

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ,
ВРАЩАЮЩИХСЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, Н. К. РАДЯКИН

(Харьков)

Рассматривается задача о малых собственных колебаниях двух коаксиально расположенных идеальных жидкостей, вращающихся в цилиндрическом сосуде в условиях полной невесомости. Выяснено, что совокупность нормальных колебаний системы состоит из внутренних волновых движений и поверхностных волн. Для частот колебаний поверхностных волн получены асимптотические формулы. Результаты расчетов на ЭВМ представлены в виде графиков и таблиц.

1. Постановка задачи. Пусть две идеальные несжимаемые жидкости полностью заполняют цилиндрический сосуд радиуса R_1 и высоты H и равномерно вращаются вместе с ним с угловой скоростью $\omega^0 k$, где k — орт оси симметрии Oz , а $\omega^0 > 0$. Будем считать, что угол смачивания для этих жидкостей равен прямому; тогда в состоянии относительного равновесия при полной невесомости жидкости расположатся коаксиально, причем жидкость с меньшей плотностью ρ_1 будет находиться у оси вращения.

Перейдем к безразмерным переменным, приняв в качестве характерных величин: длины — радиус R границы раздела жидкостей, плотности — величину $\rho = \rho_1 + \rho_2$, времени — некоторую величину T .

Будем считать также, что безразмерная высота цилиндра $h = H/R$ не превышает критическое значение h_* , которое находится из условия устойчивости [1]

$$(1.1) \quad \beta^2(h) = \min_{|m|+p>0} \beta_{mp}^2(h) \equiv \min_{|m|+p>0} \{ \sigma [m^2 - 1 + \pi^2 p^2 / h^2] + \Delta \rho \omega_0^2 \} > 0, \\ \beta^2(h_*) = 0$$

Здесь m и p — целые, а остальные безразмерные величины равны $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\omega_0 = \omega^0 T$, $\sigma = \sigma^0 T^2 (\rho R^3)^{-1}$ (σ^0 — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей). Из (1.1) видно, что минимум реализуется при $m=0$, $p=1$; тогда

$$h_*(\omega_0) = \pi \sqrt{1 - \omega_0^2 \Delta \rho / \sigma}$$

При $h > h_*$ устойчивость теряется на осесимметричных возмущениях [1].

Учет капиллярных сил может привести к неустойчивости системы. Действительно, из (1.1) следует, что при фиксированных ω_0 , $\rho_2 > \rho_1$ и достаточно больших σ будет $\beta^2(h) < 0$ для $h > \pi$; в то же время при $\sigma = 0$, $\rho_2 > \rho_1$ система устойчива для всех значений h .

Рассмотрим задачу о малых свободных колебаниях жидкостей относительно равномерного вращения. Уравнения и граничные условия запишем в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , равномерно вращающейся вместе с жидкостями с угловой скоростью ω_0 . Учитывая, что в состоянии

равновесия давления в жидкостях распределены по законам

$$(1.2) \quad P_j(r) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \rho_j r^2 + C_j \quad (j=1, 2)$$

и выделяя у искомых величин временной множитель $\exp(i\omega t)$, получим для пространственных множителей поля скоростей $u_j = u_j(r, \theta, z)$ и отклонений поля давлений $p_j = p_j(r, \theta, z)$ от функций (1.2) следующую систему уравнений и граничных условий [2-5]:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} i\omega u_j &= 2\omega_0 u_j \times \mathbf{k} - \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j, \quad \operatorname{div} u_j = 0 \\ 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (j=1), \quad 1 \leq r \leq l = R_1/R > 1 \quad (j=2) \\ u_{jz} &= 0 \quad (z=0, h; j=1, 2); \quad u_{2r} = 0 \quad (r=l); \quad u_{1r} = u_{2r} \quad (r=1) \\ i\omega (p_1 - p_2) &= -\sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1 \right) u_{1r} + \omega_0^2 \Delta \rho u_{1r} \quad (r=1) \end{aligned}$$

В задаче (1.3) при выполнении условия (1.1) частоты колебаний ω могут быть только вещественными [4].

2. Вывод характеристического уравнения. Решения задачи (1.3) будем искать в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u_j &= -\omega^2 \nabla \Phi_j + 2i\omega_0 \nabla \Phi_j \times \mathbf{k} + 4\omega_0^2 (\nabla \Phi_j \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \\ p_j &= i\omega \rho_j (\omega^2 - 4\omega_0^2) \Phi_j \quad (j=1, 2) \end{aligned}$$

где $\Phi_j = \Phi_j(r, \theta, z)$ — функции состояния [4], являющиеся аналогом потенциала скорости и применяющиеся при исследовании малых движений, близких к равномерному вращению. Разделим в (1.3) с учетом (2.1) переменные, представив Φ_j в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi_j(r, \theta, z) &= \varphi_j(r, z) \exp(-im\theta), \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \varphi_j(r, z) &= f_{jmp}(r) \cos(\mu_p z), \quad \mu_p = \pi p/h, \quad p=0, 1, 2, \dots, \quad j=1, 2 \end{aligned}$$

Здесь функции $\varphi_j(r, z)$ можно считать вещественными, а $u_j = f_{jmp}(r)$ являются решениями следующей задачи:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 u_j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_j}{dr} + \left[\mu_p^2 \left(\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{m^2}{r^2} \right] u_j &= 0 \quad (j=1, 2) \\ \frac{du_1}{dr} - \frac{2\omega_0 m}{\omega} u_1 = \frac{du_2}{dr} - \frac{2\omega_0 m}{\omega} u_2 \quad (r=1) \\ \frac{du_2}{dr} - \frac{2\omega_0 m}{\omega l} u_2 &= 0 \quad (r=l) \\ (\omega^2 - 4\omega_0^2) (\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2) &= \beta_{mp}^2 \left(\frac{du_1}{dr} - \frac{2\omega_0 m}{\omega} u_1 \right) \quad (r=1) \end{aligned}$$

Из (2.2), (2.3) видно, что одному и тому же решению $\varphi_1 = \varphi_1(r, z)$, $\varphi_2 = \varphi_2(r, z)$ отвечает как пара $(\omega_m; m)$, так и пара $(-\omega_m; -m)$. Поэтому, рассматривая задачу (2.2), (2.3) при всех $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, достаточно ограничиться случаем $\omega > 0$; тогда значениям $m > 0$ отвечают прямые волны, бегущие в сторону вращения сосуда с жидкостями, а $m < 0$ — обратные волны; при $m=0$ получаем стоячие волны.

Исследуя пространственные колебания ($p \neq 0$), разберем отдельно два основных случая.

а) При $\omega < 2\omega_0$ получаем

$$(2.4) \quad \mu_p^2 \left(\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \equiv \kappa > 0$$

поэтому уравнения (2.3) с учетом условия $|u_i(0)| < \infty$ имеют общие решения

$$(2.5) \quad u_1 = C_1 J_{|m|}(r\kappa^{1/2}), \quad u_2 = C_2 J_{|m|}(r\kappa^{1/2}) + C_3 N_{|m|}(r\kappa^{1/2})$$

где $J_n(r)$ и $N_n(r)$ — функции Бесселя и Неймана соответственно, а C_j — произвольные постоянные. Подставляя (2.5) в граничные условия (2.3), приходим к однородной алгебраической системе трех линейных уравнений для определения коэффициентов C_j . Приравняв нулю определитель этой системы, после простых преобразований получим характеристическое уравнение для нахождения чисел κ , связанных с частотами колебаний ω соотношением (2.4)

$$(2.6) \quad \Psi_1(\kappa^{1/2}) \equiv -\{\rho_1 J_{|m|}(\kappa^{1/2}) D_{mp}(\kappa^{1/2}) - \rho_2 D_{mp}[J; 1] E_{mp}(\kappa^{1/2})\} \frac{4\omega_0^2 \kappa}{\beta_{mp}^2 (\kappa + \mu_p^2)} = D_{mp}[J; 1] D_{mp}(\kappa^{1/2})$$

$(m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; p=1, 2, \dots)$

$$D_{mp}(\kappa^{1/2}) \equiv D_{mp}[J; 1] D_{mp}[N; l] - D_{mp}[N; 1] D_{mp}[J; l]$$

$$E_{mp}(\kappa^{1/2}) \equiv N_{|m|}(\kappa^{1/2}) D_{mp}[J; l] - J_{|m|}(\kappa^{1/2}) D_{mp}[N; l]$$

$$(2.7) \quad D_{mp}[J; l] \equiv \kappa^{1/2} J'_{|m|}(l\kappa^{1/2}) - \frac{m}{l} \sqrt{1 + \kappa \mu_p^{-2}} J_{|m|}(l\kappa^{1/2})$$

$$D_{mp}[N; l] \equiv \kappa^{1/2} N'_{|m|}(l\kappa^{1/2}) - \frac{m}{l} \sqrt{1 + \kappa \mu_p^{-2}} N_{|m|}(l\kappa^{1/2})$$

Нули функции $D_{mp}[J; 1]$ определяют частоты колебаний жидкости, вращающейся в полностью заполненном цилиндрическом сосуде радиуса $r=1$, а нули $D_{mp}(\kappa^{1/2})$ — для аналогичной задачи между двумя коаксиальными цилиндрами $r=1$ и $r=l>1$.

б) Второй вариант $\omega > 2\omega_0$ дает в (2.4) $\kappa = -\nu^2 < 0$, из (2.3) имеем

$$(2.8) \quad u_1 = C_1 I_{|m|}(\nu r), \quad u_2 = C_2 I_{|m|}(\nu r) + C_3 K_{|m|}(\nu r)$$

где $I_n(r)$ и $K_n(r)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда. Характеристическое уравнение для определения чисел ν в этом случае принимает вид

$$(2.9) \quad \Psi_2(\nu) \equiv \{\rho_1 I_{|m|}(\nu) G_{mp}(\nu) - \rho_2 G_{mp}[I; 1] F_{mp}(\nu)\} \frac{4\omega_0^2 \nu}{\beta_{mp}^2 (\mu_p^2 - \nu^2)} =$$

$$= G_{mp}(\nu) G_{mp}[I; 1] \quad (0 < \nu < \mu_p; m=0, \pm 1, \pm 2, \dots; p=1, 2, \dots)$$

$$G_{mp}(\nu) \equiv G_{mp}[I; 1] G_{mp}[K; l] - G_{mp}[K; 1] G_{mp}[I; l]$$

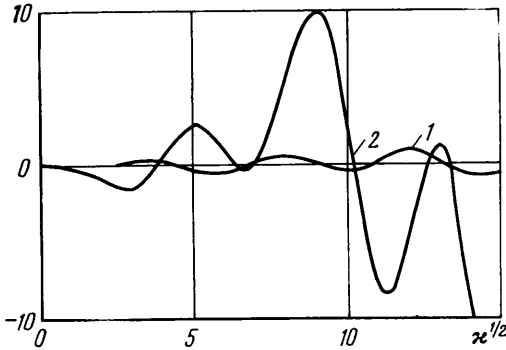
$$F_{mp}(\nu) \equiv K_{|m|}(\nu) G_{mp}[I; l] - I_{|m|}(\nu) G_{mp}[K; l]$$

$$G_{mp}[I; l] \equiv \nu I_{|m|+1}(\nu l) + \frac{|m|}{l} [1 + \text{sign } m \sqrt{1 - \nu^2 \mu_p^{-2}}] I_{|m|}(\nu l) > 0$$

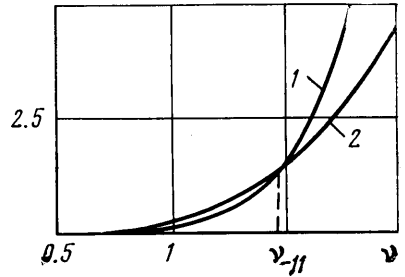
$$G_{mp}[K; l] \equiv -\left\{ \nu K_{|m|-1}(\nu l) + \frac{|m|}{l} [1 + \text{sign } m \sqrt{1 - \nu^2 \mu_p^{-2}}] K_{|m|}(\nu l) \right\} < 0$$

При $\omega=2\omega_0$ ($\kappa=0, p \neq 0$) получаем тривиальное решение исходной задачи (1.3).

3. Графическое решение. Рассмотрим сначала характеристическое уравнение (2.6). На фиг. 1 представлены графики функций $\Psi_1(\kappa^{1/2})$ (кривая 1)



Фиг. 1



Фиг. 2

и $D_{mp}[J; 1]D_{mp}(\kappa^{1/2})$ (кривая 2) для случая $\rho_1=1/3, \rho_2=2/3, \sigma=\omega_0=1, h=l=1.5, m=0, p=1$. Точки пересечения $\kappa=\kappa_{mpq}$ ($q=1, 2, \dots$) являются корнями уравнения (2.6), по которым находятся частоты колебаний

$$(3.1) \quad \omega_{mpq} = 2\omega_0 / \sqrt{1 + \kappa_{mpq} \mu_p}^{-2} < 2\omega_0$$

Наиболее просто уравнение (2.6) исследуется при $\sigma=\infty$, когда можно считать, что вместо поверхности раздела при $r=1$ имеется твердая стенка. В этом случае $\beta_{mp}^2 = \infty$ (см. (1.1)) и (2.6) упрощается

$$(3.2) \quad D_{mp}[J; 1]D_{mp}(\kappa^{1/2}) = 0$$

Здесь каждый из сомножителей осциллирует и при $\kappa \rightarrow \infty$ левая часть ведет себя асимптотически

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & [8(\pi l)^{-3} \mu_p^{-2}]^{1/2} \sqrt{1 + m^2 \mu_p^{-2} \kappa^{3/4}} \sin(\kappa^{1/2} - \alpha) \sin[(l-1)\kappa^{1/2} - \beta] [1 + O(\kappa^{-1/2})] \\ & \alpha = \arcsin [\mu_p^2 (m^2 + \mu_p^2)^{-1/2}] + \pi/2 (|m| + 1) + \pi/4 \\ & \beta = \arcsin \{ (l-1) [(l-1)^2 + (m\mu_p^{-1} + l\mu_p m^{-1})^2]^{-1/2} \} > 0 \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (3.2) имеет при каждом m, p счетное множество решений $\{\kappa_{mpq}(\infty)\}_{q=1}^{\infty}$, причем, как видно из (3.2), это множество распадается на две совокупности $\{\kappa_{m p n}^1(\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\kappa_{m p s}^2(\infty)\}_{s=1}^{\infty}$, отвечающие нулям функций $D_{mp}[J; 1]$ и $D_{mp}(\kappa^{1/2})$ соответственно. Первому множеству отвечают колебания с частотами $\omega_{m p n}^1(\infty)$ (внутренние волны) первой жидкости при неподвижной границе раздела $r=1$, а второму — частоты $\omega_{m p s}^2(\infty)$ и внутренние волны во второй жидкости, расположенной между коаксиальными твердыми цилиндрами. Нетрудно показать, опираясь на (3.1) и (3.3), что каждое из множеств $\{\omega_{m p n}^1(\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\omega_{m p s}^2(\infty)\}_{s=1}^{\infty}$ является плотным на отрезке $[0, 2\omega_0]$.

Рассуждениями, аналогичными проведенным в [5], можно доказать, что при $\sigma < \infty$ уравнение (2.6) при фиксированных m, p также имеет счетное множество решений $\kappa = \kappa_{mpq}, q=1, 2, 3, \dots$. При изменении σ от зна-

чения $\sigma \rightarrow \infty$ до некоторого конечного получаем два множества частот $\{\omega_{m p n}^1(\sigma)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\omega_{m p s}^2(\sigma)\}_{s=1}^{\infty}$, отвечающих внутренним волнам главным образом либо в первой, либо во второй жидкости. При этом граница раздела двух жидкостей слабо отклоняется от равновесного положения $r=1$.

Если любой из параметров m, p, q, σ стремится к бесконечности, то числа $\omega_{m p q}(\sigma)$ стремятся к $\omega_{m p q}(\infty)$. В самом деле, при $m, p, \sigma \rightarrow \infty$ будет $\beta_{m p}^2 \rightarrow \infty$, и потому влияние левой части (2.6) будет малым; при $q \rightarrow \infty$, как следует из (3.3) и асимптотического разложения при $\kappa \gg 1$ левой части (2.6), главной будет также правая часть (2.6). Отсюда следует, что и при $\sigma < \infty$ каждое из множеств $\{\omega_{m p n}^1(\sigma)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\omega_{m p s}^2(\sigma)\}_{s=1}^{\infty}$ плотно на $[0, 2\omega_0]$.

Заметим также, что частоты колебаний внутренних волн мало зависят от плотностей ρ_1 и ρ_2 (по крайней мере при больших m, p, q и σ), так как эти параметры входят в левую часть (2.6), которая не является главной.

Рассмотрим теперь уравнение (2.9) на интервале $(0, \mu_p)$. На фиг. 2 приведены графики функций $\Psi_2(v)$ (кривая 1) и $G_{m p}(v)G_{m p}[I; 1]$ (кривая 2) для случая $\omega_0 = \sigma = 1, \rho_1 = 1/3, \rho_2 = 2/3, h = l = 1.5, m = -1, p = 1$. Эти кривые при любых значениях параметров m, p пересекаются в одной точке $v = v_{m p} < \mu_p$, которая определяет частоту

$$(3.4) \quad \omega_{m p} = 2\omega_0 / \sqrt{1 - v_{m p}^2 \mu_p^{-2}} > 2\omega_0$$

Собственные движения жидкостей, описываемые в данном случае функциями (2.8), имеют характер поверхностных волн: они экспоненциально затухают при отходе от поверхности раздела $r=1$ в глубь жидкостей. Такие волны родственны потенциальным колебаниям в невращающейся жидкости.

Можно доказать аналогично [4, 5], что решение уравнения (2.9) при $|m| \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое поведение

$$(3.5) \quad v_{m p} = \mu_p [1 + o(1)] \quad (|m|, p \rightarrow \infty)$$

Тогда из (3.4) следует, что спектр поверхностных волн дискретный и имеет единственную предельную точку $\omega = +\infty$.

До сих пор рассматривались пространственные колебания ($p \neq 0$). Случай плоскопараллельных колебаний весьма прост; здесь задача (2.2), (2.3) имеет решения

$$\omega_m = \frac{\omega_0(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{sign} m + \sqrt{\omega_0^2(\rho_1 - \rho_2)^2 + \beta_{m 0}^2 |m| (\rho_1 - \rho_2 \chi_m)}}{\rho_1 - \rho_2 \chi_m}$$

$$\chi_m = \frac{(1 + l^{-2|m|})}{(1 - l^{-2|m|})}, \quad |m| = 1, 2, \dots$$

которым отвечают поверхностные волны.

4. Асимптотические формулы. Найдем асимптотику частот поверхностных волн при $|m|, p \rightarrow \infty$. Будем считать жидкость капиллярной ($\sigma^0 > 0$) и возьмем за характерное время $T = [\rho R^3 / \sigma^0]^{1/2}$, тогда $\sigma = 1$.

При $p \rightarrow \infty$ (m фиксировано) за малый параметр можно принять $\mu_p^{-1} = (\pi p / h)^{-1}$, а решение $v = v_{m p}$ искать в виде ряда по отрицательным полуположительным степеням μ_p . Используя асимптотическое разложение для $I_{|m|}(x)$ и $K_{|m|}(x)$ при $x \gg 1$ (см. [6]), получим из (2.9)

$$v_{m p} = \mu_p \{ 1 - 2\omega_0^2 \mu_p^{-3} + \omega_0^2 \Delta \rho \mu_p^{-4} + 2\omega_0^2 [1/8 (12m^2 - 11) + \Delta \rho \omega_0^2] \mu_p^{-5} + 4m \omega_0^2 \Delta \rho \mu_p^{-11/2} \} + O(\mu_p^{-5})$$

$$(4.1) \quad \omega_{mp} = \mu_p^{1/2} \{1 + 1/4 \mu_p^{-1} \Delta \rho + [3/4 m^2 - 19/32 + 1/2 \omega_0^2 \Delta \rho] \mu_p^{-2} + \\ + m \omega_0 \Delta \rho \mu_p^{-5/2}\} + O(\mu_p^{-2}) \quad (p \rightarrow \infty)$$

Пусть теперь $|m| \rightarrow \infty$, а p фиксировано. Решение v_{mp} будем искать в виде ряда по степеням малого параметра $|m|^{-1/2}$. Тогда, воспользовавшись в (2.9) отрезками рядов для $I_{|m|}(x)$ и $K_{|m|}(x)$ (см. [6]), получим

$$(4.2) \quad \omega_{mp} = \mu_p \{1 - 2\omega_0^2 |m|^{-3} + 4\omega_0^3 \text{sign } m \Delta \rho |m|^{-5/2} + \\ + 2\omega_0^2 (3/2 \mu_p^2 - 1 + \Delta \rho \omega_0^2) |m|^{-5} + O(|m|^{-6})\} \\ \omega_{mp} = |m|^{1/2} \{1 + \text{sign } m \omega_0 \Delta \rho |m|^{-3/2} + (3/4 \mu_p^2 - 1/2 + \\ + 1/2 \omega_0^2 \Delta \rho) |m|^{-2} + O(|m|^{-5/2})\} \quad (|m| \rightarrow \infty)$$

Формулы (4.1), (4.2) не допускают предельного перехода $\sigma^0 \rightarrow 0$. Поэтому случай $\sigma^0 = 0$ (некапиллярная жидкость) нужно рассматривать отдельно. В качестве характерного времени выберем $T = (\omega^0)^{-1}$; тогда в (2.6) и (2.9) будет $\omega_0 = 1$, $\beta_{mp} = \Delta \rho > 0$.

В этом случае также существуют внутренние и поверхностные волны с прежними общими свойствами, а асимптотические формулы для вычисления частот колебаний поверхностных волн имеют вид

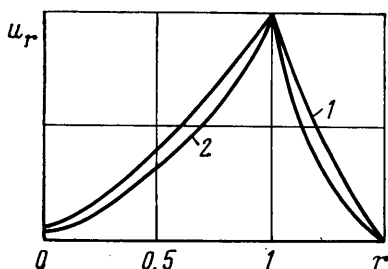
$$\omega_{mp} = \mu_p^{1/2} \{(\Delta \rho)^{1/2} + [1/4 (\Delta \rho)^{5/2} + 1/2 (\Delta \rho)^{1/2} + 1/2 (\Delta \rho)^{-1/2}] \mu_p^{-1} + m \mu_p^{-3/2} + \\ + O(\mu_p^{-2})\} \quad (p \rightarrow \infty)$$

$$\omega_{mp} = |m|^{1/2} \{(\Delta \rho)^{1/2} + \Delta \rho \text{sign } m |m|^{-1/2} + O(|m|^{-1})\} \quad (|m| \rightarrow \infty)$$

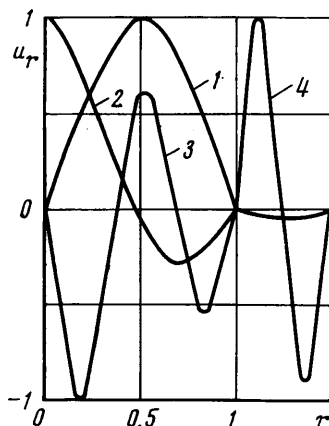
5. Результаты вычислений. На ЭВМ М-220 были рассчитаны частоты колебаний внутренних и поверхностных волн задачи (1.3). Все вычисления проведены для случая $\sigma = 1$, $h = l = 1.5$, $\rho_1 = 1/3$, $\rho_2 = 2/3$.

	ω_0	$m = -2$	-1	0	1	2
ω_{mp1}						
$p=1$	0.2	0.1754	0.2495	0.1917	0.1584	0.1340
	0.4	0.3507	0.4982	0.3828	0.3165	0.2680
	0.6	0.5256	0.7450	0.5725	0.4741	0.4019
	0.8	0.7001	0.9893	0.7604	0.6312	0.5355
	1.0	0.8741	1.230	0.9464	0.7874	0.6690
$p=2$	0.2	0.2890	0.3446	0.2951	0.2560	0.2251
	0.4	0.5779	0.6891	0.5902	0.5120	0.4501
	0.6	0.8667	1.033	0.8851	0.7679	0.6751
	0.8	1.155	1.378	1.180	1.024	0.9000
	1.0	1.444	1.722	1.474	1.279	1.125
ω_{mp}						
$p=1$	0.2	4.457	3.023	2.454	3.023	4.506
	0.4	4.455	3.054	2.496	3.071	4.554
	0.6	4.469	3.110	2.564	3.132	4.616
	0.8	4.498	3.190	2.658	3.215	4.693
	1.0	4.542	3.293	2.776	3.317	4.784
$p=2$	0.2	9.791	8.703	8.327	8.715	9.820
	0.4	9.796	8.720	8.350	8.743	9.854
	0.6	9.813	8.751	8.389	8.786	9.901
	0.8	9.842	8.796	8.443	8.843	9.960
	1.0	9.885	8.856	8.512	8.914	10.03

В таблице приведены результаты расчетов частот $\omega_{mp1}(\omega_0)$ и $\omega_{mp}(\omega_0)$ при $0.2 \leq \omega_0 \leq 1$, $-2 \leq m \leq 2$, $p=1,2$. Видно, что при увеличении ω_0 функции $\omega_{mp1}(\omega_0)$ возрастают, причем частоты обратных волн ω_{mp1}^- ($m < 0$) больше соответствующих частот прямых волн ω_{mp1}^+ ($m > 0$); этот факт имеет место при любых m , p и q . При $\omega_0 \rightarrow 0$ все $\omega_{mpq}(\omega_0) \rightarrow 0$ (см. (3.1)). Для частоты колебаний поверхностных волн $\omega_{mp}(\omega_0)$ также происходит расщепление, однако теперь $\omega_{mp}^+ > \omega_{mp}^- > 2\omega_0$. При $\omega_0 \rightarrow 0$ получаем предельные значения ω_{mp}^0 , соответствующие частотам потенциа-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных колебаний невращающейся системы. Наиболее простой вид формулы для ω_{mp}^0 имеют при $l = \infty$, т. е. для задачи колебаний одной жидкости в безграничной другой

$$(\omega_{mp}^0)^2 = \mu_p (\beta_{mp}^2)_{\omega_0=0} \left\{ \rho_1 \frac{I_{|m|}(\mu_p)}{I_{|m|}'(\mu_p)} + \rho_2 \frac{K_{|m|}(\mu_p)}{K_{|m|}'(\mu_p)} \right\}^{-1}$$

Расчеты на ЭВМ показали, что при $p \geq 3$, $|m| \geq 3$ отличие вычисленных значений $\omega_{mp}(\omega_0)$ от рассчитанных по любой из асимптотических формул (4.1), (4.2) не превышает 3%.

На фиг. 3 приведены графики радикальных компонент скоростей жидкостей поверхностных волн для случая $\rho_1 = 1/3$, $\rho_2 = 2/3$, $\omega_0 = \sigma = 1$ (кривая 1 — для $m=1$, $p=1$; кривая 2 — для $m=1$, $p=2$). Хорошо видно, что при отходе от поверхности раздела $r=1$ в глубь жидкостей происходит затухание поля скорости, причем с ростом p кривые круче подходят к границе раздела. Аналогичный характер имеют тангенциальные составляющие скоростей.

На фиг. 4 при тех же значениях параметров приведены графики нормальных компонент скоростей для внутренних волн (кривая 1 — для $m=0$, $p=1$, $q=1$; 2 — для $m=-1$, $p=2$, $q=2$; 3 — для $m=0$, $p=3$, $q=4$; 4 — для $m=1$, $p=2$, $q=5$, причем здесь $\omega_0=0.2$). Эти кривые имеют колебательный характер, как и должно быть для внутренних волн. Видно, что кривые 1, 2, 3 практически мало отличны от нуля в интервале $1 \leq r \leq 1.5$, а 4 — в интервале $0 \leq r \leq 1$; это означает, что числа ω_{mpq} при $q=1, 2, 4$ и выбранных m и p суть частоты колебаний внутренних волн в первой жидкости, а при $q=5$ — во второй.

Отметим в заключение, что в рассмотренном примере подтвердились общие свойства как задач о колебаниях жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде [4-5], так и задач о колебаниях системы из несмешивающихся жидкостей [7]. Новым обстоятельством, по-видимому, является тот факт, что для системы, состоящей из n вращающихся жидкостей, наряду с $(n-1)$ сериями поверхностных волновых движений имеется также n серий внутренних волн, обусловленных кориолисовыми силами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», вып. 6, М., ВЦ АН СССР, 1968.
 2. *Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», вып. 6, М., ВЦ АН СССР, 1968.
 3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1954, т. 18, № 1.
 4. *Копачевский Н. Д.* Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2.
 5. *Копачевский Н. Д., Радякин Н. К.* О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. Вопросы вычислительной математики и техники (материалы научных семинаров ФТИНТ). Киев; «Наукова думка», 1976.
 6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
 7. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях несмешивающихся жидкостей. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 5.
-