при  $|\gamma| > \pi/b$ .

При помощи (2.1) имеем вместо (1.1) при  $l = \infty$

$$(2.4) \quad \theta'(\xi) = -\frac{1}{b} \tau(\xi) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2j+1}}{2b} \tau^{(2j+2)}(\xi)$$

К дифференциальному уравнению (2.4) можно прийти из (1.1) при  $l = \infty$  без использования разложения (2.1), если представить  $\tau(\varepsilon)$  в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $\varepsilon = \xi$  и затем интегрировать этот ряд, умноженный на  $\operatorname{cth}[\pi(\varepsilon - \xi)/2b] - \operatorname{sgn}(\varepsilon - \xi)$ , почленно. Такого рода подход был предложен в [3].

Приведем еще аналогичные (2.1) разложения:

$$\operatorname{sh}^{-1}(\pi t/2b) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+1} (2^{2j+2} - 1) \delta^{(2j+1)}(t-0)$$

$$\operatorname{th}(\pi t/4b) = \operatorname{sgn}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+1} (2 - 2^{2j+2}) \delta^{(2j+1)}(t-0)$$

$$\operatorname{sh}^{-1}(\pi t/2b) = 2 \operatorname{sgn}(t) e^{-1/2\pi|t|/b} + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu-1} \delta^{(2\mu-1)}(t-0)$$

$$c_{2\mu-1} = 4(2^{2\mu}) (b/\pi)^{2\mu} \{1 - (1 - 2^{-2\mu}) s_{2\mu}\}^4$$

$$s_{2\mu} = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2\mu} = \frac{(2\pi)^{2\mu} B_{2\mu}}{\{2\mu\}! 2} \xrightarrow{(\mu \rightarrow \infty)} 1$$

В последнем из этих разложений предварительно выделен один член асимптотики раскладываемой функции на бесконечности.

3. Займемся отысканием асимптотических соотношений, описывающих в приближении  $O(b)$  течение струи на участке контакта ее с тяжелой жидкостью (на  $CL$ ), между соплом и тяжелой жидкостью (на  $BC$ ), а также течение струи из сопла в среду с различными по разные стороны от сопла давлениями  $p_0, p_1$ .

Имеем на  $CL$  (фиг. 1;  $s$  — длина дуги,  $s(C) = -l_1, s(L) = l_2$ )

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = V_{\infty} \cos \theta(\varepsilon) e^{-\tau(\varepsilon)} + \dots, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = V_{\infty} \sin \theta(\varepsilon) e^{-\tau(\varepsilon)} + \dots$$

$$ds = V_{\infty} e^{-\tau(\varepsilon)} d\varepsilon + \dots, \quad x_s' = \cos \theta + \dots, \quad y_s' = \sin \theta + \dots$$

Из (1.2) и (1.3) получаем

$$\theta(\xi) = \frac{1}{b} \int_c^l \tau'(\varepsilon) \{K^0(\xi, \varepsilon) - K^0(m, \varepsilon)\} d\varepsilon + \dots$$

$$(3.1) \quad \tau'(\varepsilon) = b v V_{\infty}^3 \sin \theta(\varepsilon) e^{-3\tau(\varepsilon)} + \dots$$

Из (3.1) находим ( $v' = v V_{\infty}^3$ )

$$\theta'(\xi) = v' \int_{\xi}^l \sin \theta(\varepsilon) e^{-3\tau(\varepsilon)} d\varepsilon + \dots, \quad \theta'(l) = 0$$

$$\theta''(\xi) + v' \sin \theta(\xi) e^{-3\tau(\xi)} + \dots = 0$$

Имеем по (2.4)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tau(\xi) &= -b\theta'(\xi) + \dots \\ \theta''(\xi) + v' \sin \theta(\xi) e^{3b\theta'(\xi)} + \dots &= 0 \\ s_\xi' &= V_\infty e^{-\tau} + \dots = V_\infty e^{b\theta_\xi'} + \dots \\ \theta_{ss}'' V_\infty^2 e^{2b\theta_\xi'} + \theta_s' b \theta_{\xi\xi}'' V_\infty e^{b\theta_\xi'} + \gamma' \sin(\theta) e^{3b\theta_\xi'} + \dots &= 0 \\ \theta_{ss}'' V_\infty^2 e^{2b\theta_\xi'} + v' e^{3b\theta_\xi'} \sin(\theta) \{1 - V_\infty \theta_s' b e^{b\theta'(\xi)}\} + \dots &= 0 \end{aligned}$$

Так как

$$e^{b\theta_\xi'} = 1 + b\theta_\xi' + \dots = 1 + V_\infty e^{b\theta_\xi'} \theta_s' b + \dots$$

то с точностью  $O(b)$  получим

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \theta_{ss}'' + v_1 \sin \theta &= 0, \quad v_1 = vV_\infty \\ \theta_s' + v_1 [y - y(L)] &= 0 \end{aligned}$$

Элемент тонкой струи движется по  $CL$  как материальная точка со скоростью  $(v_\infty v_1)^{1/2}$ . Из (3.3) получаем

$$\begin{aligned} \sin(\theta/2) &= k \operatorname{sn}(\sqrt{v_1} s), \quad \cos(\theta/2) = \operatorname{dn}(\sqrt{v_1} s) \\ \theta_s'(s=l_2) &= 2k\sqrt{v_1} \operatorname{cn}(\sqrt{v_1} s)|_{s=l_2} = 0, \quad \sqrt{v_1} = K/l_2 \end{aligned}$$

Другие значения  $v_1$  не рассматриваются, так как они дают течения с усложненной формой участка контакта  $CL$ . На  $CL$

$$\begin{aligned} x &= (2/\sqrt{v_1}) E \{ \operatorname{am}(\sqrt{v_1} s) - s \}, \quad y = (2k/\sqrt{v_1}) \{ 1 - \operatorname{cn}(\sqrt{v_1} s) \} \\ x(L) &= l_2 [2(E/K) - 1], \quad y(L) = 2k/\sqrt{v_1} \\ \theta_1 &= \theta(C) - 2 \operatorname{arc} \sin \{ k \operatorname{sn}(-\sqrt{v_1} l_1) \}, \quad \theta_2 = \theta(L) = 2\theta^\circ \\ v(s) &= v_1 \{ 1 - 4k\sqrt{v_1} b V_\infty^{3/2} \operatorname{cn}(\sqrt{v_1} s) + \dots \}^{1/2}. \end{aligned}$$

В приведенных выше формулах  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  — эллиптические функции Якоби,  $\operatorname{am}$  — амплитуда,  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы (первого и второго рода),  $k = \sin \theta^\circ$  — модуль,  $\theta^\circ$  — модулярный угол.

Условие  $v(M) > 0$  дает ( $b \rightarrow 0$ )

$$(3.4) \quad 1/vb^2 > 4k^2 = 4 \sin^2(\theta_2/2)$$

Невыполнение (3.4) означает неприменимость соответствующего приближения теории тонкой струи в окрестности точки  $M$ , однако оно может и сигнализировать об отсутствии решений плоской задачи о течении по схеме фиг. 1 (иначе: струя после удара о жидкость может раздваиваться и растекаться по жидкости в обе стороны).

Линия тока  $BC$  за исключением окрестности сопла и точки  $C$  в приближении  $O(b)$  является дугой окружности радиуса  $R_0$  ( $-K \leq -\sqrt{v_1} l_1 \leq 0$ )

$$(3.5) \quad R_0 = \{ 2k\sqrt{v_1} \operatorname{cn}(\sqrt{v_1} l_1) \}^{-1} = \frac{b\rho_1 v_\infty^2}{\rho_0 - \rho_1} \frac{1}{V_\infty}$$

При  $b \rightarrow 0$  ( $\xi + i\eta = u$ ;  $c \leq \xi \leq l$ )

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \eta) &= \theta_\infty - \frac{1}{2b} \left[ \int_{-i}^{\xi} \tau(\varepsilon) d\varepsilon - \int_{\xi}^l \tau(\varepsilon) d\varepsilon \right] + \dots \\ \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -\frac{\tau(\xi, 0)}{b} + \dots = \frac{\partial \tau(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \quad V(s, y') = [V(s, 0)]^{1-(v'/b)} \end{aligned}$$

Ширина тонкой струи равна  $b+O(b^2)$ .

При  $\xi \rightarrow c$  положим  $\theta(\xi) = \theta_0(\xi) + \delta\theta(\xi)$ , где  $\theta_0(\xi)$  определяется приближением  $\operatorname{sgn} t$  в (2.1). Имеем

$$\begin{aligned} \delta\theta(\xi) &= \frac{1}{2b} \int_{-l}^{+l} \tau(\varepsilon) \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi(\varepsilon-\xi)}{2b} - \operatorname{sgn}(\varepsilon-\xi) \right\} d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{2b} \int_c^l [\tau(\varepsilon) - \tau(c)] \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi(\varepsilon-\xi)}{2b} - \operatorname{sgn}(\varepsilon-\xi) \right\} d\varepsilon + \dots \end{aligned}$$

Пологая здесь  $\tau(\varepsilon) - \tau(c) \approx \tau'(c)(\varepsilon - c) + \tau'(c)(\xi - c)$ ,  $l = \infty$ , получаем

$$\delta\theta(\xi) = \frac{\tau'(c)}{2b} (\xi - c) \left\{ |\xi - c| - \frac{2b}{\pi} \ln \left[ 2 \operatorname{sh} \frac{\pi|\xi - c|}{2b} \right] \right\} + \dots$$

( $\xi \rightarrow c$ )

Слагаемое  $\delta\theta(\xi \rightarrow c)$  дает вклад в геометрию потока ( $z$ ) порядка  $o(b)$ , результаты для  $\xi \approx l$  аналогичны.

Пусть  $\Delta \geq 0$ . Имеем, интегрируя по  $BC$  ( $v/v_\infty = U$ ;  $v_0/v_\infty = U_0, \dots$ )

$$\delta\{z(B) - z(C)\} \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx -U_0^{-1} e^{i\theta_\infty} \int_0^\infty [f(\varepsilon) - 1] d\varepsilon \approx \\ &\approx (b/\pi) e^{i\theta_\infty} \ln \{4 \sin^2(n\pi/2b)\} \end{aligned}$$

С учетом  $\pi\Delta/2b = \ln \operatorname{tg}(n\pi/2b)$  [4] получаем

$$(3.6) \quad \delta\{z(B) - z(C)\} = - (b/\pi) e^{i\theta_\infty} \ln^{1/4}(1 + e^{-\pi\Delta/b}) + \dots$$

( $\Delta \geq 0$ )

Выражение (3.6) дает смещение точки  $B$  от ее положения на окружности радиуса  $R_0$ . При  $\Delta \leq 0$ , интегрируя по  $AE$ , получаем, что смещение точки  $A$  от ее положения на окружности радиуса  $(R_0 - b)$  дается (3.6) с заменой  $\Delta$  на  $(-\Delta)$ .

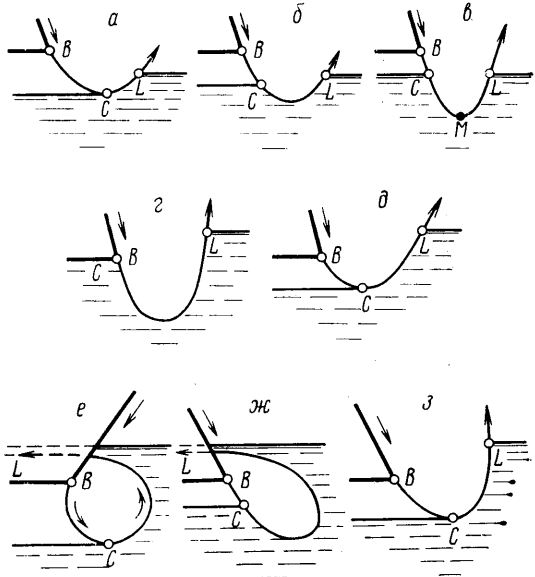
Имеем при  $b \rightarrow 0$  [5]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{b} &= \frac{2}{\pi U_0} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{n\pi}{2b} \right) - \left\{ \frac{2}{\pi U_0} \frac{\tau(c)}{b} \ln \left[ 2 \cos \left( \frac{n\pi}{2b} \right) \right] \right\} b + \dots \\ \frac{n\pi}{2b} &= \frac{\pi}{2} \frac{\ln U_0}{\ln V_0} + \dots, \quad \frac{1}{U_0} \approx 1 - \frac{n}{b} \tau(c) \end{aligned}$$

Получаем с точностью  $O(b)$

$$(3.7) \quad e^{\pi\Delta/2b} = (\operatorname{tg} G)^{1 - \ln U_0 / (2 \cos G) \ln V_0}, \quad G = \frac{\pi}{2} \frac{\ln U_0}{\ln V_0}$$

4. Покажем теперь, как, пользуясь полученными выше асимптотическими соотношениями, рассчитать картину течения.



Фиг. 3

Обозначим  $h_0 = y(B) - y(L)$  при  $\Delta > 0$  и  $h_0 = y(B') - y(L)$  при  $\Delta < 0$  ( $B'$  — ортогональная проекция точки  $A$  на  $NB$ ). Имеем

$$(4.1) \quad \begin{aligned} h_0' &= h_0 + (b/\pi) \sin(\theta_\infty) \ln \frac{1}{4} (1 + e^{-\pi|\Delta|/b}) \\ h_0' &= R_0 [\cos \theta_1 - \cos \theta_\infty] + y(C) - y(L) \end{aligned}$$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} h_0' &= \frac{b\rho_1 v_\infty^2}{\rho_0 - \rho_1} \frac{1}{V_\infty} [\cos \theta_1 - \cos \theta_\infty] - \frac{p_0 - p_1}{\rho_2 g} \\ h_0' &= \frac{2[\cos \theta_1 - \cos \theta_\infty]}{b} \frac{1}{U_1 - U_0 V_0} - \frac{1}{2\nu b^2} \{U_1^2 - U_0^2\} \end{aligned}$$

Пусть фиксированы величины:  $\Delta/b$ ,  $h_0/b$ ,  $\theta_\infty$ ,  $\nu b^2$  и  $\theta_1$ . По (3.7) и (4.2), если решение этой системы уравнений для принятой совокупности значений  $\Delta/b$ ,  $h_0/b$ , ... существует, можно построить течение на  $BC$ .

Подставим в (4.1) выражения  $R_0$ ,  $\cos \theta_1$ ,  $y(C)$ ,  $y(L)$  через эллиптические функции; получим

$$(4.3) \quad \operatorname{cn}^2(\sqrt{\nu} l_1) + (\sqrt{\nu} h_0' / k) \operatorname{cn}(\sqrt{\nu} l_1) + \{1 - k^{-2} \sin^2(\theta_\infty/2)\} = 0$$

Отсюда, в силу (3.5) и (4.1)

$$k^2 = \sin^2(\theta_\infty/2) - (4\nu_1 R_0^2)^{-1} - (h_0'/2R_0) = \sin^2(\theta_1/2) + (4\nu_1 R_0^2)^{-1}$$

Для примера течения

$$\Delta/b = 0, \quad h_0/b = 5/3, \quad \theta_\infty = -135^\circ, \quad \nu b^2 = 0.1139, \quad \theta_1 = 0$$

расчет дал следующие результаты

$$\frac{x(L) - x(C)}{b} = 3.96, \quad \frac{y(L) - y(C)}{b} = 3.46, \quad \frac{p_\infty - p_1}{\rho_1 v_\infty^2} = 0.249$$

$$U_0 = 0.842, \quad U_1 = 1.224, \quad R_0/b = 3.1, \quad \theta_2 \approx 64^\circ$$

Давление  $p_\infty$  находится по интегралу Бернулли. Ограничиваясь случаем  $\Delta/b = 0$ , когда  $v_\infty^2 \approx v_0 v_1$  [9], получаем

$$\begin{aligned} \xi &= b(p_0 - p_1)/b\rho_1 v_\infty^2, & (p_\infty - p_1)/\rho_1 v_\infty^2 &= 1/2[\xi - 1 + \sqrt{1 + \xi^2}] \\ p_\infty - p_1 &\approx 1/2(p_0 - p_1) & (\text{при } b \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Исследование первого отброшенного в (3.2) слагаемого, равного  $1/3 b^2 \tau''(\xi)$ , в случае  $\theta_1 = 0$  приводит к выводу о лучшей применимости теории тонкой струи при  $\Delta < 0$ .

5. В приближении  $O(1)$  ( $\nu_1 \approx \nu$ ,  $h_0' \approx h_0$ ) изучим возможные картины течений для случаев, когда солено установлено выше, ниже или на уровне тяжелой жидкости ( $h_0 > 0$ ,  $h_0 < 0$ ,  $h_0 = 0$ ).

Имеем по (4.3)

$$(5.1) \quad \operatorname{cn}(\sqrt{\nu} l_1) = -(\sqrt{\nu} h_0/2k) + \{k^{-2} [1/4 \nu h_0^2 + \sin^2(\theta_\infty/2)] - 1\}^{1/2}$$

$$(5.2) \quad k = -1/4 \sqrt{\nu} h_0 + \{1/16 \nu h_0^2 + 1/2 \sin^2(\theta_\infty/2)\}^{1/2} \quad (\theta_1 = 0)$$

Фиксируем величины  $\Delta/b$ ,  $h_0/b$ ,  $\theta_\infty$  и  $\nu b^2$ . Пусть  $h_0 > 0$ . При  $\theta_1 = 0$  неравенство (3.4) можно привести к виду

$$(5.3) \quad 1/\nu b^2 > 2 \sin^2(\theta_\infty/2) - (h_0/b)$$

Если выполнено (5.3), то течение с  $\theta_1 = 0$  (фиг. 3, а) может быть построено, при этом  $\theta_2 < 90^\circ$ . При  $\theta_2 = -\theta_\infty$  получаем течение по фиг. 3, в. Неравенство (3.4) для этого случая записывается в виде

$$(5.4) \quad 1/\nu b^2 > 4 \sin^2(\theta_\infty/2)$$

Промежуточные между фиг. 3, а и 3, в течения — по типу фиг. 3, б, если для каждого из них выполнено (3.4), также могут быть построены. Из выполнения (5.4) следует выполнение (5.3); обратное в общем случае неверно. Поэтому иногда возможно построить течения по фиг. 3, а и 3, б, вплоть до некоторого  $\theta_{1*}$  ( $\theta_\infty < \theta_{1*} \leq 0$ ), но невозможно при  $\theta_1 < \theta_{1*}$  (в частности, по фиг. 3, в).

При  $\Delta \neq +\infty$  и одних и тех же значениях  $b, \Delta/b, h_0/b, \theta_\infty, vb^2$  течения по фиг. 3, а-в отличаются одно от другого величинами  $p_\infty - p_1$ . Для фиг. 3, в  $p_\infty = p_0 = p_1$ . Ограничиваясь  $\Delta = 0$ , видим, что с ростом  $y(L) - y(C)$  давление  $p_\infty - p_1$  растет, для течения с  $\theta_1 = 0$  (фиг. 3, а) оно максимальное. Наименьший угол  $\theta_2$  отвечает  $\theta_1 = 0$ , наибольший - фиг. 3, в.

Если  $\theta_\infty < -90^\circ$ , то струя может, заворачивая, пересекать линию установки сопла [1]. Эксперименты [7] (воздух натекает на воду) показывают, что при этом между струей и соплом создается зона повышенного давления  $p_2 (p_1 < p_2 < p_0)$ . (Изменения в формулах тонкой струи при  $p_2 \neq p_1$  очевидны. Например,  $v_1$  заменится на  $v_2 = v \times (v_\infty/v_2)$ , где  $v_2$  - скорость при давлении  $p_2$ ; в общем случае будет  $\theta'(L_2) \neq 0$ , и т. д.)

Если (фиг. 1)  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \theta_\infty + \pi$ , то

$$(5.5) \quad (\sqrt{v} h_0)_* = \frac{3 \sin^2(\theta_\infty/2) - 2}{\cos(\theta_\infty/2)} \quad ((\sqrt{v} h_0)_* = 0 \text{ при } \theta_\infty = -109^\circ)$$

С ростом  $\sqrt{v} h_0$  угол  $\theta_2$  (при  $\theta_1 = 0$ ) падает. При  $\sqrt{v} h_0 < (\sqrt{v} h_0)_*$  струя будет, заворачивая, пересекать линию сопла и течение - перестраиваться. Если  $\sqrt{v} h_0 > (\sqrt{v} h_0)_*$  (в частности, при  $\theta_\infty \geq -109^\circ$ ), то течения со струей, не пересекающей линию сопла, становятся возможными. При  $\theta_\infty > -90^\circ$  струя линию сопла пересекать не должна. В экспериментах [7] при  $\theta_\infty = -135^\circ, h_0 > 0$  увеличение  $b\rho_1 v_\infty^2$  (при прочих равных условиях) сверх некоторого значения приводит к пересечению струей сопла и перестройке течения. С излагаемой теорией этот факт согласуется.

Пусть  $h_0 = 0$ . При  $-90^\circ < \theta_\infty < 0$  струя не пересекает линию сопла. Для  $-109^\circ < \theta_\infty < -90^\circ$  возможны течения со струей, как не пересекающей, так и пересекающей линию сопла. При  $\theta_\infty < -109^\circ$  струя должна пересечь линию сопла и течение - перестроиться. В экспериментах [7]  $\theta_\infty = -135^\circ$  и графики давления ясно обнаруживают при  $h_0 = 0$  перестройку течения с образованием между струей и соплом зоны повышенного давления  $p_2$ .

Пусть  $h_0 < 0$ . Введем ограничение

$$(5.6) \quad H = 1/4 v h_0^2 + \sin^2(\theta_\infty/2) < 1$$

Если  $k^2 = H$ , то по (5.1)

$$\operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1) = -(\sqrt{v} h_0/2k) < 1, \quad y(L) - y(C) = -h_0, \quad \sin(\theta_1/2) = \sin(\theta_\infty/2)$$

Схема течения изображена на фиг. 3, г. (Вопрос о пересечении струей линии сопла разбирается отдельно, в этом отношении часть схем фиг. 3 условна.) Неравенство (3.4) записывается так:

$$H < (4vb^2)^{-1}.$$

Значению  $k$  (5.2) отвечает  $\theta_1 = 0$  (фиг. 3, д). Неравенство (3.4) при этом записывается в виде

$$1/vb^2 > 2 \sin^2(\theta_\infty/2) + |h_0/b|$$

Можно построить (если выполнено (3.4)) все промежуточные между фиг. 3, г и 3, д течения. При этом угол  $\theta_2$  наибольший для схемы фиг. 3, г. При переходе от фиг. 3, д к фиг. 3, г соответствующие значения  $k$  растут. Если  $\theta_2 = \theta_\infty + \pi$ , то  $1/4 v h_0^2 = \cos^2 \theta_\infty$ . При  $-90^\circ < \theta_\infty < 0$  равенство  $\theta_2 = \theta_\infty + \pi$  не противоречит этому условию. Если же  $\theta_\infty < -90^\circ$ , то  $\theta_2 = \theta_\infty + \pi$  невозможно. С ростом  $v h_0^2$  величина  $H$  растет. При  $1/4 v h_0^2 < \cos^2 \theta_\infty$  возможны только течения со струей, не пересекающей линию сопла.

Пусть теперь  $H \geq 1$ . Положим  $k = 1, \operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1) = 1, \theta_1 = 0$  и

$$(5.7) \quad H = 1 + 1/4 \sin^4(\theta_\infty/2)$$

При выполнении (5.7) никакое  $k \neq 1$  невозможно (ибо  $\operatorname{cn} \leq 1$ ); угол  $\theta_1 = 0$  при этом - единственно возможный (фиг. 3, е;  $x(L) = -\infty$ ). Ограничение (3.4) записывается здесь в виде  $1/vb^2 > 4$ . Для  $v h_0^2$  в (5.1) невозможны значения большие, чем соответствующие (5.7) (в противном случае по (5.1) будет  $\operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1) > 1$ ). Течения, получающиеся при значениях параметра  $v h_0^2$ , близких к максимально возможному (по (5.7)), должны перестраиваться. Не исключено, что существует ограничение на  $v h_0^2$  и для перестроенного течения.

Если  $H \geq 1$  и значение  $v h_0^2$  меньше, чем соответствующее (5.7), тогда при  $k = 1$  имеем  $\operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1) < 1, \theta_1 < 0$  и из (5.1)  $\operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1) \geq -1/2 \sqrt{v} h_0 \geq \cos(\theta_\infty/2), \operatorname{sn}(\sqrt{v} l_1) \leq \sin|\theta_\infty/2|, |\theta_1| \leq |\theta_\infty|$ . Строгое неравенство  $H > 1$  дает  $|\theta_1| < |\theta_\infty|$  (фиг. 3, ж). С уменьшением  $k$  значение  $\operatorname{cn}(\sqrt{v} l_1)$  по (5.1) растет, минимально допустимое  $k$  (5.2) дает  $\theta_1 = 0$  и минимальное  $\theta_2$  (фиг. 3, з). Если выполнено неравенство (3.4), то можно построить все



течения, промежуточные между фиг. 3, ж и фиг. 3, з. Течения с  $y(C)=y(B)$  в рассматриваемом случае, если исключить равенство  $H=1$ , невозможны. Ограничиваясь  $\Delta=0$ , убеждаемся, что при равных  $b$ ,  $\Delta/b$ ,  $h_0/b$ ,  $\theta_\infty$  и  $vb^2$  наибольшее значение  $p_\infty-p_1$  отвечает  $\theta_1=0$  (фиг. 3, з).

Если  $h_0 < 0$ ,  $\theta_1=0$  и  $\theta_2=\theta_\infty+\pi$ , то, как и при  $h_0 > 0$ , должно быть выполнено (5.5). С ростом  $|\sqrt{v}h_0|$  величины  $k$  (5.2) и  $\theta_2$  растут, поэтому при

$$(5.8) \quad \sqrt{v}h_0 < (\sqrt{v}h_0)_*$$

струя пересечет линию сопла и течение перестроится. При  $\theta_\infty < -109^\circ$  струя пересечет линию сопла, если же  $\theta_\infty > -109^\circ$ , то при выполнении неравенства, обратного (5.8), возможны и течения со струей, не пересекающей линию сопла. При  $\theta_\infty = -135^\circ$  [7] струя должна (если  $h_0 < 0$ ) пересекать линию сопла и течение — перестраиваться; экспериментами [7] это подтверждается.

Если фиксирована не относительная высота установки сопла  $h_0/b$ , а безразмерная разность давлений  $(p_0-p_1)/\rho_2gb$ , и величина  $1/vb^2$  лишь несколько больше, чем  $1/v_*b^2 = \{(p_0-p_1)/2\rho_2gb\}^2$ , то возможные углы  $\theta_2$  близки к  $180^\circ$  [1] и течение должно перестраиваться. Для перестроенного течения

$$y(L) - y(C) = \frac{p_0 - p_1}{\rho_2 g} = \frac{2k}{\sqrt{v}} \{-\operatorname{cn}(\sqrt{v}l_2) + \operatorname{cn}(\sqrt{v}l_1)\}$$

$$1/vb^2 > \{(p_0 - p_1)/4\rho_2gb\}^2 = 1/v_*b^2$$

Последнее означает, что существует некоторое критическое значение  $1/v_*b^2$ , ниже которого течение по перестроенной схеме осуществляться не может. Течения по фиг. 1 без перестройки возможны лишь при

$$1/vb^2 \geq (1/v_*b^2) \cos^{-2}(\theta_\infty/2)$$

Поступила 24 II 1976.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цельник Д. С. Нелинейная задача о тонкой струе, натекающей на поверхность тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
3. Якимов Ю. Л. О неустановившихся движениях несжимаемой жидкости в узких областях. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 6.
4. Цельник Д. С. К задаче о струе, натекающей на поверхность тяжелой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
5. Цельник Д. С. Приближенная теория струйной завесы для случая сопла с удлиненной внешней стенкой. Вопросы прикладной математики и механики, вып. 4. Чебоксары, Чувашск. ун-т, 1975.
6. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке. М., Машгиз, 1963.
7. Jaumotte A., Kiedrzyński A., Spehl P., Waterkeyn P. Cushion mechanics of a peripheral jet ACV in hovering flight over water. Hover. Craft and Hydrofoil, 1972, vol. 11, No. 7.