

ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ПОРИСТЫМИ
ДИСКАМИ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ОДНОРОДНОМ
НЕСИММЕТРИЧНОМ ОТСОСЕ И ВДУВЕ

Л. Я. ЛЮБИН

(Москва)

В [1-3] рассмотрен класс автомодельных решений задачи о течении несжимаемой жидкости в плоском канале с пористыми стенками, через которые осуществляется однородный симметричный вдув или отсос. Аналогичный класс автомодельных решений задачи о течении между пористыми дисками при естественных однородных условиях на периферии рассмотрен в [4], где исследована асимптотика этих решений для малых чисел Рейнольдса вдува R и указана предельная форма решения для симметричного вдува при $R = \infty$.

В настоящей статье методом пограничных функций рассмотрена сингулярная задача, соответствующая течению между пористыми дисками при несимметричных отсосах и вдувах, характеризуемых большими числами R .

1. Постановка задачи. Течение несжимаемой жидкости между горизонтально расположенными пористыми дисками описывается приведенными к безразмерной форме уравнениями движения, неразрывности и граничными условиями

$$(1.1) \quad v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right] \right\}$$

$$v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(1.2) \quad w = \text{sign } w_*^\circ, v = 0, z = 0; w = \chi, v = 0, z = 2$$

$$R = -\rho_* w_*^\circ h_* / \mu_*, v = v_* / |w_*^\circ|, w = w_* / |w_*^\circ|$$

$$r = r_* / h_*, z = z_* / h_*, p = p_* / \rho_* (w_*^\circ)^2$$

Здесь μ_* — вязкость, $2h_*$ — расстояние между дисками, r_* , z_* — цилиндрические координаты с началом в центре нижнего диска, v_* , w_* — радиальная и поперечная составляющие скорости, p_* — давление, ρ_* — плотность. Интенсивности отсоса (вдува) характеризуются поперечной составляющей скорости на поверхности нижнего диска w_*° и безразмерным параметром $\chi = w(2)$. Таким образом, при отсосе или вдуве снизу $R > 0$, $w_*^\circ < 0$ или $R < 0$, $w_*^\circ > 0$ соответственно. Отсос или вдув сверху характеризуется значениями $R_1 = \chi |R| > 0$ или $R_1 < 0$.

Граничные условия на контуре зазора предполагаются однородными, радиус дисков считается бесконечным. Как показано в [4], рассматриваемая задача имеет автомодельное решение вида

$$(1.3) \quad w = w(z), \quad v = -1/2 r dw/dz$$

Функция w в (1.3) удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям

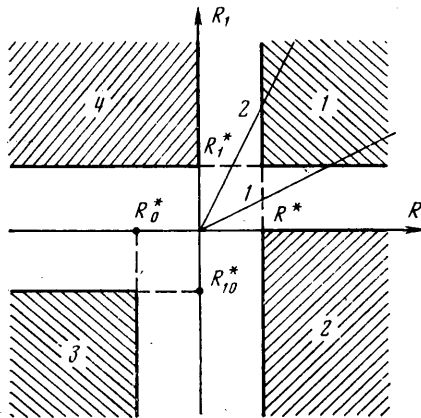
$$(1.4) \quad R^{-1}d^4w/dz^4 = wd^3w/dz^3$$

$$(1.5) \quad w(0) = \text{sign } w_*^\circ, \quad w'(0) = 0, \quad w(2) = \chi, \quad w'(2) = 0$$

При больших R уравнение (1.4) является сингулярно возмущенным. В соответствующем ему укороченном уравнении

$$(1.6) \quad wd^3w/dz^3 = 0$$

имеет место вырождение, связанное с обращением в нуль третьей производной функции w . Поэтому для режимов течения, характеризующихся



Фиг. 1

Характер асимптотики (количество, толщина и положение пограничных слоев) зависит от параметров R , R_1 . Ниже рассматривается асимптотика, соответствующая областям 1 и 2 показанной на фиг. 1 диаграммы, точки которой характеризуют режим течения. Область $1 (R \geq R^* \gg 1, R_1 \geq R_1^* \gg 1)$ соответствует течениям, возникающим при интенсивном двухстороннем отсосе. Течениям, обусловленным интенсивным отсосом через нижний диск и вдувом любой интенсивности через верхний, соответствует область 2 ($R \leq R^*, R_1 \leq 0$). Принадлежащая области 2 граница $R_1 = 0$ соответствует интенсивному отсосу через нижний диск при наличии непроницаемого верхнего диска.

Область 4 получается из области 2 путем зеркального отражения параметров течения относительно плоскости симметрии зазора. Соответствующая области 3 ($R \leq R_0^* \ll -1, R_1 \leq R_{10}^* \ll -1$) асимптотика течений при интенсивном несимметричном двухстороннем вдуве будет рассмотрена в другой работе. Эти течения характеризуются наличием внутреннего пограничного слоя, формирующегося около плоскости натекания $z = z^\circ$

$$z^\circ - 1 = \frac{1 - \chi}{1 + \chi} - \frac{1}{R} \frac{1 - \chi}{2\chi\sqrt{\pi}} - \frac{1}{R^2} \frac{1 - \chi}{8} + \dots \quad [w(z^\circ) = 0]$$

2. Область 1. При интенсивном двухстороннем отсосе, характеризуемом числами $R, R_1 \gg 1$, решение укороченного уравнения (1.6) согласно терминологии, принятой в [5], будет устойчивым влево правее плоскости растекания (т. е. при $z > z^\circ; w(z^\circ) = 0$) и устойчивым вправо левее этой плоскости. Поэтому пограничные слои, внутри которых реализуется крутое нарастание радиальной составляющей скорости, пропорциональной $w' = dw/dz$, в рассматриваемых режимах течений могут располагаться

лишь на стенках зазора. Толщины этих слоев порядка R^{-1} и R_1^{-1} соответственно.

Ниже будет показано, что автомодельные решения вида (1.3) в области I существуют лишь при $1/2 < \chi < 2$. Поэтому применяется преобразование растяжения $\zeta = z/\varepsilon$, $\eta = (z-2)/\varepsilon$ в точках $z=0$ и 2 соответственно, а равномерно пригодное асимптотическое разложение решения ищется в виде

$$(2.1) \quad w(z, \varepsilon) = w_0(z) + \varepsilon w_1(z) + \dots + \varepsilon \Pi_1 w(\zeta) + \varepsilon^2 \Pi_2 w(\zeta) + \dots + \varepsilon Q_1 w(\eta) + \varepsilon^2 Q_2 w(\eta) + \dots$$

Здесь $\varepsilon = R^{-1}$ — малый параметр.

Из-за вырождения в укороченном уравнении (1.6) все члены разложения $w_k(z)$ удовлетворяют уравнению

$$(2.2) \quad d^3 w_k / dz^3 = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

т. е. могут быть представлены в форме

$$(2.3) \quad w_k = C_k + C_k' z + C_k'' z^2 / 2$$

Уравнения для пограничных функций имеют вид

$$(2.4) \quad \frac{d^4 \Pi_k w}{d\zeta^4} + \frac{d^3 \Pi_k w}{d\zeta^3} = \sum_{j=1}^{k-1} W_j W_{k-j}$$

$$(2.5) \quad \frac{d^4 Q_k w}{d\eta^4} - \chi \frac{d^3 Q_k w}{d\eta^3} = \sum_{j=1}^{k-1} U_j U_{k-j}$$

$$W_k = \Pi_k w + C_k + C_{k-1}' \zeta + C_{k-2}'' \zeta^2 / 2$$

$$U_k = Q_k w + C_k + 2(C_{k-1}' + C_{k-2}'') + (C_{k-1}' + 2C_{k-2}'') \eta + C_{k-2}'' \eta^2 / 2$$

$$W_0 = 0, \quad U_0 = 0; \quad C_j = 0 \quad \text{при } j < 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов C_k , C_k' , C_k'' и констант интегрирования уравнений (2.4), (2.5) используются соотношения, полученные подстановкой разложения (2.1) в граничные условия (1.5)

$$(2.6) \quad C_0 = -1, \quad C_0 + 2(C_0' + C_0'') = \chi, \quad \Pi_k w(0) + C_k = 0$$

$$d\Pi_k w(0)/d\zeta + C_{k-1}' = 0, \quad Q_k w(0) + 2(C_{k-1}' + C_{k-2}'') = 0$$

$$dQ_k w(0)/d\eta + (C_{k-1}' + 2C_{k-2}'') = 0$$

Однако приведенных условий недостаточно для определения всех констант, так как из-за вырождения в укороченном уравнении (1.6) эти условия позволяют согласовать между собой пограничные функции $\Pi_k w$ и $Q_k w$ лишь с точностью до вторых производных. Неопределенность устраняется введением дополнительного условия, обеспечивающего непрерывность третьей производной функции w на интервале $0 \leq z \leq 2$. Для этой цели можно считать, что в исходном уравнении (1.4), переписанном в виде

$$dw''' / dz = \varepsilon w(z, \varepsilon) w''''$$

коэффициент $w(z, \varepsilon)$ является известной функцией, и проинтегрировать это уравнение формально в пределах от 0 до 2. Полученное в результате интегральное соотношение

$$(2.7) \quad \varepsilon \ln \frac{w'''(2, \varepsilon)}{w'''(0, \varepsilon)} = \int_0^2 w(z, \varepsilon) dz$$

даст недостающее условие, если в левую и правую части этого соотношения подставить выраженное через неизвестные коэффициенты C_k' и C_k'' асимптотическое представление (2.1), пограничные члены которого, удовлетворяющие уравнениям (2.4) — (2.6), имеют вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Pi_1 w &= C_0' e^{-\xi}, \quad Q_1 w = -\frac{C_0' + 2C_0''}{\chi} e^{x\eta} \\ \Pi_2 w &= -\frac{(C_0')^2}{8} e^{-2\xi} + \left[C_1' + (C_0')^2 \left(\frac{9}{4} + 2\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] e^{-\xi} \\ Q_2 w &= \frac{(C_0' + 2C_0'')^2}{8\chi^3} e^{2x\eta} - \left[\frac{C_1' + 2C_1''}{\chi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(C_0' + 2C_0'')^2}{\chi^3} \left(\frac{9}{4} - 2\chi\eta + \frac{\chi^2}{2} \eta^2 \right) \right] e^{x\eta} \end{aligned}$$

Искомые условия получаются разложением в степенной ряд по ε левой части (2.7) и приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях ε

$$(2.9) \quad \begin{aligned} C_0' + \frac{2}{3} C_0'' &= 1, \quad C_1' + \frac{2}{3} C_1'' = C_0' + \frac{1}{2} \ln \left(\chi^2 \frac{C_0' + 2C_0''}{C_0'} \right) \\ C_2' + \frac{2}{3} C_2'' &= C_1' + \frac{17}{8} (C_0')^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{C_0' + 2C_0''}{\chi^2} - C_0' \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{C_1' + 2C_1''}{C_0' + 2C_0''} - \frac{C_1'}{C_0'} \right) \end{aligned}$$

Предполагается, что число R настолько велико, что $\varepsilon \ln [\chi^2 (C_0' + 2C_0'') / C_0'] \ll 1$. К условиям (2.9) следует добавить полученные из (2.6) и (2.8) соотношения

$$(2.10) \quad \begin{aligned} C_0' + C_0'' &= \frac{1 + \chi}{2}, \quad C_1' + C_1'' = \frac{C_0'}{2} + \frac{C_0' + 2C_0''}{2\chi} \\ C_2' + C_2'' &= \frac{17}{16} \left[(C_0')^2 + \frac{(C_0' + 2C_0'')^2}{\chi^3} \right] + \frac{1 + \chi}{2\chi} C_1' + \frac{C_1''}{\chi} \end{aligned}$$

Если параметр χ лежит внутри интервала $(1/2, 2)$, то взятые попарно в соответствующем порядке условия (2.9) и (2.10) дают рекуррентные соотношения для последовательного определения коэффициентов C_k' , C_k''

$$(2.11) \quad \begin{aligned} C_0' &= 2 - \chi, \quad C_0'' = \frac{3}{2}(\chi - 1) \\ C_1' &= 2(1 - \chi) + \frac{1}{\chi} + \frac{3}{2} \ln \left(\chi^2 \frac{2\chi - 1}{2 - \chi} \right) \\ C_1'' &= \frac{3}{2} \left[\frac{\chi^2 - 1}{\chi} - \ln \left(\chi^2 \frac{2\chi - 1}{2 - \chi} \right) \right] \\ C_2' &= \frac{17}{16} \left[\frac{(2\chi - 1)^2}{\chi^3} + (2 - \chi)^2 \right] + \frac{1 + \chi}{2\chi} C_1' + \frac{C_1''}{\chi} - C_2'' \\ C_2'' &= \frac{9}{8} \left[\frac{2\chi - 1}{\chi^2} - (2 - \chi) \right] + \frac{51}{16} \left[\frac{(2\chi - 1)^2}{\chi^3} - (2 - \chi)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{1 - \chi}{\chi} C_1' + \frac{3}{2} \frac{C_1'}{2 - \chi} - \frac{3}{2} \frac{C_1' + 2C_1''}{2\chi - 1} + 3 \frac{C_1''}{\chi} \end{aligned}$$

Вне указанного интервала система (2.9), (2.10) не имеет вещественных корней (коэффициент C_1'' становится комплексным числом), что свидетельствует об отсутствии автомодельных решений вида (1.3) для режимов течений, которые соответствуют точкам вне сектора, ограниченного лучами $\chi=1/2$ и $\chi=2$ (линии 1 и 2), в области I диаграммы, показанной на фиг. 1.

Используя вычисленные по формулам (2.11) коэффициенты и условия (2.6), можно также найти $\Pi_3 w$ и $Q_3 w$. Например

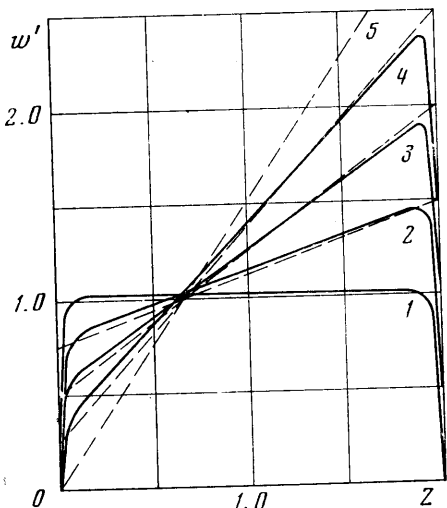
$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_3 w}{d\xi} = & -\frac{(C_0')^2}{16} e^{-3\xi} + C_0' \left[\frac{1}{2} C_1' + \frac{(C_0')^2}{8} (19+5\xi+2\xi^2) \right] e^{-2\xi} - \\ & - \left\{ C_2' + \frac{1}{2} C_0' C_1' + \frac{37}{16} (C_0')^3 + C_0' \left[\frac{17}{8} (C_0')^2 + 3C_0'' + 2C_1' \right] \right\} \xi + \\ & + C_0' \left[\frac{13}{8} (C_0')^2 + C_0'' + C_1' \right] \xi^2 + C_0' \left[\frac{(C_0')^2}{2} + \frac{C_0''}{6} \right] \xi^3 + \\ & + \frac{(C_0')^3}{8} \xi^4 \Big\} e^{-\xi} \end{aligned}$$

Асимптотическое представление (2.1) позволяет редуцировать рассматриваемую двухточечную краевую задачу к задаче Коши для уравнения (1.4) путем определения недостающих условий в виде

$$\begin{aligned} w''(0) = & RC_0' + \left[C_1' - \frac{5}{4} (C_0')^2 + C_0'' \right] + \\ & + \frac{1}{R} \left[5C_0' C_0'' - \frac{21}{8} (C_0')^3 - \frac{5}{2} C_0' C_1' + C_1'' + C_2' \right] + \dots \\ w'''(0) = & -R^2 C_0' - R \left[C_1' - \frac{7}{4} (C_0')^2 \right] - \\ & - \left[4C_0' C_0'' - \frac{21}{8} (C_0')^2 - \frac{7}{2} C_0' C_1' + C_2' \right] + \dots \end{aligned}$$

Показанные на фиг. 2 графики функции $w'(z)$, пропорциональной радиальной составляющей скорости v (сплошные линии), построены по результатам численного решения соответствующей задачи Коши для случаев $R=50$, $\chi=1.00, 1.25, 1.50$ и 1.75 (кривые 1—4 соответственно). Пунктиром показаны предельные формы профиля функции w' , соответствующие $R \rightarrow \infty$ (для линии 5 $\chi=2.00$). Представление о точности дает сравнение полученных расчетных значений $w(2)$ с величиной параметра χ . Для $\chi=1.00, 1.25, 1.50$ значения $w(2)$ равны соответственно 0.9985, 1.2490 и 1.4982. Интересно также отметить, что вычисленная функция $w'(z)$ проходит вторично через нулевое значение при $z \approx 2.002, 2.002$ и 2.004 , когда $\chi=1.00, 1.25$ и 1.50 .

По мере приближения к режиму $\chi=2$ при $R=\text{const}$ происходит вырождение пограничного слоя вблизи



Фиг. 2

нижнего диска. Оно проявляется в стремлении к нулю величины скачка радиальной составляющей скорости v и в уменьшении крутизны нарастания этой составляющей в пределах слоя.

3. Область 2. При интенсивном отсосе через нижний диск ($R \gg 1$) и произвольном вдуве через верхний ($\chi \leq 0$; $\chi = 0$ соответствует непроницаемому верхнему диску) решение укороченного уравнения (1.6) будет устойчивым вправо. Поэтому пограничный слой, имеющий толщину порядка R^{-1} и характеризующийся крутым нарастанием радиальной составляющей скорости будет только у нижнего диска. Равномерно пригодное асимптотическое представление решения строится в данном случае в виде

$$(3.1) \quad w(z, \varepsilon) = w_0(z) + \varepsilon w_1(z) + \dots + \varepsilon \Pi_1 w(\zeta) + \varepsilon^2 \Pi_2 w(\zeta) + \dots$$

Предполагается, что $\text{ord } \sqrt{\chi} \leq \text{ord } \sqrt{R}$ в противном случае ($\sqrt{|R_1|} \gg \sqrt{R}$) появится новый характерный масштаб и толщина пограничного слоя будет порядка $|R_1|^{-1/2}$.

Члены w_k должны удовлетворять уравнению (2.2) и граничным условиям ($j > 0$)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} w_0(2) &= \chi, & w_j(2) &= 0 \\ w_0'(2) &= 0, & w_j'(2) &= 0 \end{aligned}$$

т. е. могут быть представлены в виде

$$(3.3) \quad \begin{aligned} w_0 &= \chi + C_0'' (2 - 2z + z^2 / 2) \\ w_j &= C_j'' (2 - 2z + z^2 / 2) \end{aligned}$$

Для Π_k -функций остаются в силе уравнения (2.4), если в них подставить

$$W_1 = \Pi_1 w + 2C_1'' - 2C_0'' \zeta$$

$$W_j = \Pi_j w + 2C_j'' -$$

$$-2C_{j-1}'' \zeta + C_{j-2}'' \zeta^2 / 2$$

Для определения неизвестных коэффициентов C_k'' и констант интегрирования уравнений (2.4) используются соотношения

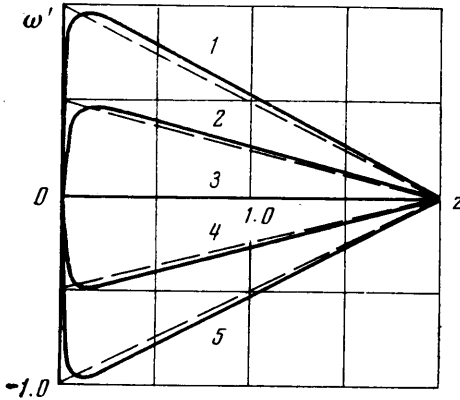
$$(3.4) \quad \chi + 2C_0'' = 1, \quad \Pi_k w(0) + 2C_k'' = 0$$

$$d\Pi_k w(0) / d\zeta - 2C_{k-1}'' = 0$$

полученные подстановкой разложения (3.1) в граничные условия (1.5). Этих соотношений достаточно для определения всех неизвестных констант, так как рассматриваемые режимы характеризуются наличием только одного пограничного слоя.

Решения задач (2.4), (3.4) для $k=1, 2$ и 3 имеют вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Pi_1 w &= \kappa e^{-\zeta}, & \Pi_2 w &= \frac{\kappa^2}{8} e^{-2\zeta} + \kappa \left[1 + \kappa \left(\frac{9}{4} + 2\zeta + \frac{\zeta^2}{2} \right) \right] e^{-\zeta} \\ \frac{d\Pi_3 w}{d\zeta} &= -\frac{\kappa^3}{16} e^{-3\zeta} + \kappa^3 \left(\frac{19}{8} + \frac{1}{2\kappa} + \frac{5}{8} \zeta + \frac{\zeta^2}{4} \right) e^{-2\zeta} - \\ & - \kappa^3 \left[\frac{37}{16} + \frac{21}{8\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{17}{8} + \frac{1}{2\kappa} \right) \zeta + \right. \end{aligned}$$



Фиг. 3

$$+ \left(\frac{13}{8} + \frac{1}{2\kappa} \right) \xi^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\kappa} \right) \xi^3 - \frac{\xi^4}{8} \Big] e^{-\xi} \quad (\kappa = \chi + 1)$$

Первые коэффициенты C_k'' определяются выражениями

$$C_0'' = -\frac{\kappa}{2}, \quad C_1'' = -\frac{\kappa}{2}, \quad C_2'' = -\frac{\kappa}{2} - \frac{17}{8} \kappa^2$$

Как и в п. 2, путем определения недостающих условий рассматриваемая двухточечная краевая задача редуцируется к задаче Коши для уравнения (1.4)

$$(3.6) \quad w''(0) = \kappa \left(R - \frac{5\kappa - 2}{4} - \frac{21\kappa^2 - 9\kappa - 4}{8R} + \dots \right)$$

$$w'''(0) = -\kappa \left(R^2 - \frac{7\kappa - 4}{4} R - \frac{21\kappa^2 - 5\kappa - 8}{8} + \dots \right)$$

Показанные на фиг. 3 графики функции $w'(z)$, пропорциональной радиальной составляющей скорости v , построены по результатам численного решения соответствующей задачи Коши с использованием выписанных в (3.6) членов для случая $R=50$ при $\chi=0, -1/2, -1, -3/2, -2$ (кривые 1–5 соответственно; сплошные линии). Пунктиром показаны предельные формы профиля функции w' , соответствующие $R \rightarrow \infty$. Представление о точности решения дает сравнение вычисленных значений $w(2)$ и $w'(2)$ с соответствующими величинами χ и 0. При $R=50$ и $\chi = -1/2, -3/2$ и -2 вычисленные значения $w(2)$ и $w'(2)$ соответственно равны $-0.4998, 0.0002, -1.5000, -0.0025, -1.9991, 0.0009$.

Кроме того, интересно сравнить вычисленные значения $w''(2)$ с величиной

$$C'' = C_0'' + R^{-1} C_1'' + R^{-2} C_2''$$

Для указанных выше вариантов $w''(2)$ и C'' соответственно равны $-0.2551, -0.2551, 0.2550, 0.2547, 0.5102, 0.5094$.

Поступила 18 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9.
2. Terrill R. M. Laminar flow in a uniformly porous channel. Aeronaut. Quart., 1964, vol. 15, No. 3.
3. Terrill R. M. Laminar flow in a uniformly porous channel with large injection. Aeronaut. Quart., 1965, vol. 16, No. 4.
4. Самсонов В. В., Лабунцев Д. А. Аналитическое и экспериментальное исследование гидродинамики парового потока в сублимационном теплообменнике. Тр. МЭИ, 1974, вып. 198.
5. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
6. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.