

3. Cohen C. B., Reshotko E. The compressible laminar boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., Rept No. 1294, 1956.
4. Murch C. K., Broadwell J. E., Silver A. H., Marcisz T. J. Low-thrust nozzle performance. AIAA paper, 1968, No. 68-91.
5. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969.
6. Smetana F. O. Convergent-divergent nozzle discharge characteristics in the transition Regime between free molecule and continuum flow. ASME paper, 1963, No. 63-WA-94.
7. Дейч М. Е. Техническая газодинамика. М., «Энергия», 1974.

УДК 532.526.2 : 536.24

ЛАМИНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОКРЕСТНОСТИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ

А. Б. ЛЕСИН

(Москва)

Рассматривается ламинарный пограничный слой на преграде в окрестности точки торможения пространственного несжимаемого потенциального потока, несимметричного относительно этой точки (например, при наклонном падении струи на преграду). Влияние сжимаемости исследуется на примере плоского дозвукового течения. Решение в малой окрестности точки торможения получено разложением в ряды по продольной координате, а для большой окрестности — методом локального подобия. Показано, что в этом случае в отличие от симметричного течения ^[1, 2] максимум теплового потока не совпадает с точкой торможения.

1. Будем рассматривать пространственное течение, симметричное относительно некоторой плоскости, например наклонное падение на плоскость осесимметричной струи. Пусть U_∞ — скорость потока до взаимодействия с преградой, q_0 — тепловой поток в точке торможения, d — некоторый характерный размер (ширина струи или радиус кривизны тела), xd, yd, zd — декартова система координат, ось z которой направлена перпендикулярно плоскости симметрии, ось x — вдоль стенки, а ось y — по нормали к ней, $uU_\infty, vU_\infty, wU_\infty$ — составляющие скорости, $q q_0$ — тепловой поток на преграде, ρ — плотность, p — давление, Pr — число Прандтля, M — число Маха, γ — показатель адиабаты, HN_e — энтальпия торможения. Индекс e отвечает параметрам на внешней границе пограничного слоя, индексы w, ∞ — соответственно параметрам на стенке и в невозмущенном потоке, индексы 0, 1 — параметрам заторможенного вязкого и невязкого течений, а индекс 2 — параметрам в точке максимума теплового потока.

Разложим компоненты скорости невязкого течения в степенной ряд и отбросим члены третьего порядка

$$(1.1) \quad u_e = ax + cx^2, \quad w_e = atz, \quad v_e = by - 2cxy.$$

Здесь опущены квадратичные по y члены, так как это разложение рассматривается только на границе пограничного слоя, квадратом толщины которого пренебрегаем. Разложение (1.1) удовлетворяет условию потенциальности течения и его симметричности по z и условию непротекания на преграде. Уравнение неразрывности выполняется при

$$(1.2) \quad a(1+m) + b = 0$$

Коэффициент разложения a равен градиенту скорости в точке торможения в плоскости симметрии, отношение c/a характеризует степень несимметричности течения, а параметр m — пространственные свойства потока (например, в осесимметричном течении $m=1$, а в плоском $m=0$).

Рассмотрим теперь пограничный слой в окрестности точки торможения. Компоненты скорости можно представить в виде, удовлетворяющем уравнению неразрывности

$$(1.3) \quad u = ax\varphi'(\eta) + cx^2g'(\eta), \quad w = atz\psi'(\eta)$$

$$v = -\sqrt{\frac{a}{\text{Re}}}(\varphi + m\psi) - \frac{2cx}{\sqrt{a\text{Re}}}g, \quad \text{Re} = \frac{U_\infty d \rho_1}{\mu_1}$$

Здесь $\eta = \sqrt{a \text{Re}} y$, а функции φ, ψ, g должны удовлетворять условиям, полученным из гладкого сопряжения пограничного слоя с невязким течением и из прилипа-

ния на преграде

$$(1.4) \quad \varphi = \varphi' = \psi = \psi' = g = g' = 0 \quad (\eta = 0) \quad \varphi', \psi', g' \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Подставим (1.1), (1.3) в уравнения ламинарного пограничного слоя

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= w_e \frac{dw_e}{dz} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x и z , получаем

$$(1.6) \quad \varphi''' + (\varphi + m\psi)\varphi'' + 1 - \varphi'^2 = 0, \quad \psi''' + (\varphi + m\psi)\psi'' + m(1 - \psi'^2) = 0$$

$$(1.7) \quad g''' + (\varphi + m\psi)g'' + 2g\varphi'' + 3\varphi'g' = 0$$

Решение уравнений (1.6), описывающих симметричное в двух плоскостях течение, было получено в [3] для $0 \leq m \leq 1$ (поток набегаёт на выпуклое тело), а для $-1 \leq m \leq 0$ (поток набегаёт на седлообразное тело) решение было получено в [4]. Рассмотрим теперь теплопередачу в окрестности точки торможения. Энтальпию и тепловой поток, учитывая симметрию по z , можно представить в виде

$$(1.8) \quad H = H_w + (1 - H_w) \left[\theta_0(\eta) + \frac{2c}{a} x \theta_2(\eta) \right],$$

$$q = 1 + \frac{2c}{a} x \frac{\theta_2'(0)}{\theta_0'(0)} = 1 + \frac{2c}{a} x \beta$$

Подставим (1.8) и (1.3) в уравнение энергии

$$(1.9) \quad u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr Re}} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$(1.10) \quad \theta_0'' + \text{Pr}(\varphi + m\psi)\theta_0' = 0, \quad \frac{1}{\text{Pr}} \theta_2'' + (\varphi + m\psi)\theta_2' - \varphi'\theta_2 = -g\theta_0'$$

Энтальпия торможения должна удовлетворять граничным условиям

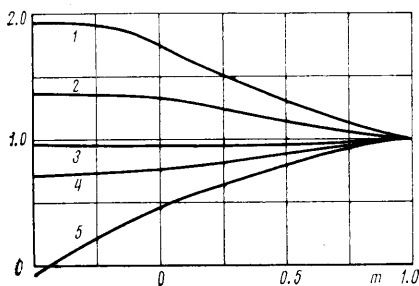
$$(1.11) \quad \theta_0 = \theta_2 = 0 \quad (\eta = 0), \quad \theta_0 \rightarrow 1, \quad \theta_2 \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Уравнения (1.7), (1.10) были решены в [5] при $m=0$. Результаты численного расчета при других m и $\text{Pr}=0.7$ представлены на фиг. 1 (градиенты напряжения трения на стенке $\varphi''(0)$ и $\psi''(0)$ — соответственно линии 3 и 5, тепловой поток в точке торможения $\theta_0'(0)$ — линия 4, его градиент вдоль преграды ($\theta_2'(0)$) — линия 2, а параметр $\beta = \theta_2'(0)/\theta_0'(0)$, определяющий совместно с отношением $2c/a$ степень несимметричности теплового потока, — линия 1). Здесь все функции отнесены к их значениям при $m=1$: $\varphi''(0) = \psi''(0) = 1.312$, $\theta_0'(0) = 0.665$, $\theta_2'(0) = 0.140$, $\beta = 0.21$. Функция $g(\eta)$ оказалась слабо зависящей от m и $g''(0) \approx 2.40$. Из фиг. 1 видно, что, хотя с увеличением m параметр β несколько уменьшается, максимум теплового потока должен сместиться из точки торможения на некоторое расстояние при $c \neq 0$. Эксперименты [6] позволяют получить оценку параметра несимметричности $2c/a$ для осесимметричной струи, наклонно падающей на бесконечную пластину. Например, при наклоне 60° $c/a \sim 1$. Точное значение констант разложения в каждом случае надо определять или из эксперимента, или из полного решения задачи о взаимодействии потока с преградой.

Было исследовано влияние Pr на теплопередачу в диапазоне $0.5 \leq \text{Pr} \leq 1.1$. Как и следовало ожидать, θ_0 и θ_2 изменяются пропорционально $\text{Pr}^{1/2}$ (погрешность $\pm 3\%$).

Приведенная на фиг. 1 зависимость $\psi''(0)$ от m , взятая из работы [4], показывает, что при $m < -0.43$ наступает отрыв пограничного слоя и появляется зона возвратных течений вдоль оси z . При $m \rightarrow -1$ толщина вытеснения $\delta \rightarrow \infty$ и теория пограничного слоя неприменима, однако для $m > -0.5$ толщина отрывной зоны мала и, следовательно, можно применять уравнения пограничного слоя.

2. Рассмотрим теперь плоское дозвуковое течение, несимметричное относительно точки торможения. В разложении (1.1) тогда будет $m=0$ и $b=-a$. Будем рассматри-



Фиг. 1

вать случай линейной зависимости вязкости от температуры. Уравнения неразрывности, движения и энергии в переменных Дородницына [7] примут вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial X} + V \frac{\partial u}{\partial Y} &= H u_e \frac{du_e}{dX} + \frac{\mu_1}{U_\infty \rho_1 d} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \\ u \frac{\partial H}{\partial X} + V \frac{\partial H}{\partial Y} &= \frac{\mu_1}{U_\infty \rho_1 d \text{Pr}} \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} \\ X &= \int_0^x \frac{p_e}{p_1} dx, \quad Y = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_1} dy, \quad V = \frac{p_1}{p_e} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} u + \frac{\rho}{\rho_1} v \right) \end{aligned}$$

Так как в разложении энтальпии сохраняются только линейные члены, то в уравнении энергии опущены диссипативные члены, а в правой части уравнения движения в первом члене энтальпия заменена на энтальпию торможения. В окрестности точки торможения $X=x+O(x^3)$, поэтому

$$(2.2) \quad u_e = aX + cX^2$$

Граничные условия для системы (2.1)

$$(2.3) \quad u = V = 0, \quad H = H_w \quad (Y=0), \quad u \rightarrow u_e(X), \quad H \rightarrow 1 \quad (Y \rightarrow \infty)$$

При отсутствии теплообмена $H=1$ и система (2.1) будет аналогична системе уравнений для несжимаемой струи [5]. В общем случае решение будем искать в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u &= aXf'(\eta) + cX^2g'(\eta), \quad V = -\sqrt{\frac{a}{\text{Re}}}f(\eta) - \frac{2c}{\sqrt{a}\text{Re}}Xg(\eta) \\ H &= \theta(\eta) + \frac{2c}{a}X\theta_1(\eta), \quad \text{Re} = \frac{U_\infty \rho_1 d}{\mu_1}, \quad \eta = \sqrt{a}\text{Re}Y \end{aligned}$$

Второй член в разложении энтальпии связан с несимметричностью течения. Подставив (2.4) в (2.1)–(2.3), получаем

$$(2.5) \quad \begin{aligned} f''' + ff'' - f'^2 &= -\theta, \quad \theta'' + \text{Pr} f\theta' = 0 \\ f = f' = 0, \quad \theta = H_w \quad (\eta=0), \quad \theta, f' \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty) \\ g''' + fg'' - 3f'g' + 2f''g &= -3\theta - 2\theta_1 \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \theta_1'' + f\theta_1' - f\theta_1 &= -g\theta' \\ g = g' = \theta_1 = 0 \quad (\eta=0), \quad \theta_1 \rightarrow 0, \quad g' \rightarrow 1 \quad (\eta \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Система (2.5) соответствует симметричному течению в окрестности точки торможения, и решение ее известно [8]. Система уравнений (2.6) решена численно, и результаты для $\text{Pr}=1$ приведены ниже.

H_w	$f''(0)$	$\theta'(0)$	$g''(0)$	$\theta_1'(0)$
2.0	1.737	-0.616	3.455	-0.224
0.6	1.012	0.219	1.930	0.081
0.2	0.775	0.417	1.425	0.148
0	0.647	0.506	1.149	0.174

Отметим, что отношение $\theta_1'(0)/\theta'(0)$ практически не зависит от сжимаемости и приблизительно равно 0.36.

Для теплового потока получаем

$$(2.7) \quad q = 1 + \frac{2c}{a} x \frac{\theta_1'(0)}{\theta'(0)} \approx 1 + 0.72 \frac{c}{a} x$$

Следовательно, максимум теплового потока не находится в точке торможения. Исследуем теперь теплопередачу от потенциальной дозвуковой струи, набегающей под углом α на бесконечную пластину (фиг. 2). Для несжимаемой потенциаль-

ной струи из точного решения динамической задачи [9] можно получить

$$(2.8) \quad a = \frac{\pi}{4 \sin^2 \alpha}, \quad \frac{2c}{a} = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

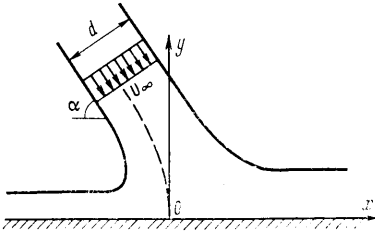
$$\pi \frac{dx}{du_e} = \frac{4 \sin^2 \alpha}{(1-u_e^2)(1-2 \cos \alpha u_e + u_e^2)}$$

Распределение скорости вдоль преграды в диапазоне $|u_e| \leq 0.6$ согласно [10] слабо зависит от M_∞ , поэтому в указанном диапазоне формула (2.8) применима и для сжимаемой струи. Для получения результатов в большой окрестности точки торможения воспользуемся методом локального подобия [11], согласно которому

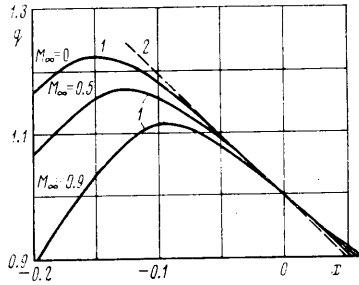
$$(2.9) \quad q = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{1+1/2(\gamma-1)M_\infty^2} u_e^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} u_e \xi^{-1/2}$$

$$\xi = \int_0^x \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_\infty^2}{1+1/2(\gamma-1)M_\infty^2} u_e^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} u_e dx$$

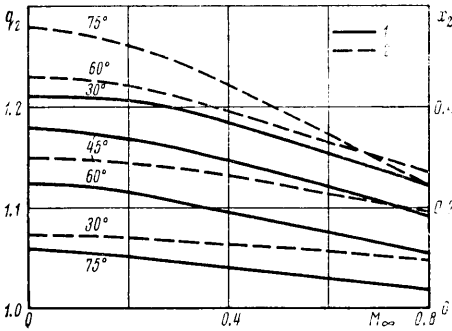
На фиг. 3 представлены результаты расчета относительного теплового потока при различных M_∞ и $\alpha=30^\circ$ по формулам (2.8), (2.9) (линии 1) и по формулам (2.7), (2.8) (линия 2). Оказывается, что в малой окрестности точки торможения относительный тепловой поток очень слабо зависит от M_∞ и H_w . В более широкой окрестности появляется зависимость от M_∞ , но зависимость от H_w с точностью метода локального подобия можно пренебречь.



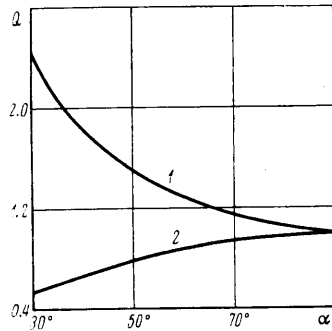
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 представлены зависимости от M_∞ и от α максимума теплового потока q_2 (линии 1) и координаты точки максимума x_2 (линии 2). Тепловой поток в точке торможения q_0 пропорционален $a^{1/2}$, поэтому согласно (2.8) для зависимости максимума теплового потока от угла α получаем

$$(2.10) \quad Q = \frac{q_2(\alpha) q_0(\alpha)}{q_2(90^\circ) q_0(90^\circ)} = \frac{q_2(\alpha)}{\sin \alpha}$$

Результаты расчета Q для плоской потенциальной несжимаемой струи представлены на фиг. 5 (линия 1). При уменьшении α максимальный тепловой поток, рассчитанный по формуле (2.10), неограниченно возрастает. Однако при малых α толщина струйки, текущей влево от точки торможения, сравнима с толщиной пограничного слоя и, следовательно, необходимо рассматривать вязкие силы во всей струе, а не только в пограничном слое (например, при $Re=10^4$ можно пользоваться формулой (2.10), если $\alpha \geq 30^\circ$).

Смещение максимума теплового потока из точки торможения связано, по-видимому, с уменьшением толщины пограничного слоя влево от точки торможения. Вычислим, например, толщину вытеснения δ в окрестности точки торможения несжимаемой струи

$$\delta \sqrt{a Re} = \int_0^\infty \frac{u_e - u}{u_e} d\eta \approx (ax + cx^2)^{-1} \int_0^\infty (ax + cx^2 - ax\varphi' - cx^2g') d\eta \approx$$

$$\approx \frac{0.65ax + 0.1cx^2}{ax + cx^2} \approx 0.65 - 0.55 \frac{c}{a} x$$

Согласно (2.8) $c \leq 0$, $a \geq 0$. Поэтому для отрицательных x получим уменьшение толщины вытеснения и, значит, увеличение теплового потока.

3. Был проведен также расчет взаимодействия плоской несжимаемой струи, истекающей из точечного источника, с бесконечной пластиной, расположенной под некоторым углом на большом удалении от источника. Распределение скорости в набегающей струе описывается известным профилем Гертлера [4]. В области взаимодействия струи с преградой происходит быстрое изменение направления потока, и вследствие этого вязкие силы значительно меньше конвективных сил во всей области, за исключением тонкого пристеночного слоя, где должны выполняться условия прилипания. Поэтому поле течения можно разбить на три области: 1) невозмущенное течение (струйный пограничный слой), 2) завихренное невязкое течение в области взаимодействия потока с преградой, 3) пограничный слой на стенке.

В области 2 завихренность сохраняется вдоль линии тока и уравнение неразрывности и движения можно свести к нелинейному эллиптическому уравнению

$$(3.1) \quad \Delta \Psi + \Omega(\Psi) = 0$$

Здесь Ψ — функция тока, а Ω — вихрь. Это уравнение решалось методом установления по времени.

Результаты расчета показали, что для рассматриваемой струи параметр c/a заведомо не превышает 0.1. Это говорит о том, что в малой окрестности точки торможения течение почти симметрично и максимум теплового потока находится практически в точке торможения. Для достаточно больших Re тепловой поток можно подсчитать по методу локального подобия, так как в этом случае пограничный слой очень тонкий и влиянием завихренности на теплообмен в пограничном слое на пластине можно пренебречь. Результаты такого расчета максимума теплового потока Q представлены на фиг. 5 (линия 2). Так как максимум теплового потока находится в этом случае в точке торможения, то этот график представляет собой также изменение $a^{1/2}$ при изменении наклона струи.

Потенциальная струя и профиль Гертлера аппроксимируют соответственно начальный и основной участки реальных струй. Поэтому полученное выше различие в распределении теплового потока по преграде присуще, по-видимому, и этим двум характерным участкам реальных дозвуковых струй.

Автор благодарит В. В. Лунова за постановку задачи и научное руководство.

Поступила 2 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
2. Arganbright D. G., Resch H. A review of basic aspects of heat transfer under impinging air jets Wood Sci. and Technol., vol. 5, 1974, No. 2.
3. Howarth L. The boundary layer in three dimensional flow, pt II. The flow near a stagnation point. Philos. mag., 1951, серия VII, vol. 42, No. 335.
4. Davey A. Boundary — layer flow at a saddle point of attachment. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, p. 4.
5. Лесин А. Б. Влияние несимметричного взаимодействия неоднородного потока с плоской преградой на теплообмен в окрестности критической точки. Тр. 20 Научн. конф. МФТИ, 1974. Сер. Аэрофизика и прикл. матем. ч. 1, Долгопрудный, 1975.

6. Donaldson C. D., Snedeker R. C. A study of free jet impingement, pt I. Mean properties of free and impinging jets. J. Fluid Mech., 1971, vol. 45, p. 2.
7. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
8. Cohen C. B., Reshotko E. Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NACA Rept, 1956, No. 1293.
9. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
10. Буковшин В. Г., Шестова Н. П. Падение плоской дозвуковой струи на плоскость под произвольным углом. Инж. ж., 1965, т. 5, № 4.
11. Lees L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, vol. 26, No. 4.

УДК 532.529+532.593

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ ЖИДКОСТЬ — ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

В. Ш. ШАГАНОВ

(Уфа)

Исследуется структура стационарных ударных волн в жидкости с пузырьками газа в рамках m -скоростной, m -температурной и с m -давлениями модели ($m > 2$). В монодисперсном случае ($m=2$) эта задача подробно исследована в [1, 2].

Проанализирован вопрос, насколько правомочна операция осреднения, т. е. введения только одного диаметра пузырей, характеризующего дисперсность газовой фазы. Аналогичная задача для двухфазной среды, состоящей из пара с каплями, исследована в [4].

Рассмотрим движение жидкости со взвешенными в ней пузырьками газа при обычных для двухфазных сред основных допущениях [1-3]. Кроме того, будем считать, что смесь полидисперсная, т. е. в каждом элементарном объеме имеются сферические пузырьки сорта $m-1$. Остановимся на случае, когда отсутствует массообмен между фазами, температуру жидкости (в отличие от температуры пузырьков газа) можно считать постоянной, а сжимаемостью жидкости можно пренебречь.

Для этой смеси запишем дифференциальные уравнения для одномерно-стационарного движения, следующее [1-3] из сохранения масс числа пузырьков и импульсов каждой фазы

$$\frac{d(\rho_i v_i)}{dx} = 0, \quad \frac{d(\rho_i v_i)}{dx} = 0, \quad \frac{d(n_i v_i)}{dx} = 0 \quad \left(\rho_i = \rho_i^0, \quad \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right) \quad (1)$$

$$\rho_i v_i \frac{dv_i}{dx} = -\alpha_i \frac{dp_1}{dx} - \sum_{i=2}^m n_i f_i, \quad \rho_i v_i \frac{dv_i}{dx} = -\alpha_i \frac{dp_1}{dx} + n_i f_i$$

$$f_i = f_{mi} + f_{fi}, \quad f_{mi} = \left(\frac{\pi}{12} \right) \rho_i^0 \left[v_i \frac{d}{dx} (\delta_i^3 (v_1 - v_i)) + \delta_i^3 (v_1 - v_i) \frac{dv_1}{dx} \right]$$

$$f_i = \chi_{fi} \rho_i^0 v_i \delta_i (v_1 - v_i), \quad \chi_{fi} = \chi_{fi}(R_{li}), \quad R_{li} = \delta_i (v_1 - v_i) v_1^{-1}$$

$$\alpha_i = (\pi/6) n_i \delta_i^3, \quad \rho_i^0 / \rho_{i0}^0 = (\delta_{i0} / \delta_i)^3$$

Здесь нижний индекс 1 относится к параметрам жидкости, а индекс $i=2, 3, \dots$, m — к газовой фазе для пузырьков i -го сорта. Эту часть газовой фазы назовем i -й. ρ_i и ρ_i^0 — соответственно средняя и истинная плотность i -й фазы; α_i — объемное содержание i -й фазы, n_i — количество пузырьков i -й фазы в единице объема смеси, v_i и p_i — скорость и давление i -й фазы; f_i — сила межфазного взаимодействия, действующего со стороны жидкости на один пузырек i -й фазы, причем составляющая f_{mi} соответствует эффекту присоединенных масс из-за ускорения жидкости относительно пузырька, а составляющая f_{fi} — вязкому трению. Коэффициент трения — определяется также, как и в [1, 2]. Нижний индекс (0) относится к равновесному состоянию перед волной.