

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАЗМОТРОНА ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПРОДОЛЬНО ОБДУВАЕМОЙ ДУГОЙ

А. М. ГОНОПОЛЬСКИЙ, Ф. А. СЛОБОДКИНА

(Москва)

Развитие плазмохимии, разработка новых высокотемпературных технологических процессов в горнодобывающей, металлургической, химической промышленности, а также разнообразные экспериментальные исследования привели в настоящее время к необходимости создания электродуговых нагревателей (плазмотронов) мощностью от единиц до сотен мегаватт. Одним из наиболее важных требований, предъявляемых к плазмотронам, является увеличение полезной мощности при ограниченных возможностях источников питания. К числу наиболее перспективных и надежных в работе относятся плазмотроны постоянного тока с продольно обдуваемой дугой фиксированной длины [1]. Увеличение мощности плазмотронов такой конструкции может достигаться не только за счет увеличения силы тока дуги, но и за счет перераспределения напряжения горения дуги, что позволяет одновременно увеличить ресурс электродов и уменьшить степень загрязнения среды на выходе из плазмотрона.

В предлагаемой работе на основе решения вариационной задачи производится построение профиля канала и выбор других управляющих параметров так, чтобы величина некоторой интегральной характеристики плазмотрона была максимальной. В качестве интегральной величины, характеризующей эффективность устройства, может быть выбрана мощность, длина дуги, величина потерь, температура газа на выходе и другие величины в соответствии с практическим назначением плазмотрона. В принятой здесь постановке течение в канале считается дозвуковым. Для его описания используется модель, предложенная в [2], построенная на квазиодномерном приближении газодинамического течения электропроводного газа в канале переменного сечения при наличии джоулевой диссипации, равномерно распределенной в поперечном сечении канала. Предварительные исследования показали, что модель, разработанная в [2], хорошо описывает газодинамические параметры плазмотрона не только качественно, но и количественно. При сопоставлении расчетных и экспериментальных данных наилучшее совпадение достигается для длинных секционированных межэлектродных вставок, где электрическое поле и плотность тока близки к однородным в каждом сечении канала.

1. Рассмотрим стационарное течение электропроводного газа в осесимметричном канале переменного сечения. Вдоль оси канала, с направлением которой совпадает направление скорости газа, горит электрическая дуга постоянного тока. Будем рассматривать ту часть течения, на которую приэлектродные области дуги не оказывают влияния. Индуцированным магнитным полем пренебрегаем. Предположим, что все параметры течения равномерно распределены в поперечном сечении и меняются только вдоль оси канала, с которой совместим координатную ось x .

Запишем уравнения, описывающие квазиодномерное стационарное течение электропроводного газа в канале переменного сечения при наличии джоулевой диссипации и теплообмена со стенками канала

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \rho u u' + p' = 0 \\ L_2 &\equiv h' + u u' + Q(\rho, u, h) - \eta I^2 / \sigma r u r^4 = 0 \\ L_3 &\equiv (\rho u r^2)' = 0 \\ p &= p(\rho, h), \quad \sigma = \sigma(\rho, h) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь L_1 — уравнение движения, L_2 — уравнение энергии, L_3 — уравнение неразрывности, ρ , u , p , h , σ — плотность, скорость, давление, энтальпия и электропроводность газа, $r(x)$ — радиус поперечного сечения осесимметричного канала, Q — тепловые потери на единице длины канала, отнесенные к массовому расходу газа, $I(I=$

$=\text{const}$) — сила тока в дуге, η — безразмерный параметр. Штрихом обозначена производная по x . Зависимости $p(\rho, h)$, $\sigma(\rho, h)$ и $Q(\rho, u, h)$ предполагаются известными.

Система (1.1) записана относительно безразмерных величин

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x &= \frac{x^\circ}{l^\circ}, & r &= \frac{r^\circ}{r_*^\circ}, & I &= \frac{I^\circ}{I_*^\circ}, & \rho &= \frac{\rho^\circ}{\rho_*^\circ}, & u &= \frac{u^\circ}{\sqrt{h_*^\circ}} \\ p &= \frac{p^\circ}{\rho_*^\circ h_*^\circ}, & h &= \frac{h^\circ}{h_*^\circ}, & \sigma &= \frac{\sigma^\circ}{\sigma_*^\circ}, & \eta &= \frac{I_*^{\circ 2} l^\circ}{\sigma_*^\circ (h_*^\circ)^{3/2} \rho_*^\circ r_*^{\circ 4}} \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс ($^\circ$) приписан размерным параметрам, а нижний индекс (звездочка) — соответствующим характерным параметрам.

Из всех возможных режимов течения в канале плазмотрона [2] будем рассматривать только дозвуковые течения. При дозвуковом течении для интегрирования системы уравнений (1.1) необходимо задать два граничных условия во входном сечении и одно условие в выходном сечении канала [3]. В данной задаче будем считать, что на входе в канал известны энтальпия h_0 и расход газа m_0 , а на выходе задано давление p_∞ среды, куда происходит истечение из плазмотрона. Если давление p_∞ таково, что истечение происходит со скоростью звука, то граничным условием на выходе будет равенство числа Маха единице, в противном случае должно выполняться условие равенства давлений газа в выходном сечении канала и среды, куда истекает газ. Припишем нижний индекс a сечению входа и индекс b сечению выхода из канала и запишем граничные условия в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} h_a &= h_0, & (\rho u r^2)_a &= m_0 & (x &= x_a) \\ p_b &= p_\infty, & \text{или } M_b &= 1 & (x &= x_b) \end{aligned}$$

Здесь $M = u/c$ — число Маха, c — скорость звука, вычисляемая по формуле $c^2 = \rho p_\rho / (\rho - p_h)$. Нижними индексами ρ, h обозначены соответствующие частные производные.

Уравнения (1.1) и граничные условия (1.3) дают возможность рассчитать дозвуковое течение в плазмотроне заданной формы $r(x)$, длины x_b , при силе тока в дуге I и при известных постоянных величинах η, h_0, m_0, p_∞ .

Радиус поперечного сечения $r(x)$, длина канала x_b , сила тока I и некоторые из констант в (1.3) могут быть выбраны произвольно внутри некоторой замкнутой области и поэтому являются управлениями задачи.

2. Определим область допустимых значений управляющих функций. Длина и поперечное сечение канала не должны превышать заданных максимальных значений, определяемых условиями использования плазмотрона. Кроме того, площадь поперечного сечения не может быть и меньше некоторого значения ввиду необходимости защиты стенок канала и ограниченных возможностях ресивера. Источники питания плазмотрона лимитируют величину силы тока. Энтальпия газа на входе в канал h_0 и давление p_∞ среды, куда происходит истечение, также могут меняться в некоторых пределах. Кроме того, при дозвуковом течении число Маха должно быть меньше единицы во всем канале.

Будем отсчитывать координату x от входного сечения. Примем в качестве характерного размера l° максимально допустимую длину канала, в качестве I_*° — максимально допустимую силу тока, а в качестве r_*° — радиус начального сечения. Тогда $r(x), I, h_0, p_\infty$ и диапазон изменения x будут удовлетворять неравенствам

$$(2.1) \quad \begin{aligned} r_0 &= r(0) = 1, & r^{(1)} &\leq r(x) \leq r^{(2)}, & 0 &< |I| \leq 1 \\ h^{(1)} &\leq h_0 \leq h^{(2)}, & p^{(1)} &\leq p_\infty \leq p^{(2)}, & 0 &= x_a \leq x \leq x_b \leq 1. \end{aligned}$$

Верхние индексы 1, 2 приписаны минимальным и максимальным значениям.

Для наиболее полного использования энергии плазмотрона необходимо, чтобы конструкция канала не допускала возникновения зон с замкнутыми линиями тока, которые появляются при резком расширении или сужении канала. В таких зонах температура газа сильно растет, что ведет к росту тепловых потерь, шунтированию дуги и прогоранию стенок канала.

Для выполнения условия безотрывного обтекания стенок следует ввести ограничение на угол раскрытия, или на производную r' . Это же условие необходимо и для справедливости уравнений квазиодномерного течения (1.1).

Введем новую управляющую функцию $\zeta(x)$ и сформулируем ограничение на угол раскрытия канала в виде

$$(2.2) \quad L \equiv r' - \zeta = 0$$

$$(2.3) \quad |\zeta| \leq k < \infty \quad (k = \text{const})$$

Таким образом, функции $r(x)$, $u(x)$, $\rho(x)$, $h(x)$ должны быть непрерывными. Функция $r'(x) = \zeta(x)$ может иметь разрывы первого рода и точки этих разрывов являются точками разрыва производных параметров течения.

Задача оптимизации заключается в таком выборе допустимых функций $r(x)$, $\zeta(x)$, $u(x)$, $\rho(x)$, $h(x)$, удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.3), (2.1) — (2.3), и постоянных I , h_0 , p_∞ , при котором функционал, определяющий меру эффективности плазмотрона, достигает максимального значения.

3. Выпишем функционал, подлежащий оптимизации

$$(3.1) \quad N = \int_0^{x_b} \Phi(u, p, h, \rho, r, \dots) dx + \int_0^{x_b} (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu L) dx$$

Здесь Φ — известная функция своих аргументов, интеграл от которого определяет эффективность плазмотрона, а μ_1 , μ_2 , μ — переменные множители Лагранжа. Уравнение сохранения расхода L_3 , уравнение состояния и зависимости $\sigma(\rho, h)$ и $Q(\rho, u, h)$, представляющие собой в данной постановке конечные соотношения, используются в дальнейших выкладках для вычисления соответствующих вариаций через вариации δr , δu , δh .

Алгоритм получения необходимых условий максимума и уравнений, определяющих множители Лагранжа, для функционала типа (3.1) при ограничениях вида (2.1) — (2.3) и при наличии точек излома профиля канала аналогичен изложенному в работах [4, 5].

Следуя тем же путем и опуская промежуточные выкладки, приведем здесь окончательные результаты.

Выпишем два дифференциальных уравнения для определения μ_1 и μ_2 :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mu_1' &= [\rho p_\rho (M^2 - 1)]^{-1} \{ u \Phi_u - \rho \Phi_\rho - u^2 \Phi_h + 2\mu_1 \rho u^2 r' / r - \\ &\quad - \mu_2 [\eta I^2 (u^2 \sigma_h + \rho \sigma_\rho) (\sigma^2 \rho u r^4)^{-1} - u Q_u + \rho Q_\rho + u^2 Q_h] \} \\ \mu_2' &= \Phi_h + \mu_2 [\eta I^2 u^2 \sigma_h (\sigma^2 \rho u r^4)^{-1} + Q_h] - \mu_1' r_h \end{aligned}$$

Граничные условия для интегрирования (3.2) получаются из выражения для δN с учетом граничных условий (1.3). При $x=0$ условие для интегрирования (3.2) имеет вид

$$(3.3) \quad [\mu_1 \rho (u^2 - p_\rho) + \mu_2 u^2]_a = 0 \quad (x=0)$$

При дозвуковом истечении, варьируя равенство $p_b = p_\infty$, получим в качестве граничного условия для интегрирования (3.2) выражение

$$(3.4) \quad [\mu_1 \rho u + \mu_2 (u^2 p_h + \rho p_\rho) / u r_h]_b = 0 \quad (x=x_b)$$

При звуковом истечении, варьируя равенство $M_b=1$, вместо условия (3.4) будем иметь

$$(3.5) \quad (\mu_1 p_h + \mu_2)_b = 0 \quad (x = x_b)$$

Заметим, что (3.5) совпадает с (3.4), если в последнее подставить условие $M_b=1$.

При выборе μ учитывается, что контуры канала могут состоять из участков краевого экстремума $|r'|=k$ и двустороннего экстремума $|r'|<k$. В связи с этим уравнение для нахождения μ на участках, где $|r'|=k$, получим в виде $\mu'=W$

$$(3.6) \quad W = [r(1-M^2)]^{-1} \left\{ (1-M^2) [\Phi_r - (\Phi_r)'] r + 2(M^2 \rho \Phi_\rho + u^2 \Phi_h - u \Phi_u) + \right. \\ \left. + 2\mu_1 u^2 p_h (Q - \eta I^2 / \sigma \rho u r^4) / p_\rho + 2\mu_2 \left[u^2 Q_h - u Q_u + M^2 \rho Q \rho + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\eta I^2}{\sigma \rho u r^4} \left(1 - M^2 + \frac{u^2 \sigma_h + M^2 \rho \sigma_\rho}{\sigma} \right) \right] \right\}$$

а на участке, где $|r'|<k$, — в виде

$$(3.7) \quad \mu = \mu' = 0$$

Граничным условием для интегрирования (3.6) послужит выполнение на правом конце участка, где $|r'|=k$, одного из равенств

$$(3.8) \quad \Phi_{r_-} + \mu_- + \Phi_{r_+} = 0, \quad (\Phi_r + \mu - 2\mu_1 \rho p_\rho / r)_b = 0$$

Первое справедливо для случая, когда правой границе участка краевого экстремума соответствует точка $x < x_b$, второе выполняется тогда, когда этот участок заканчивается в точке $x = x_b$.

4. Необходимые условия максимума характеристики N формулируются в виде неравенств, поскольку на управления задачи наложены ограничения.

Оптимальные p_∞ и h_0 определяются из условий

$$(4.1) \quad [\mu_2 (M^2 - 1) p_\rho / u^2 p_h]_b \operatorname{sign} (2p_\infty - p^{(1)} - p^{(2)}) \geq 0 \quad (p^{(1)} \leq p_\infty \leq p^{(2)})$$

$$(4.2) \quad [\mu_2 p_\rho / (u^2 - p_\rho)]_a \operatorname{sign} (2h_0 - h^{(1)} - h^{(2)}) \geq 0 \quad (h^{(1)} \leq h_0 \leq h^{(2)})$$

Если скорость звука в выходном сечении канала достигается для значений p_∞ , принадлежащих диапазону (2.1), то оптимальное истечение должно происходить со скоростью звука, т. е. $M_b=1$. Оптимальная длина канала и сила тока определяются условиями

$$(4.3) \quad [\Phi + \mu_2 (Q - \eta I^2 / \sigma \rho u r^4)]_b \geq 0 \quad (x_b \leq 1)$$

$$(4.4) \quad \int_0^{x_b} (1 - \mu_2 / \rho u r^2) dx \geq 0 \quad (|I| \leq 1)$$

Оптимальная форма канала может состоять из участков трех типов: $|r'|=k$, $|r'|<k$ и $r=r^{(1)}$ или $r=r^{(2)}$. Оптимальный профиль на участке двустороннего экстремума определяется из уравнения (см. (3.6))

$$(4.5) \quad W = 0$$

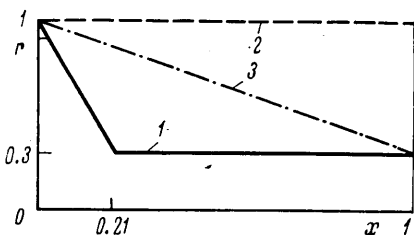
Задача оптимизации плазмотрона, как и большинство вариационных задач магнитной и газовой динамики в квазиодномерном приближении [4-6], оказывается вырожденной, если за меру эффективности устройства принимать длину дуги ($\Phi = -1$) или потери на теплообмен ($\Phi = -Q$) при заданной энтальпии торможения на выходе из канала, приращение энтальпии торможения газа при прохождении через канал ($\Phi = h' + uu'$) и во многих других практически важных случаях, которые описываются

ся функцией Φ , не зависящей от r' . Для таких функций Φ уравнение (4.5) оказывается конечным, а условия оптимальности в точках излома профиля удовлетворяются тождественно [5].

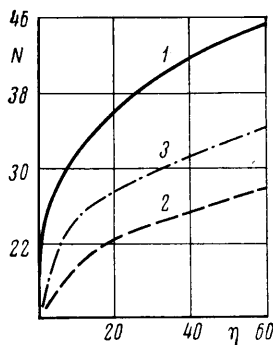
Можно показать, что начальный участок канала для дозвуковых течений при $\Phi = -1$ и $\Phi = h' + uu'$ будет участком краевого экстремума $r' = -k$.

Условие максимума N на участках такого типа имеет вид

$$(4.6) \quad \mu \operatorname{sign} r' \leq 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

5. Рассмотрим подробно результаты оптимизации плазмотрона по приращению полной энтальпии при прохождении газом канала. Будем для краткости называть эту характеристику «мощностью». Предположим, что теплообмен со стенками отсутствует, а электропроводность и уравнение состояния определяются по формулам работ [7, 8] соответственно. Таким образом,

$$(5.1) \quad \Phi = \eta I^2 / \sigma r^2, \quad Q = 0, \quad \sigma = Ah^\alpha \quad (A = 10^{-4}, \alpha = 4) \\ p = B\rho h^\beta \quad (B = 1/3, \beta = 5/6)$$

Постоянные величины, входящие в граничные условия (1.3) и ограничения (2.1) и (2.3), примем равными: $k = 3.21$, $m_0 = 0.1653$, $h_0 \geq 1$, $r^{(1)} = 0.3$.

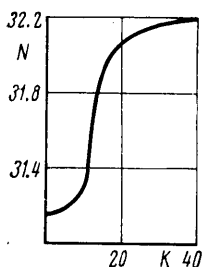
Будем искать оптимальные управления: форму канала, его длину, давление на выходе и энтальпию газа на входе в канал для различных значений η при фиксированной площади начального сечения канала и заданном расходе. При этом в выражения (1.1), (3.1) — (3.8) и в условия оптимальности (4.1) — (4.6) надо подставить Φ , Q , σ , p и их производные $\Phi_u, \dots, Q_u, \dots, p_h$, вычисленные в соответствии с соотношениями (5.1). Построение оптимального плазмотрона сводится к решению краевой задачи для пяти дифференциальных уравнений первого порядка (1.1), (3.2), (3.6) при пяти граничных условиях (1.3), (3.3), (3.4) или (3.5), (3.8). Величины $x_b, h_0, I, p_\infty, r(x)$ выбираются в соответствии с условиями оптимальности (4.1) — (4.6).

Радиус поперечного сечения канала на участке двустороннего экстремума определяется формулой

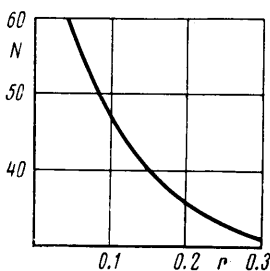
$$(5.2) \quad r^2 = \frac{\mu_2}{\rho u} - \frac{\mu_1 \beta u}{[\alpha u^2 + h(1 - M^2)]}$$

Расчеты были выполнены для $0.1 \leq \eta \leq 75$.

Оптимальная форма канала для всех η состоит из начального сужающегося конического участка, угол сужения которого равен максимально допустимому, и цилиндрического участка с радиусом, равным минимально



Фиг. 3



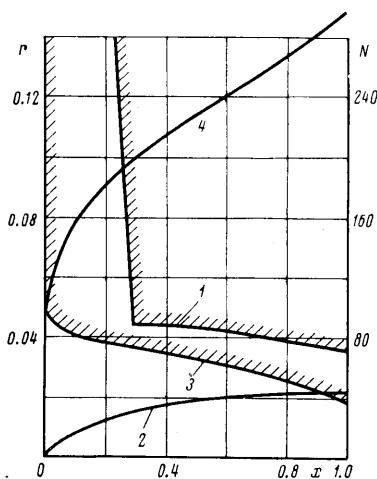
Фиг. 4

возможному (фиг. 1, линия 1). Для всех значений η оптимальное давление таково, что $M_b=1$, оптимальные $I=1$ и $x_b=1$, т. е. равны своим максимально допустимым значениям. Оптимальное $h_0=1$, т. е. равно своему минимально допустимому значению.

Для сравнения рассчитывалось течение при оптимальных h_0, p_∞, x_b, I в канале плазмотрона цилиндрической формы с площадью поперечного сечения, равной единице, и в плазмотроне конической формы с площадью поперечного сечения, равной единице на входе и минимально возможной на выходе из канала (фиг. 1). Результаты расчетов для $0.1 \leq \eta \leq 75$ приведены на фиг. 2 (линией 1 для оптимального канала, линией 2 для канала цилиндрической и линией 3 для канала конической формы), где представлено изменение мощности N с ростом η . Из сравнения приведенных результатов следует, что только за счет оптимального профилирования канала выигрыш в мощности в оптимальном канале составляет $\sim 60\%$ по сравнению с цилиндрическим и $\sim 30\%$ по сравнению с коническим каналом.

Перепад полного давления газа ($\Delta P = P_b - P_a$) растет с ростом η как в оптимальном, так и в коническом канале, в то время как в цилиндрическом канале величина ΔP близка к нулю для всех η . В оптимальном канале величина полного давления на входе и на выходе больше, чем в коническом, однако величина перепада давлений ΔP в оптимальном канале в ~ 1.5 раза меньше, чем в коническом.

Интересно проследить влияние введенных ограничений на мощность оптимального канала. На фиг. 3 представлена зависимость N от параметра k при $\eta=10$, из которой следует, что более интенсивное обжатие дуги стенками канала на начальном участке приводит к увеличению мощности. Еще большего увеличения мощности можно добиться, если иметь возможность при одном и том же значении k уменьшать значение $r^{(1)}$ (фиг. 4, параметр $k=3.21, \eta=10$). К росту мощности N в оптимальном канале ведет и увеличение расхода газа, так как за счет этого падает величина



Фиг. 5

на статической энтальпии, а следовательно, и электропроводность. В то же время удельная мощность N/m_0 с ростом расхода убывает.

Предположим теперь, что постановка задачи позволяет не налагать ограничение на величину поперечного сечения канала. В этом случае получаются те же, что и в предыдущем примере, оптимальные p_∞ , h_0 , I , x_b . Форма оптимального канала при $\eta=10$ представлена на фиг. 5 (кривая 1).

Начальный участок, так же как и прежде, представляет собой сужающийся под максимально возможным углом конус, а участок, следующий за ним, представляет собой участок двустороннего экстремума (5.2). На фиг. 5 нанесено также изменение мощности (кривая 2) по длине оптимального канала (шкала для значений N — справа на графике). Сравнение результата, приведенного на фиг. 5, с результатом, приведенным на фиг. 2, показывает, что мощность в оптимальном канале без ограничения на площадь минимального сечения приблизительно в 1,4 раза больше, чем в оптимальном канале с ограничением.

Если предположить, что отсутствует ограничение не только на минимальное сечение, но и на угол раскрытия канала, то форма оптимального канала на всем отрезке $0 \leq x \leq x_b$ будет определяться равенством (5.2). На фиг. 5 показан профиль (кривая 3) и распределение мощности (кривая 4) по длине такого канала для $\eta=10$. Оказывается, что мощность здесь в 10 раз больше, чем в оптимальном канале с ограничениями. Однако резкое изменение радиуса поперечного сечения канала на участке по x (от 0 до 10^{-6}) свидетельствует о том, что применение одномерной теории на этом участке неправомерно и необходимо введение ограничения (2.3). Интересно отметить, что радиус начального сечения, рассчитанный по (5.2), для всех проведенных расчетов был равен 1 с точностью до 10^{-4} .

Были проведены также расчеты оптимальных каналов с уравнением состояния (5.1) при $B \geq 1$. В этом случае форма оптимального канала с ограничениями отличается от предыдущего тем, что на конце появляется участок краевого экстремума $r' = k$, т. е. концевой участок, начиная от $x=0.95$ до $x=1$ ($\eta=10$), представляет собой конус, расширяющийся под максимальным углом.

Авторы благодарят участников семинаров под руководством Г. А. Любимова и Л. С. Полака за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 24 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Смоляков В. Я., Урюков Б. А. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., «Наука», 1973.
2. Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А. Исследование одномерного течения газа в канале плазмотрона. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
3. Слободкина Ф. А. Оптимизация одномерных течений с непрерывным переходом через нуль одной из характеристических скоростей. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К решению вариационных задач одномерной магнитной гидродинамики. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
5. Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К вариационным задачам магнитной гидродинамики. В сб. «Магнитогидродинамический метод получения электро-энергии». М., «Энергия», 1968.
6. Крайко А. Н., Старков В. К., Стернин Л. Е. Решение в одномерном приближении вариационной задачи о построении сопла максимальной тяги при течении газа с инородными частицами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
7. Вагажин А. Б., Развитие магнитогидродинамического пограничного слоя при внезапном возникновении движения или внезапном торможении сверхзвукового потока на границе полупространства. ПМТФ, 1965, № 2.
8. Голубев В. А. Исследование турбулентной струи высокой температуры. В сб. «Исследование турбулентных струй воздуха, плазмы и реального газа». М., «Машиностроение», 1967.