МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1976

УДК 532.59

ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЙ В ПРИСУТСТВИИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

С. Р. КЛАДЬКО

(Одесса)

Рассматривается в линейной постановке задача о движении двухслойной жидкости конечной глубины под действием давления, приложенного к ее поверхности, при наличии полубесконечной пластины. Получены выражения, определяющие вид возникающих поверхностных и внутренних волн. Приведены результаты численного расчета возвышения свободной поверхности и поверхности раздела, вызываемого приложенным давлением.

1. На поверхности жидкости, имеющей плотность ρ_2 и занимающей часть пространства $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant y\leqslant h$, $-\infty<z<\infty$, плавает слой другой жидкости плотности ρ_1 и толщины H. Задача состоит в определении вида поверхностных и внутренних волн, возникающих под действием давления $P(x, z, t)=\operatorname{Re}\{v(x)\exp i(kz-\omega t)\}$, прикладываемого к участку свободной поверхности $0\leqslant x\leqslant a$, $y=h+H$, $-\infty<z<\infty$, при наличии тонкой пластины, занимающей область $-\infty<x\leqslant -l$, $y=h+H$, $-\infty<z<\infty$. ($v(x)$ — функция, для которой существует преобразование Фурье).

Потенциалы скоростей $F_1(x, y, z, t)$ и $F_2(x, y, z, t)$ верхнего и нижнего слоев жидкости соответственно определяются из решения задачи [1, 2]

$$\Delta F_1(x, y, z, t)=0 \qquad (h\leqslant y\leqslant H)$$

$$\Delta F_2(x, y, z, t)=0 \qquad (0\leqslant y\leqslant h)$$

$$y=h_1: \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} g\frac{\partial F_1}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P}{\partial t} \quad (-l<x<\infty) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=0 \quad (-\infty<x\leqslant -l)$$

$$y=h: \frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2}-\delta\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}+g\varepsilon\frac{\partial F_1}{\partial y}=0, \quad y=0: \frac{\partial F_2}{\partial y}=0$$

Здесь $\delta=\rho_1/\rho_2-1$, $\varepsilon=1-\delta$, $h_1=h+H$.

Движение жидкости должно быть ограниченным в окрестности точки $(-l, h_1)$ и при $x\to\infty$ и затухать при $x\to-\infty$.

Функции $F_1(x, y, z, t)$ и $F_2(x, y, z, t)$ отыскиваются в виде $F_i(x, y, z, t)=\operatorname{Re}\{\varphi_i(x, y)\exp i(kz-\omega t)\}$ $(i=1, 2)$. Для определения $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ получаем краевую задачу:

$$\Delta\varphi_1-k^2\varphi_1=0 \quad (h\leqslant y\leqslant h_1), \quad \Delta\varphi_2-k^2\varphi_2=0 \quad (0\leqslant y\leqslant h)$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \quad (y=h_1, -\infty<x<-l) \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0 \quad (y=0) \tag{1.1}$$

$$y=h_1: \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\beta\varphi_1=0 \quad (-l<x<0, x>a), \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\beta\varphi_1=\frac{i\omega}{g\rho_1}v(x) \quad (0\leqslant x\leqslant a)$$

$$y=h: \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \qquad \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\delta\beta\varphi_1-\beta\varphi_2=0 \qquad (\beta=\omega^2/g)$$

$$|\varphi_1(x,y)|<M=\text{const}\quad r=[(x+l)^2+(y-h_1)^2]^{1/2}\to\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\varphi_1(x,y)=D_{1-}e^{kx}\quad \lim_{x\to-\infty}\varphi_2(x,y)=D_{2-}e^{kx},\quad k>0$$
$$\lim\varphi_1(x,y)=D_{1+}e^{i\eta_m x}f_m(y),\quad \lim_{x\to\infty}\varphi_2(x,y)=D_{2+}e^{i\eta_m x}\operatorname{ch}\mu_m y$$

Здесь D_{1+}, D_{2+}, D_{1-}, D_{2-} — постоянные, $\eta_m=[\mu_m^2-k^2]^{1/2}$ $(m=1,2)$ μ_m — положительные корни уравнения

$$K_2(\mu)=\operatorname{ch}\mu h(\mu\operatorname{sh}\mu H-\beta\operatorname{ch}\mu H)-\mu\operatorname{sh}\mu h\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\mu\operatorname{sh}\mu H-\operatorname{ch}\mu H\right)-$$
$$-\delta\beta\operatorname{sh}\mu h\operatorname{sh}\mu H=0$$

Функция $f_m(y)$ определена ниже в (2.5).

Применение к (1.1) преобразования Фурье по x приводит к функциональному уравнению [3], выполняющемуся в полосе $0<\tau<k$, $-\infty<\sigma<\infty$, и следующим соотношениям:

$$\Phi_{1+}(\alpha,h_1)+K(\alpha)\Phi_{1-}(\alpha,h_1)=D(\alpha)\tag{1.2}$$
$$K(\alpha)=[K_2(\gamma)]^{-1}\gamma\left[\operatorname{ch}\gamma h\operatorname{sh}\gamma H-\operatorname{sh}\gamma h\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\gamma\operatorname{sh}\gamma H-\delta\operatorname{ch}\gamma H\right)\right]$$
$$D(\alpha)=[K_2(\gamma)]^{-1}f(\alpha)e^{i\alpha l}\left[\delta\operatorname{sh}\gamma h\operatorname{sh}\gamma H-\operatorname{ch}\gamma H\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\gamma\operatorname{sh}\gamma h-\operatorname{ch}\gamma h\right)\right]$$
$$\Phi_i(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(x,y)e^{i\alpha x}\,dx\qquad(i=1,2)$$
$$\Phi_{1-}(\alpha,y)=\int_{-\infty}^{-l}\varphi_1(x,y)e^{i\alpha(x+l)}\,dx,\qquad \Phi_{1+}(\alpha,y)=\int_{-l}^{\infty}\varphi_1(x,y)e^{i\alpha(x+l)}\,dx$$
$$f(\alpha)=\frac{i\omega}{g\rho_1}\int_0^a v(x)e^{i\alpha x}\,dx,\qquad \alpha=\sigma+i\tau,\qquad \gamma^2=\alpha^2+k^2$$

Кроме того

$$\Phi_2(\alpha,y)=A_2(\alpha)\operatorname{ch}\gamma y\tag{1.3}$$
$$\Phi_1(\alpha,y)=A_2(\alpha)[R(\alpha)\operatorname{ch}\gamma y+\operatorname{th}\gamma h(1-R(\alpha))\operatorname{sh}\gamma y]\tag{1.4}$$
$$A_2(\alpha)=[K_2(\gamma)]^{-1}\delta[f(\alpha)-\beta e^{i\alpha l}\Phi_{1-}(\alpha,h_1)]$$
$$R(\alpha)=\frac{1}{\delta\beta}[\beta\operatorname{ch}^2\gamma h-\delta\beta\operatorname{sh}^2\gamma h-\varepsilon\gamma\operatorname{sh}\gamma h\operatorname{ch}\gamma h]$$

Из функционального уравнения (1.2) методом Винера — Хопфа [3, 4] определяется функция $\Phi_{1-}(\alpha,h_1)$

$$\Phi_{1-}(\alpha,h_1)=-K_-(\alpha)\left[P+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n f(i\delta_n)e^{-\delta_n l}g_n}{i\delta_n(i\delta_n-\alpha)K_+(i\delta_n)}+\sum\operatorname{Res}(\xi_*)\right]\tag{1.5}$$
$$K_+(\alpha)=-\frac{H+\delta h}{\beta\rho_0^2}\,\frac{(\alpha+ik)(\delta_0^2-\alpha^2)}{\prod_{m=1}^{2}\mu_m^{-2}(\eta_m^2-\alpha^2)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n(\sigma_n-i\alpha)}{\rho_n(\delta_n-i\alpha)}$$
$$K_-(\alpha)=(\alpha-ik)^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n(\delta_n+i\alpha)}{\nu_n(\sigma_n+i\alpha)}$$

$$g_n=[M_n]^{-1}\left[\cos\nu_n H\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\nu_n\sin\nu_n h+\cos\nu_n h\right)-\delta\sin\nu_n h\sin\nu_n H\right]$$

$$M_n=h_1\nu_n\cos\nu_n h\cos\nu_n H-\nu_n\left(h_1-\frac{2\varepsilon}{\beta}\right)\sin\nu_n h\sin\nu_n H+$$

$$+\left[1-\beta(h+\delta H)+\frac{\varepsilon H}{\beta}\nu_n^2\right]\sin\nu_n h\cos\nu_n H+$$

$$+\left[1-\beta(H+\delta h)+\frac{\varepsilon H}{\beta}\nu_n^2\right]\sin\nu_n h\sin\nu_n H$$

$$\delta_0=[\rho_0^2-k^2]^{1/2},\quad \delta_n=[\rho_n^2+k^2]^{1/2},\quad \sigma_n=[\nu_n^2+k^2]^{1/2}$$

Здесь $\pm\rho_0$, $\pm i\rho_n$ и $\pm\nu_n$ $(n=1,2,\ldots)$ — корни уравнений

$$\operatorname{ch}\rho h\frac{\operatorname{sh}\rho H}{\rho}-\frac{\operatorname{sh}\rho h}{\rho}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\rho\operatorname{sh}\rho H-\delta\operatorname{ch}\rho H\right)=0,\qquad K_2(i\nu)=0$$

соответственно, $P=\mathrm{const}$, ξ_* — корни уравнения $[f(\xi)]^{-1}=0$.

Применение обратного преобразования Фурье к выражениям (1.3) и (1.4) с учетом (1.5) дает решение задачи (1.1). Полученные выражения для $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ могут быть использованы для определения вида свободной поверхности (ζ_1) и поверхности раздела (ζ_2) [2]

$$\zeta_1(x,z,t)=\operatorname{Re}\left\{\left[\frac{i\omega}{g}\varphi_1(x,h_1)-\frac{v(x)}{g\rho_1}\right]e^{i(kz-\omega t)}\right\}\qquad(0<x<a)$$

(1.6) $$\zeta_1(x,z,t)=\operatorname{Re}\left\{\frac{i\omega}{g}\varphi_1(x,h_1)e^{i(kz-\omega t)}\right\}\qquad(-l<x<0\quad x>a)$$

$$\zeta_2(x,z,t)=\operatorname{Re}\left\{\frac{i\omega}{g\varepsilon}[\varphi_2(x,h)-\delta\varphi_1(x,h)]e^{i(kz-\omega t)}\right\}$$

2. Пусть $v(x)=P_0\sin(\pi x/a)$. Тогда

$$f(\alpha)=\frac{i\omega P_0\pi(1+e^{i\alpha a})}{g\rho_1 a(\pi^2/a^2-\alpha^2)}$$

(2.1) $$\Phi_{1-}(\alpha,h_1)=-K_-(\alpha)+C_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n e^{-\delta_n l}(1+e^{-\delta_n a})g_n}{\delta_n(i\delta_n-\alpha)(\pi^2/a^2+\delta_n^2)K_+(i\delta_n)}=-K_-(\alpha)\psi_-(\alpha)$$

$(C_0=\pi\omega P_0/g\rho_1 a)$

После подстановки (2.1) в (1.3), (1.4) и применения обратного преобразования Фурье решение задачи в рассматриваемом частном случае запишется так:

(2.2)

$$\varphi_1(x,y)=\psi_1(x,y)+iC_0\delta\{D_1(x,y)+B_1(x,y)\}\quad(x>a)$$

$$\varphi_1(x,y)=\psi_1(x,y)+iC_0\delta\{D_0(x,y)+D_2(x,y)+B_2(x,y)\}\quad(0<x<a)$$

$$\varphi_1(x,y)=\psi_1(x,y)+iC_0\delta B_3(x,y)\quad(-l<x<0)$$

$$\varphi_1(x,y)=\beta\frac{K_+(ik)\psi_-(ik)e^{k(l+x)}}{k[1+H+\delta(1+h)]}+$$

$$+\delta\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\sigma_n)\psi_-(i\sigma_n)L_n(y)}{R_n}e^{\sigma_n(l+x)}\qquad(x<-l)$$

$$\varphi_2(x,y)=\psi_2(x,y)+iC_0\delta\{S_1(x,y)+T_1(x,y)\}\quad(x>a)$$

$$\varphi_2(x,y)=\psi_2(x,y)+iC_0\delta\{S_0(x,y)+S_2(x,y)+T_2(x,y)\}\quad(0<x<a)$$

(2.3)
$$\varphi_2(x,y)=\psi_2(x,y)+iC_0\delta T_3(x,y)\quad(-l<x<0)$$

$$\varphi_2(x,y)=\delta\beta\frac{K_+(ik)\psi_-(ik)e^{k(l+x)}}{k[(1+H+\delta(1+h)]}+$$

$$+\delta\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_+(i\sigma_n)\psi_-(i\sigma_n)\cos\rho_n y}{R_n}e^{\sigma_n(x+l)}\qquad(x<-l)$$

$$\psi_1(x,y)=\delta\beta\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi^2/a^2+\delta_n{}^2)K_-(-i\delta_n)\psi_-(-i\delta_n)F_n(y)}{A_n}e^{-\delta_n(x+l)}-\right.$$

$$-i\sum_{m=1}^{2}\frac{(\pi^2/a^2-\mu_m{}^2)f_m(y)}{C_m}[K_-(\eta_m)\psi_-(\eta_m)e^{-i\eta_m(x+l)}-$$

$$\left.-K_-(-\eta_m)\psi_-(-\eta_m)e^{i\eta_m(x+l)}]\right\}$$

$$D_1(x,y)=-2\sum_{m=1}^{2}\frac{f_m(y)}{C_m}[\sin\eta_m x+\sin\eta_m(x-a)]$$

$$D_2(x,y)=-2\sum_{m=1}^{2}\frac{f_m(y)}{C_m}\sin\eta_m x,\qquad B_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(y)}{A_n}[e^{-\delta_n x}+e^{-\delta_n(x-a)}]$$

$$B_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(y)}{A_n}[e^{-\delta_n x}+e^{\delta_n(x-a)}],\qquad B_3(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(y)}{A_n}[e^{\delta_n x}+e^{\delta_n(x-a)}]$$

$$D_0(x,y)=\frac{af_0(y)}{\pi K_0}\sin(\pi x/a),\qquad S_0(x,y)=\frac{a\operatorname{ch}by}{\pi K_0}\sin(\pi x/a)$$

(2.4)
$$f_m(y)=\left(\frac{1}{\delta}\operatorname{ch}^2\mu_m h-\operatorname{sh}^2\mu_m h-\frac{\varepsilon}{\delta\beta}\mu_m\operatorname{sh}\mu_m h\operatorname{ch}\mu_m h\right)\operatorname{ch}\mu_m y+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{1}{\beta}\mu_m\operatorname{sh}\mu_m h-\operatorname{ch}\mu_m h\right)\operatorname{sh}\mu_m h\operatorname{sh}\mu_m y$$

(2.5)
$$F_n(y)=\left(\frac{1}{\delta}\cos^2\nu_n h+\sin^2\nu_n h+\frac{\varepsilon}{\delta\beta}\nu_n\sin\nu_n h\cos\nu_n h\right)\cos\nu_n y+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{1}{\beta}\nu_n\sin\nu_n h+\cos\nu_n h\right)\sin\nu_n h\sin\nu_n y$$

$$C_m=(\pi^2/a^2-\eta_m{}^2)\frac{\eta_m}{\mu_m}\left\{\mu_m\left(h_1-\frac{2\varepsilon}{\beta}\right)\operatorname{sh}\mu_m h\operatorname{sh}\mu_m H+\mu_m h_1\operatorname{ch}\mu_m h\operatorname{ch}\mu_m H+\right.$$

$$+\left[1-\beta(h+\delta H)-\frac{\varepsilon H}{\beta}\mu_m{}^2\right]\operatorname{sh}\mu_m h\operatorname{ch}\mu_m H+$$

$$\left.+\left[1-\beta(H+\delta h)-\frac{\varepsilon h}{\beta}\mu_m{}^2\right]\operatorname{ch}\mu_m h\operatorname{sh}\mu_m H\right\}$$

$$R_n=\frac{\sigma_n}{\rho_n}\left\{\left(1+\frac{\varepsilon h}{\beta}\rho_n{}^2\right)\cos\rho_n h\sin\rho_n H+\rho_n(H+\delta h)\cos\rho_n h\cos\rho_n H-\right.$$

$$- \rho_n \left(h+\delta H - \frac{2\varepsilon}{\beta} \right) \sin \rho_n h \sin \rho_n H + \left(\delta + \frac{\varepsilon H}{\beta} \rho_n^2 \right) \sin \rho_n h \cos \rho_n H \Bigg\}$$

$$K_0 = K_2(b), \qquad b = [\pi^2/a^2+k^2]^{1/2}, \qquad A_n = \frac{\delta_n}{\nu_n} (\pi^2/a^2+\delta_n^2) M_n$$

Выражения для $\psi_2(x, y)$, $S_1(x, y)$, $S_2(x. y)$, $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$, $T_3(x, y)$ получаются из выражений для $\psi_1(x, y)$, $D_1(x, y)$, $D_2(x, y)$, $B_1(x, y)$, $B_2(x, y)$, $B_3(x, y)$ соответственно заменой $F_n(y)$ на $\cos \nu_n y$ и $f_m(y)$ на $\operatorname{ch} \mu_m y$. Выражения, определяющие $f_0(y)$, $L_n(y)$, получаются из (2.4) и (2.5), если μ_m и ν_n заменить на b и ρ_n соответственно.

3. В случае $l/n_1 \gg 1$ в выражениях (2.2) и (2.3) можно опустить члены, содержащие $\exp(-\delta_n l)$, и вид свободной поверхности и поверхности раздела, согласно (1.6), запишется так:

$$\zeta_1(x, z, t) = f_1(x, z, t) - B_0\{D_1(x, h_1) + B_1(x, h_1)\} \cos (kz-\omega t) \qquad (x>a)$$

$$\zeta_1(x, z, t) = f_1(x, z, t) - B_0 \left\{ \left[D_0(x, h_1) - \frac{1}{\delta\beta} \right] \sin(\pi x/a) + \right.$$

$$\left. + D_2(x, h_1) + B_2(x, h_1) \right\} \cos(kz-\omega t) \qquad (0<x<a)$$

$$\zeta_1(x, z, t) = f_1(x, z, t) - B_0 B_3(x, h_1) \cos(kz-\omega t) \qquad (-l<x<0)$$

$$\zeta_2(x, z, t) = f(x, z, t) - \frac{B_0}{\varepsilon} \{S_1(x, h) - \delta D_1(x, h) +$$

$$+ T_1(x, h) - \delta B_1(x, h)\} \cos(kz-\omega t) \qquad (x>a)$$

$$\zeta_2(x, z, t) = f(x, z, t) - \frac{B_0}{\varepsilon} \{S_0(x, h) - \delta D_0(x, h) + S_2(x, h) -$$

$$- \delta D_2(x, h) + T_2(x, h) - \delta B_2(x, h)\} \cos(kz-\omega t) \qquad (0<x<a)$$

$$\zeta_2(x, z, t) = f(x, z, t) - \frac{B_0}{\varepsilon} [T_3(x, h) - \delta B_3(x, h)] \cos(kz-\omega t) \qquad (-t<x<0)$$

$$f(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega}{g\varepsilon} N(x, h) e^{i(kz-\omega t)} \right\},$$

$$f_1(x, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega}{g\varepsilon} N_1(x, h_1) e^{i(kz-\omega t)} \right\}, \qquad B_0 = P_0 \pi \delta\beta / g \rho_1 a$$

$$N(x, y) = -i\delta\beta P \sum_{m=1}^{2} \frac{\pi^2/a^2 - \mu_m^2}{C_m} [\operatorname{ch} \mu_m y - \delta f_m(y)] \times$$

$$\times [K_-(\eta_m) e^{-i\eta_m(x+l)} - K_-(-\eta_m) e^{i\eta_m(x+l)}]$$

Формула для $N_1(x, y)$ получается из последнего выражения заменой $\operatorname{ch} \mu_m y - \delta f_m(y)$ на $\operatorname{ch} \mu_m y$.

Для значений параметров $h=1$ *м*, $H=0.1$ *м*, $a=2$ *м*, $k=1$ *м*$^{-1}$, $\omega=4.43$ *сек*$^{-1}$, $\rho_1=1000$ *кг/м*^{3}, $\rho_2=1025$ *кг/м*^{3}, $P_0=100$ *н/м*^{2} был проведен численный расчет возвышения свободной поверхности и поверхности раздела, вызванного приложенным давлением. Результаты приведены ниже.

x	ζ_1	ζ_2	x	ζ_1	ζ_2
−1.0	−0.00008	0	1.75	0.03234	0.00066
−0.75	−0.00015	0	2.25	0.03047	0.00061
−0.50	−0.00028	−0.00001	2.50	0.01732	0.00034
−0.25	−0.00052	−0.00002	2.75	0.00060	0.00001
0.25	−0.00585	−0.00011	3.0	−0.01632	−0.00033
0.50	−0.00834	−0.00015	3.5	−0.03801	−0.00077
1.0	−0.00010	−0.00002	4.0	−0.03146	−0.00064
1.50	0.02219	0.00047	5.0	0.02957	0.00060

Таким образом, волны, возникающие на поверхности раздела, отличаются от соответствующих им волн на свободной поверхности только амплитудами. Пластина оказывает существенное влияние на колебания жидкости, вызываемые давлением, приложенным к ее поверхности. Возвышение свободной поверхности и поверхности раздела в зоне между пластиной и системой давлений значительно меньше возвышения в соответствующих точках зоны, находящейся за областью приложения давлений.

Поступила 27 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. *Черкесов Л. В.* Поверхностные и внутренние волны. Киев, «Наукова думка», 1973.
3. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. *Витюк В. Ф.* Волны, возникающие от возмущений дна бассейна при наличии дока. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.