

О НЕРЕГУЛЯРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СИЛЬНОЙ
УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ТОНКИМ КОНУСОМ

В. И. БОГАТКО, Г. А. КОЛТОН

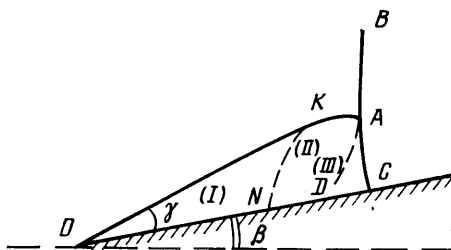
(Ленинград)

В постановке, аналогичной [1], рассматривается осесимметричная задача о маховском отражении интенсивной ударной волны от поверхности тонкого конуса.

Пусть сильная плоская ударная волна с характерным отношением плотностей на фронте $\epsilon \ll 1$ набегаает на конус с углом полураствора β . Скорость N_0 перемещения поверхности фронта ударной волны параллельна оси симметрии конуса. Характер течения и конфигурация поверхностей разрыва в возмущенной области существенно зависят от соотношения порядков малых параметров задачи β и ϵ . В дальнейшем предполагается, что $\beta = O(\epsilon)$, т. е. $\beta = \beta_0 \epsilon$, где $\beta_0 = O(1)$. В этом случае падающая ударная волна нерегулярным образом взаимодействует с поверхностью конуса, а отраженная ударная волна присоединена к его вершине. Схема течения в меридиональной плоскости показана на фиг. 1. Здесь BA — фронт невозмущенной ударной волны, AC — волна Маха, $OКА$ — фронт отраженной ударной волны, AD — тангенциальный разрыв. За прямолинейным участком OK фронта отраженной ударной волны в области OKN имеет место конический поток, граница которого KN в плоскости автомодельных переменных является линией параболичности системы уравнений газовой динамики.

В силу автомодельности задачи система уравнений, описывающая течение газа в возмущенной области, имеет вид

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\mathbf{v}-\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = -\epsilon \tau \text{ grad } p \\
 & (\mathbf{v}-\mathbf{r}) \text{ grad } \tau = \\
 & = \tau \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{v_\eta}{\eta} \right) \\
 & (\mathbf{v}-\mathbf{r}) \text{ grad } i = \\
 & = \epsilon \tau (\mathbf{v}-\mathbf{r}) \text{ grad } p, \\
 & \epsilon \tau = (k-1) i / k p
 \end{aligned}$$



Фиг. 1

Здесь $v(v_\xi, v_\eta)$, p , $\rho = 1/\epsilon \tau$, i — вектор скорости, давление, плотность и энтальпия газа, отнесенные к N_0 , $\rho_\infty N_0^2$, ρ_∞ и N_0^2 соответственно (ρ_∞ — плотность покоящегося газа); \mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости безразмерных автомодельных переменных ξ , η ; k — отношение удельных теплоемкостей газа, $\epsilon = (k-1)/(k+1)$.

Краевыми условиями задачи являются:

а) условия на отраженной волне ОКА

$$(2) \quad \begin{aligned} v_{\xi} &= (1-\varepsilon) [1 - (1-\tau) \sin^2 \gamma] - N_1 (1-\tau) \sin \gamma \\ v_{\eta} &= (1-\varepsilon) (1-\tau) \cos \gamma \sin \gamma + N_1 (1-\tau) \cos \gamma \\ p &= \frac{1-\tau}{\varepsilon} [N_1 + (1-\varepsilon) \sin \gamma]^2 + (1-\varepsilon) \\ i &= \frac{1-\varepsilon^2}{2} + \frac{N_1^2}{2} (1-\tau^2) + \left(\frac{1-\varepsilon}{2} \right)^2 (1-\tau^2) \sin^2 \gamma - (1-\varepsilon) N_1 \tau^2 \sin \gamma \\ N_1 &= -\xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{d\eta}{d\xi} \end{aligned}$$

б) условия на волне Маха

$$(3) \quad \begin{aligned} v_{\xi} &= N_2 (1-\varepsilon\tau) \cos \omega, \quad v_{\eta} = -N_2 (1-\varepsilon\tau) \sin \omega \\ p &= (1-\varepsilon\tau) N_2^2, \quad i = \frac{1}{2} (1-\varepsilon^2\tau^2) N_2^2 \\ N_2 &= \xi \cos \omega - \eta \sin \omega, \quad \operatorname{tg} \omega = d\xi/d\eta \end{aligned}$$

в) условие обтекания

$$(4) \quad v_{\eta} = v_{\xi} \operatorname{tg} \beta, \quad \eta = \xi \operatorname{tg} \beta$$

г) условия непрерывности параметров газа на линии KN , уравнение которой

$$(v_{\xi} - \xi)^2 + (v_{\eta} - \eta)^2 = a^2$$

где a — скорость звука;

д) условия непрерывности давления и нормальной компоненты вектора скорости частиц газа на тангенциальном разрыве AD .

При записи условий (2) было учтено, что за невозмущенным фронтом BA

$$v_{\xi} = 1 - \varepsilon, \quad v_{\eta} = 0, \quad p = 1 - \varepsilon, \quad \tau = 1, \quad i = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2)$$

В области конического потока систему (1) можно представить в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dv_{\xi}}{d\lambda} &= -\lambda \frac{dv_{\eta}}{d\lambda}, \quad (v_{\eta} - \lambda v_{\xi}) \frac{dv_{\eta}}{d\lambda} = -\varepsilon\tau \frac{dp}{d\lambda}, \quad \frac{di}{d\lambda} = \varepsilon\tau \frac{dp}{d\lambda} \\ (v_{\eta} - \lambda v_{\xi}) \frac{d\tau}{d\lambda} &= \tau \left(\frac{dv_{\eta}}{d\lambda} - \lambda \frac{dv_{\xi}}{d\lambda} + \frac{v_{\eta}}{\lambda} \right), \quad \lambda = \frac{\eta}{\xi} \end{aligned}$$

Краевыми условиями для системы (5) служат соотношения (4) и (2) при $N_1 = 0$.

При решении задачи методом тонкого ударного слоя [2, 3] следует учитывать неравномерность асимптотики по малому параметру ε .

В области OKN имеем

$$(6) \quad \begin{aligned} v_{\xi} &= 1 + \varepsilon u + \dots, \quad v_{\eta} = \varepsilon v + \dots, \quad p = 1 + \sqrt{\varepsilon} p_1 + \dots \\ \tau &= 1 + \sqrt{\varepsilon} \tau_1 + \dots, \quad i = \frac{1}{2} + \sqrt{\varepsilon} i_1 + \dots, \quad \lambda = \sqrt{\varepsilon} \mu \end{aligned}$$

Подставляя (6) в (5), получаем

$$\frac{du}{d\mu} = 0, \quad \mu \frac{dv}{d\mu} = \frac{dp_1}{d\mu}, \quad \mu \frac{d\tau_1}{d\mu} = \frac{dv}{d\mu} + \frac{v}{\mu}, \quad \frac{di_1}{d\mu} = 0$$

откуда с учетом граничных условий (2) находим

$$(7) \quad \begin{aligned} u &= -1, \quad i_1 = p_1 + \tau_1 = 0, \quad v = c_0 \sqrt{1 - \mu^2} / \mu \\ p_1 &= -\tau_1 = c_0 \ln [(1 + \sqrt{1 - \mu^2}) / \mu] \end{aligned}$$

При этом на OK $\mu=1+O(\sqrt{\epsilon})$.

Из условия обтекания (4) будем иметь

$$(8) \quad c_0 = \sqrt{\epsilon} \beta_0^2$$

Сравнивая (6)–(8), легко видеть, что при $\mu=O(1)$ $v_\eta=O(\epsilon)^{3/2}$ и, следовательно, $v=0$ почти во всей области конического течения, за исключением «пограничного слоя» – малой окрестности поверхности конуса, где $\mu=O(\sqrt{\epsilon})$. Внутри этой области $v=\beta_0^2/\nu$ ($\nu=\mu/\sqrt{\epsilon}$) – величина порядка единицы.

К тому же результату придем, если, следуя общепринятой методике [4, 5], построим внутреннее разложение для «пограничного» слоя при $\mu=\sqrt{\epsilon}v$.

Далее из (6) и (8) имеем $p=1+O(\epsilon)$, $\tau=1+O(\epsilon)$ вне пограничного слоя и $p=1+O(\epsilon \ln \epsilon)$, $\tau=1+O(\epsilon \ln \epsilon)$ внутри пограничного слоя; таким образом, во всей области конического течения следует считать $p_1=\tau_1=0$. Однако при этом необходимо иметь в виду, что производные $dp/d\mu$ и $d\tau/d\mu$ внутри пограничного слоя имеют порядок $\sqrt{\epsilon}$

$$\frac{dp}{d\mu} = -\frac{d\tau}{d\mu} = -\sqrt{\epsilon} \frac{\beta_0^2}{\nu} + \dots$$

В области (II), примыкающей к звуковой линии KN , справедливы следующие представления зависимых и независимых переменных

$$(9) \quad \begin{aligned} v_\xi &= 1 + \epsilon u + \dots, & v_\eta &= \epsilon v + \dots, & p &= 1 + \sqrt{\epsilon} p_1 + \dots, \\ \tau &= 1 + \sqrt{\epsilon} \tau_1 + \dots, & i &= 1/2 + \sqrt{\epsilon} i_1 + \dots, & \xi &= 1 + \sqrt{\epsilon} \epsilon, & \eta &= \sqrt{\epsilon} \delta \end{aligned}$$

Так как при переходе через звуковую линию параметры потока не терпят разрыва, то на линии KN будем иметь

$$(10) \quad \sigma^2 + \delta^2 = 1, \quad u = -1, \quad v = -c_0 \sigma / \delta, \quad p_1 = -\tau_1 = 0, \quad i_1 = 0$$

Подставляя (9) в (1), приходим к системе уравнений

$$(11) \quad \begin{aligned} \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \delta \frac{\partial u}{\partial \delta} &= \frac{\partial p_1}{\partial \delta}, & \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \delta \frac{\partial v}{\partial \delta} &= \frac{\partial p_1}{\partial \delta} \\ \sigma \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma} + \delta \frac{\partial \tau_1}{\partial \delta} &= \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial \delta} + \frac{v}{\delta}, & p_1 + \tau_1 &= 0 \end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам R, φ ($\sigma=R \cos \varphi$, $\delta=R \sin \varphi$). Тогда из (11) получим

$$(12) \quad R^2(1-R^2)p_{1RR} + 2R(1-R^2)p_{1R} + p_{1\varphi\varphi} + \operatorname{ctg} \varphi p_{1\varphi} = 0$$

Запишем краевые условия для уравнения (12).

Соотношения (10) дают

$$(13) \quad p_1 = 0, \quad R = 1$$

Так как система (11) имеет особенность при $\delta=0$, то необходимо исследовать характер поведения решения в окрестности поверхности конуса $\delta=\sqrt{\epsilon}\beta_0$. Из (11) и (4) следует, что для малых δ $v \approx c_0/\delta$. Тогда из второго уравнения системы (11) находим, что при $\delta=0(1)$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \delta} \approx -\frac{c_0}{\delta}, \quad \text{или} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \frac{\partial p_1}{\partial \delta} = -c_0.$$

В переменных R, φ последнее соотношение принимает вид

$$(14) \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pi-0} \sin \varphi \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = c_0$$

В дальнейшем при построении решения вместо (4) будем использовать условие (14). Еще одно краевое условие для уравнения (12) получаем, сравнивая соотношения (10) с асимптотическими разложениями параметров течения в области (III), примыкающей к тангенциальному разрыву AD .

Для этой области имеем

$$(15) \quad \xi = 1 + \varepsilon \xi, \quad \eta = \sqrt{\varepsilon} \delta, \quad v_\xi = 1 + \varepsilon u + \dots, \quad v_\eta = \varepsilon v_0 + \dots, \\ p = 1 + \varepsilon p_2 + \dots, \quad \tau = 1 + \varepsilon \tau_2 + \dots, \quad i = \frac{1}{2} + \varepsilon i_2 + \dots$$

Сравнивая (10) и (15), получаем

$$(16) \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2+0} p_1 = 0$$

Легко убедиться, что решение краевой задачи (12) — (14), (16) можно представить в виде

$$p_1 = -\frac{1}{2} c_0 \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \frac{1-R \cos \varphi}{1+R \cos \varphi}$$

Тогда из (11) с учетом (10) имеем

$$(17) \quad u = -1 + c_0 \frac{1-R}{R} + c_0 \ln \frac{R \sin \varphi}{\sqrt{1-R^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$(18) \quad v = -c_0 \frac{c \operatorname{tg} \varphi}{R}$$

Заметим, что в (17) второе слагаемое следует учитывать лишь при $R = O(\sqrt{\varepsilon})$, т. е. в малой окрестности точки $R=0$, а третье слагаемое мало во всей области (II) и его можно отбросить. Выражение (18) показывает, что v отлично от нуля лишь вблизи поверхности конуса при $\delta = O(\sqrt{\varepsilon})$. Из (17) и (18) следует, что при приближении к области (III) слева ($\sigma \rightarrow -0$) имеем

$$(19) \quad u \rightarrow -1 + c_0(1-\delta)/\delta, \quad v \rightarrow 0$$

Для области (III) из (1) с учетом (15) получим

$$(20) \quad (u-\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v_0-\delta) \frac{\partial u}{\partial \delta} = -\frac{\partial p_2}{\partial \xi}$$

$$(u-\xi) \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + (v_0-\delta) \frac{\partial v_0}{\partial \delta} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \delta} + \frac{v_0}{\delta} = 0$$

Слева от тангенциального разрыва течение в области (III) описывается особым решением [6] системы (20)

$$u = f_1(\delta), \quad v_0 = 0, \quad p_2 = \xi \delta f_1'(\delta) + f_2(\delta)$$

Произвольную функцию $f_1(\delta)$ найдем из условия срачивания в переходной области построенного решения с решением (17). В силу (19) имеем

$$(21) \quad u = -1 + c_0 \frac{(1-\delta)}{\delta}, \quad p_2 = -\frac{c_0}{\delta} \zeta + f_2(\delta)$$

Функция $f_2(\delta)$ должна быть определена из условия непрерывности давления на тангенциальном разрыве AD после построения решения в области ACD . Течение в этой области описывается общим решением системы (20), которое может быть найдено методом, аналогичным использованному в [6]. Параметрическое представление общего решения системы (20), содержащего три произвольные функции, имеет вид

$$(22) \quad \begin{aligned} v_0 &= q \\ u &= -\frac{1}{\delta^2} \{-q(\delta-q)^2 H''(q) + 2(\delta-q)^2 H'(q) + \\ &+ 2(2\delta-q)H(q) + (2\delta-q)L(\delta) - \delta(\delta-q)L'(\delta)\} \\ \zeta &= -\frac{1}{\delta} \{(\delta-q)^2 H''(q) + 2(\delta-q)H'(q) + 2H(q) + L(\delta)\} \\ p_2 &= \int (\delta-q) \frac{\partial \zeta}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial \delta} dq + M(\delta), \end{aligned}$$

где q — некоторый параметр, сохраняющий постоянное значение вдоль траектории частиц газа, уравнение которой в переменных ζ, δ имеет вид $d\zeta / (u - \zeta) = d\delta / (v_0 - \delta)$; $H(q), L(\delta), M(\delta)$ — произвольные функции своих аргументов.

Для нахождения функции $L(\delta)$ имеем условие непрерывности нормальной компоненты вектора скорости на тангенциальном разрыве AD

$$(23) \quad (u^+ - \zeta) / (u^- - \zeta) = -(v_0^+ - \delta) / \delta, \quad q = c$$

где c — значение параметра q на AD , минусом и плюсом отмечены значения параметров течения слева и справа от AD .

Из (21) — (23) получим $L(\delta) = D\delta^2 + E\delta + F$, где D, E, F — некоторые постоянные. Положим $H(q) = qH_1(q) - 1/2 Dq^2 - 1/2 E\delta - 1/2 F$. Тогда выражения (22) приводятся к виду

$$(24) \quad \begin{aligned} v_0 &= q, \quad u = q^2 \delta^{-2} (\delta - q)^2 H_1''(q) - 2H_1(q) \\ \zeta &= -q\delta^{-1} (\delta - q)^2 H_1''(q) - 2(\delta - q)H_1'(q) - 2H_1(q) \\ p_2 &= -\int (\delta - q)^4 \delta^{-4} q^3 H_1'''(q) [qH_1'''(q) + 3H_1''(q)] dq + M(\delta) \end{aligned}$$

Функции $H_1(q), M(\delta)$ и уравнение фронта волны Маха $\zeta = \zeta_0(\delta)$ находятся из условий динамической совместности (3), которые с учетом (15) могут быть записаны в виде

$$(25) \quad \begin{aligned} u &= \zeta_0 - \zeta_0'^2 - \delta \zeta_0' - 1, \quad v_0 = -\zeta_0' \\ p &= 2\zeta_0 - \zeta_0'^2 - 2\delta \zeta_0' - 1 \end{aligned}$$

Исключив $H_1(q)$ из (24) и (25), после преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения формы фронта волны Маха

$$(26) \quad \delta [1 - (\delta + \zeta_0')^2] \zeta_0''' - 2\delta (\delta + \zeta_0')^{-1} (\zeta_0'')^2 + [2 - 3(\delta + \zeta_0')^2] \zeta_0'' = 0$$

Для уравнения (26) имеем условие в тройной точке А

$$(27) \quad \zeta_0(1) = 0$$

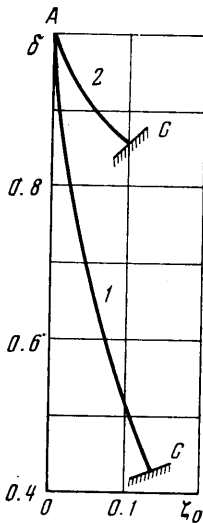
Аналогично тому как это было сделано при выводе краевого условия (14), условие перпендикулярности волны Маха к поверхности конуса запишем в виде

$$(28) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 \zeta_0'(\delta) = -\delta_0^3, \quad \delta_0 = \sqrt{\epsilon} \beta_0$$

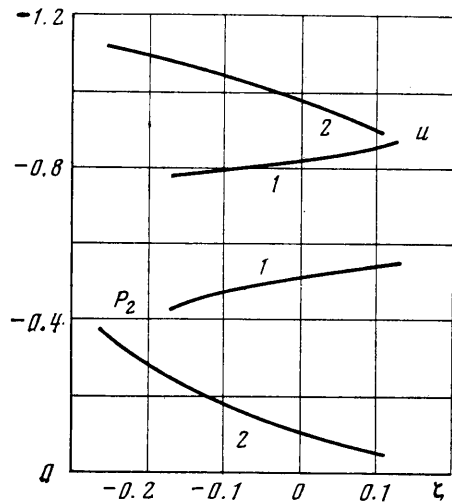
Кроме того, условие прохождения тангенциального разрыва через точку А (0, 1) совместно с (24) и (25) дает

$$(29) \quad \zeta_0'(1) = 0$$

Краевая задача (26) — (29) решалась численно на ЭВМ. Результаты расчетов представлены на фиг. 2, где кривым 1, 2 соответствуют значения



Фиг. 2



Фиг. 3

$\beta_0 = 1, 2$. После определения формы фронта волны Маха давление найдем из (24)

$$(30) \quad p_2(\delta, t) = \frac{1}{\delta^4} \int_{\delta}^t \frac{t^2(\delta+z)^4}{(t+z)^5} \{t^2 z' [(t+z)^2 - 1] - z\} dt + \\ + 2\zeta_0(\delta) - \zeta_0''(\delta) - 2\delta \zeta_0'(\delta) - 1$$

Здесь $z = \zeta_0'(t)$, t — значение δ в точке пересечения траектории частицы с фронтом волны Маха. Из (24) и (30) получим распределение параметров течения вдоль поверхности тела

$$(31) \quad p_2 = 2S_0 + \delta_0^2 - 1 - \frac{1-2\delta_0}{243\delta_0} \left[16 \ln h + \frac{h^4}{4} + \frac{8}{3} h^3 + 12h^2 + 32h - 46 \frac{11}{12} \right] \\ u = -\frac{1-2\delta_0}{18\delta_0} (2+h)^2 + k_0 \\ \zeta = \frac{1-2\delta_0}{18\delta_0} (2+h)^2 - \frac{1-3\delta_0}{3\delta_0} (2+h) + k_0$$

где $S_0 = \zeta_0(\delta_0)$, $k_0 = S_0 - 2 + 1/2\delta_0$.

Результаты расчетов по формулам (31) при $\beta_0 = 1, 2$ (кривые 1, 2 соответственно) представлены на фиг. 3.

Авторы выражают признательность А. А. Грибу за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 21 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Богатко В. И., Колтон Г. А. О нерегулярном отражении сильной ударной волны от тонкого клина. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
3. Гонор А. Л., Остапенко Н. А. Гиперзвуковое обтекание крыльев с маховской системой ударных волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
5. Коул Д. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
6. Богатко В. И., Гриб А. А., Колтон Г. А. О некоторых решениях уравнений газовой динамики, содержащих произвольные функции. В сб. «Газодинамика и теплообмен». Сб. 4. Изд-во ЛГУ, 1975.