

ГИДРОДИНАМИКА СМАЧИВАНИЯ

О. В. ВОИНОВ

(Москва)

Рассматривается движение жидкости по гладкой твердой поверхности, когда свободная поверхность образует конечный видимый угол с твердой границей, и определяется зависимость этого угла от скорости с учетом капиллярных сил. Числа Рейнольдса малы. Решаются задачи о движении границы раздела фаз в капилляре и растекании капель вязких жидкостей на твердых поверхностях. Объясняются экспериментальные эффекты.

До сих пор в рассматриваемой области не только отсутствовали аналитические результаты, но и не были ясны даже постановки задач (см. обзор в [1]).

1. Постановка задачи о динамическом краевом угле. Рассматривается плоская задача движения жидкости, имеющей свободную границу постоянной формы, по плоской твердой поверхности. Свободная граница пересекает твердую поверхность (фиг. 1). Движение жидкости описывается уравнениями

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

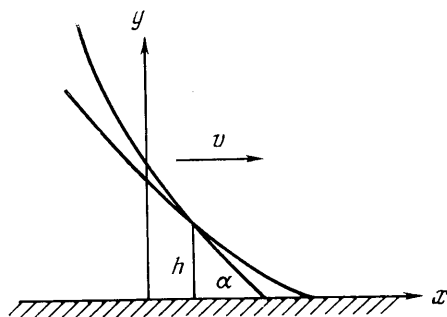
Здесь p — давление, μ — динамическая вязкость, v — скорость.

На твердой границе принимаем условие прилипания. В системе координат, в которой движение установившееся, условия на твердой границе при $y=0$ имеют вид

$$(1.1) \quad v_x = -v, \quad v_y = 0$$

На свободной поверхности

$$(1.2) \quad \mathbf{vn} = 0, \quad p_\tau = 0$$



Фиг. 1

Здесь p_τ — касательное напряжение. Нормальное напряжение на свободной поверхности определяется капиллярными силами

$$(1.3) \quad p_n = -p_0 + q\sigma$$

Здесь p_0 — постоянное давление в газе, q — кривизна свободной границы, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Потребуем, чтобы вязкие напряжения на свободной поверхности убывали с ростом высоты h над твердой поверхностью

$$(1.4) \quad p_n \rightarrow -p_0, \quad h \rightarrow \infty$$

Отсюда и из (1.3) следует, что кривизна свободной границы $q \rightarrow 0$ при $h \rightarrow \infty$. Условие (1.4) соответствует реальным задачам, в которых радиус кривизны в области большого масштаба соответствует этому масштабу, т. е. кривизна мала. Детальный вид решения в области больших толщин можно определять путем сращивания с решением задачи, найденным при условии (1.4). Относительная малость кривизны соответствует тому, что форма свободной границы близка к прямой.

Введем следующее определение. Назовем динамическим краевым углом угол наклона свободной границы α , если этот угол слабо меняется с высотой h над твердой поверхностью

$$(1.5) \quad h |d\alpha/dh| \ll \alpha$$

Если это условие не выполнено, то граница на высоте h существенно криволинейна и краевой угол невозможно наблюдать.

Введем масштаб h_m — предельно малый масштаб, на котором можно приближенно применять гидродинамическое описание жидкости. Очевидно, h_m по порядку величины определяется несколькими расстояниями между центрами соседних молекул или несколькими размерами молекул (в жидкости это величины одного порядка).

Влияние близости молекулярного масштаба в специальном случае может проявиться и на расстоянии, много большем нескольких размеров молекул. Это имеет место, только если кривизна и угол наклона свободной поверхности чрезвычайно малы, т. е. жидкость движется в очень тонкой пленке. При этом на малом масштабе наряду с капиллярными силами значительную роль могут играть дальнедействующие молекулярные силы. Их несложно учесть в рамках макроскопического описания тонкой пленки, и далее этот случай не рассматривается.

Введем угол наклона свободной поверхности на высоте, соответствующей предельному масштабу

$$(1.6) \quad \alpha = \alpha_m, \quad h = h_m$$

Величина α_m , вообще говоря, заранее неизвестна и должна определяться в процессе решения задачи. Если скорость v достаточно мала, то гидродинамика не существенна и всюду при $h > h_m$ угол $\alpha = \alpha_m$. При этом α_m может зависеть от скорости из-за неравновесной адсорбции фаз вблизи линии контакта трех фаз и других негидродинамических механизмов [2—4]. Далее эти эффекты явно не рассматриваются. Важно отметить, что с ростом скорости v изменение краевого угла со скоростью за счет указанных эффектов может прекращаться при весьма малых значениях v , задолго до того, как проявится влияние гидродинамических эффектов [2].

Основная задача состоит в определении $\alpha(h)$ в области $h > h_m$, где применимо гидродинамическое описание.

2. Асимптотическое решение. Пусть угол α медленно меняется с высотой, т. е. выполнено условие (1.5). Тогда свободная граница остается близка к своей касательной, проведенной на высоте h , во всех точках, высота которых по порядку совпадает с h .

Решение задачи о поле скоростей с граничными условиями (1.1) и (1.2) в области $r \in [r_1, r_2]$, где r — расстояние от точки пересечения свободной и твердой границ, не зависит от формы, которую имеет свободная граница в пределах $r/r_1 \rightarrow 0$ и $r/r_2 \rightarrow \infty$ (r_1, r_2 — постоянные, $r_2, r_1 > 0$). Поэтому для вычисления нормального напряжения p_n в точке границы на высоте h можно не учитывать детали течения при очень малых или очень больших значениях r ; достаточно заменить всю свободную границу прямой линией, касательной к ней в точке h , т. е. решать задачу о течении в угле. Таким образом найдем функцию $p_n = p_n(h, \alpha)$.

Представляя свободную границу уравнением $x = x(h)$, нетрудно записать

$$q = x'' (1+x'^2)^{-3/2} = [x' (1+x'^2)^{-1/2}]' = -d \cos \alpha / dh$$

Если учесть теперь граничное условие для нормального напряжения (1.3), то получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2.1) \quad \sigma \sin \alpha d\alpha/dh = p_n(h, \alpha) + p_0$$

Отсюда определяется $\alpha(h)$. Таким образом, краевая задача с неизвестной границей сведена к решению простой краевой задачи и последующему интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

Задача ползущего движения жидкости внутри угла исследована в [3]. Для случая граничных условий (1.1)–(1.2) функция тока, являющаяся решением бигармонического уравнения, запишется в виде

$$(2.2) \quad \psi = v(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^{-1}(\alpha \sin \theta - \theta \cos(\alpha - \theta) \sin \alpha) r \\ v_r = r^{-1} \partial \psi / \partial \theta, v_\theta = -\partial \psi / \partial r$$

Здесь r, θ — полярные координаты, ось $\theta=0$ направлена вдоль границы жидкости и твердого тела, $\theta=\alpha$ — касательная к свободной границе. Функции тока (2.2) и условию (1.5) соответствует следующее выражение для нормального напряжения на свободной границе

$$(2.3) \quad p_n = -p_0 + 2\mu v h^{-1}(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)^{-1} \sin^2 \alpha, \theta = \alpha$$

Подстановка (2.3) в (2.1) дает уравнение с разделяющимися переменными, решение которого с учетом (1.6) имеет вид

$$(2.4) \quad \int_{\alpha_m}^{\alpha} \left(\frac{\beta}{\sin \beta} - \cos \beta \right) d\beta = \frac{2\mu v}{\sigma} \ln \frac{h}{h_m}$$

Этот интеграл в элементарных функциях не вычисляется, но хорошо приближается элементарными функциями. Как показывает численный расчет, аппроксимация подынтегрального выражения

$$(2.5) \quad \beta / \sin \beta - \cos \beta \approx {}^2/3 \beta^2$$

приводит к ошибке в определении $\alpha(h)$ из (2.4), не превышающей 1%, если $\alpha < {}^3/4 \pi$. При $\alpha \rightarrow 0$ эта ошибка стремится к нулю.

Из (2.4) и (2.5) следует главная формула

$$(2.6) \quad \alpha = [\alpha_m^3 + 9\mu v \sigma^{-1} \ln(h/h_m)]^{1/3}, \alpha < 3\pi/4$$

Уравнение границы получается отсюда квадратурой, но оно не представляет интереса. Подстановка (2.6) в (1.5) позволяет найти, что условие (1.5), использованное при выводе формулы (2.6), выполнено, если

$$(2.7) \quad \alpha^3 \gg 3\mu v / \sigma$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что в области $\ln(h/h_m) \gg 1$ формула (2.6) применима независимо от значения скорости v , за исключением случая $\alpha > {}^3/4 \pi$, для которого следует использовать аппроксимацию формулы (2.4), отличающуюся от (2.6). Для значений $h \sim h_m$ формула (2.6) применима, если $\alpha_m^3 \gg 3\mu |v| / \sigma$.

Если $\alpha_m^3 \lesssim 3\mu v / \sigma$, то при $h \sim h_m$ угол наклона свободной границы с изменением высоты h изменяется резко, граница существенно криволинейна на масштабе h_m . Качественно формула (2.6) указывает на то, что есть резкий выступ на свободной границе на масштабе, близком к микроскопическому. С появлением такого «носика» предельный угол α_m можно определить только по порядку величины, так как при $h \sim h_m$ наклон свободной границы сильно зависит от h .

Согласно формуле (2.6), за счет натекания жидкости на твердую поверхность ($v > 0$) появляется ненулевой динамический краевой угол в области больших высот, даже если $\alpha_m = 0$, и жидкость полностью смачивает эту поверхность.

Очень важные выводы дает формула (2.6) также для случая оттекания жидкости с твердой поверхности, когда $v < 0$. В этом случае угол α убывает с высотой и на достаточно большой высоте, где

$$\ln(h/h_m) = \sigma \alpha_m^3 / (9\mu|v|)$$

обращается в нуль. Отсюда следует, что динамический краевой угол при оттекании жидкости с твердой поверхности возможен только, если $3\mu|v|/\sigma \ll \alpha_m^3$, и высота наблюдения ограничена.

Значения предельного масштаба h_m , входящего в (2.6), для различных жидкостей в соответствии с размером их молекул могут иметь порядок $10^{-7} - 10^{-6}$ см. Макроскопическим величинам h порядка $10^{-2} - 10^{-1}$ см отвечает значение $\ln(h/h_m) \sim 12$. Из (2.6) видно, что на макроскопическом масштабе угол α с высотой меняется очень слабо, благодаря чему его и можно наблюдать в эксперименте. Однако значение макроскопического краевого угла все же зависит от точности измерительного прибора, определяющей обычно высоту измерения h , и поэтому не является объективной характеристикой изучаемого процесса, если измеряется без указания высоты h .

Если скорость v столь велика, что $\alpha > \pi/4$, то используем вместо (2.5) другую аппроксимацию. Для $\beta > \pi/4$ с не меньшей точностью, чем (2.5) при $\beta < \pi/4$, пригодна аппроксимация

$$(2.8) \quad \beta/\sin \beta - \cos \beta \approx \pi/\sin \beta - \pi/3(\pi - \beta)^2.$$

При $\beta \rightarrow \pi$ формула (2.8) точная. Пусть $\alpha_m < \pi/4$, тогда из (2.4), (2.5) и (2.8) для $\alpha > \pi/4$ следует

$$(2.9) \quad \frac{\pi}{2} \ln \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{2}{9} (\pi - \alpha)^3 = \frac{2}{9} \alpha_m^3 + \frac{2\mu v}{\sigma} \ln \frac{h}{h_m}$$

При $\alpha \rightarrow \pi$ отсюда следует

$$(2.10) \quad \pi - \alpha \sim (h/h_m)^{2\mu v/\pi\sigma}$$

Легко видеть, что при $\alpha \sim \pi$ для применимости теории к определению величины $(\pi - \alpha)$ необходимо ее медленное изменение с высотой. Поэтому формула (2.10) справедлива при $2\mu v \ll \pi\sigma$.

Заметим, что формула (2.9) при $\alpha_m < \pi/2$ пригодна для $\alpha > \pi/2$, причем при $\alpha = \pi/2$ совпадает с (2.6). В точке $\alpha = \pi/4$ различие между (2.6) и (2.9) в определении величины α составляет 0.3%. Второе слагаемое в левой части формулы (2.9) при $\alpha > \pi/4$ дает вклад менее 4.2% и его следует учитывать как поправку или вообще опускать.

3. Динамика смачивания и закон сохранения энергии. Запишем в плоской задаче закон сохранения энергии для жидкого объема, определенно в момент t условием $r < r_0$, где r — расстояние от линии пересечения свободной границы с твердой поверхностью, а величина $r_0 \gg h_m$. Изменение поверхностной энергии и работа поверхностных сил должны быть равны диссипации энергии за счет вязкости E плюс диссипация энергии на микроскопическом масштабе E_m . Величина E_m связана с диссипацией части поверхностной энергии в тепло при переходе отдельных молекул жидкости на границу твердого тела или обратно вблизи линии, отделяющей смоченную поверхность от несмоченной. Поэтому $E_m \approx G|v|$, $G > 0$. Вели-

чина G может различаться для $v > 0$ и $v < 0$ и, вообще говоря, может зависеть от $|v|$.

$$(3.1) \quad -\frac{d}{dt} (l_1\sigma_1 + l_2\sigma_2) - v\sigma \cos \alpha + \int_L p_{ij}n_j v_i dl = E_m + E$$

$$E_m \approx G|v|, \quad E = \int_S p_{ij}\epsilon_{ij} dS$$

Здесь индекс 1 относится к границе жидкости и твердого тела; индекс 2 — к границе твердого тела и газа; l_i — длины соответствующих границ; ϵ_{ij} — тензор скоростей деформаций; S — плоское сечение выделенного жидкого объема.

Согласно приближенному решению п. 2, плотность диссипации энергии на расстоянии r от линии контакта фаз и производная от угла α по высоте h равны

$$\frac{dE}{dr} = \frac{2\mu v^2 \sin \alpha}{h(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \quad \frac{d\alpha}{dh} = \frac{2\mu v}{h\sigma} \frac{\sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$$

Отсюда найдем величину диссипации энергии за счет вязкости

$$(3.2) \quad E \approx \int_{r_m}^r \frac{2\mu v^2 \sin \alpha}{h(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} dr = \int_{h_m}^h \sigma v \frac{d\alpha}{dh} \sin \alpha dh = \sigma v (\cos \alpha_m - \cos \alpha)$$

В системе координат, где твердое тело неподвижно, работа распределенных поверхностных сил в (3.1) сведется к работе сил давления газа и работе поверхностных сил вдоль границы $r=r_0$ выделенного жидкого объема с остальной жидкостью. По приближенному решению п. 2 эта работа находится в виде

$$(3.3) \quad \int_L p_{ij}n_j v_i dl = -\frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \mu v^2 = -v\sigma \sin \alpha h \frac{d\alpha}{dh}$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1) и пренебрегая малыми при $h \gg h_m$ слагаемыми, а также учитывая, что $dl_1/dt = -dl_2/dt = v$, найдем

$$(3.4) \quad \cos \alpha_m = (\sigma_2 - \sigma_1 - G \operatorname{sign}(v)) / \sigma$$

При полном смачивании, когда $\sigma_2 - \sigma_1 > \sigma$, в силу закона сохранения энергии будет $G \geq \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma$. Выражение (3.4) дает так называемый статический гистерезис краевого угла. При малой скорости v краевого угла будет отличаться от равновесного значения, определяемого из (3.4) путем формальной подстановки $G=0$. Определение величины G выходит за рамки гидродинамики.

Заметим, что вывод является строгим, только когда угол α мало меняется при $h \sim h_m$. Угол α сильно меняется при $h \sim h_m$, если $\alpha_m^3 \ll 3\mu v / \sigma$. В этом случае вывод носит оценочный характер. Но тогда значение α_m практически не влияет на вид решения в области больших толщин, которое и представляет основной интерес, и поэтому нет необходимости в уточнении вывода.

4. Растекание капель на твердых поверхностях. Развитая теория позволяет решить задачу растекания капли на твердой поверхности, исследованию которого посвящено много экспериментальных работ (см. [6]).

Пусть капля вязкой жидкости растекается на плоской твердой поверхности под действием поверхностных сил. Как показано выше, при движении свободной границы вязкой жидкости вблизи твердой поверхности

угол наклона по высоте меняется очень слабо, поэтому наблюдателю видно, что капля образует краевой угол α с плоской поверхностью. Величину угла оценим из формулы (2.6), подставляя $h \sim h_0$, где h_0 — высота капли в центре. Вязкие напряжения в течении на масштабе всей капли имеют порядок

$$(4.1) \quad \mu v / h_0 \sim \sigma (\alpha^3 - \alpha_m^3) [9h_0 \ln(h_0/h_m)]^{-1} \ll \sigma / h_0$$

Это неравенство выполнено для $\alpha \lesssim 3/4\pi$. Неравенство (4.1) означает, что вязкие силы пренебрежимо малы по сравнению с капиллярными на масштабе h_0 . Следовательно, существует нестационарное решение уравнений гидродинамики, в котором форма капли на большом масштабе h_0 мало отличается от сферической. Это решение является асимптотическим при $t \rightarrow \infty$ для всех других решений, отличающихся от данного тем, что в них при $t=0$ форма капли на масштабе h_0 сильно отличается от сферы. Из оценок можно видеть, что релаксация формы на масштабе порядка размера капли происходит намного быстрее, чем изменяется радиус основания капли.

Скорость края капли можно выразить в силу сферичности через макроскопический угол α_0 и объем капли V

$$(4.2) \quad v = - \left(\frac{3V}{\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{(1 - \cos \alpha_0)^{2/3} (2 + \cos \alpha_0)^{1/3}} \frac{d\alpha_0}{dt}$$

Определим вклад в решение течения на масштабе h_0 и найдем, какую величину h следует подставлять в (2.6), чтобы найти α_0 .

В силу оценки (4.1) имеется малый параметр и задачу определения формы капли можно решать последовательными приближениями. В первом приближении контур поверхности на масштабе h_0 есть часть окружности. Форма во втором приближении определяется из граничного условия, если известно распределение нормальных напряжений p_n из первого приближения. Опуская приближенные вычисления, приведем окончательный результат последующего сращивания решений

$$(4.3) \quad \alpha_0^3 = \alpha_m^3 + 9\mu v \sigma^{-1} \ln(h_0/h_m) - 9\mu v \sigma^{-1}$$

Из (4.3) и (4.2) уравнение, описывающее процесс растекания капли ньютоновской жидкости на гладкой поверхности, записывается в следующей форме:

$$(4.4) \quad \frac{d\alpha_0}{dt} = \frac{\sigma}{9\mu} \left(\frac{\pi}{3V} \right)^{1/3} \frac{\alpha_m^3 - \alpha_0^3}{\ln(h_0/h_m) - 1} (1 - \cos \alpha_0)^{2/3} (2 + \cos \alpha_0)^{1/3}$$

Здесь α_0 — краевой угол на сферическом сегменте, аппроксимирующем каплю, V — объем капли.

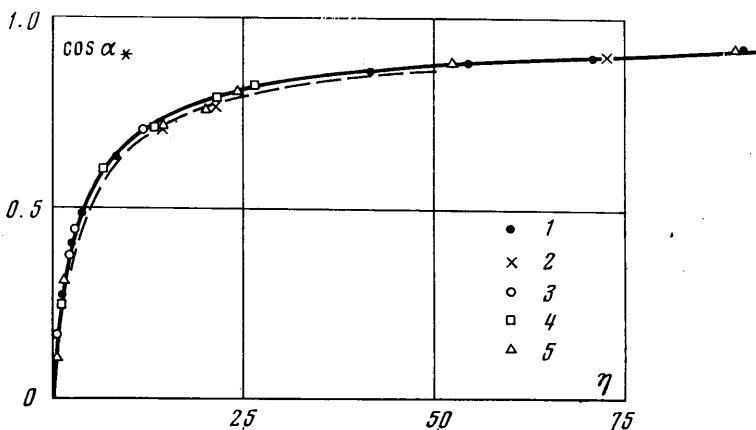
Исследование уравнения (4.4) несложно. Отметим интересный факт. При полном смачивании, $\alpha_m = 0$ и для малых углов $\alpha_0 \ll 1$ величина угла $\alpha_0 \sim t^{-3/10}$, если пренебречь изменением $\ln h_0$ в (4.4). При этом радиус основания капли $l \sim t^{-1/10}$. Таким образом, для малых углов растекание происходит очень медленно.

Можно описать также растекание капли жидкости, проявляющей аномалию вязкости. Если вязкость μ слабо зависит от скорости сдвига $\dot{\gamma}$, т. е. $\dot{\gamma} |d\mu/d\dot{\gamma}| \ll \mu$, то аналогично формуле (2.6) можно получить

$$(4.5) \quad \alpha = \left(\alpha_m^3 + \frac{9v}{\sigma} \int_{h_m}^h \mu \left(\frac{2|v|}{\alpha h} \right) \frac{dh}{h} \right)^{1/3}$$

Используя формулу (4.5), можно записать уравнение растекания капли, аналогичное (4.4).

Наблюдаемый в экспериментах [6] угол α_* определяется на малой высоте $h_* \ll h_0$, где h_* , очевидно, соответствует точности оптического прибора. При этом из (2.6) и (4.3) видно, что угол $\alpha_* < \alpha_0$. Этот факт объясняет, почему экспериментаторы [6] пришли к парадоксальному выводу, что капля по форме ближе к конусу, чем к сфере. В действительности это



Фиг. 2

неверно, форма капли на большом масштабе близка к сфере, а отклонение происходит в малой краевой области, где справедлива асимптотическая формула (2.6) или (4.5).

На фиг. 2 в безразмерном времени $\eta = (\pi/4V)^{1/2} \sigma t / \mu_0$ представлено сравнение теории с результатами пяти экспериментов [6], выполненных для двух значений наибольшей вязкости μ_0 , различающихся в ~ 57 раз, на трех различных полностью смачиваемых поверхностях — на стекле (экспериментальные точки 1, 3) и на стали с различной степенью микрошероховатости (точки 2, 4, 5). Точкам 1, 2 соответствует $\mu_0 = 1.7 \cdot 10^4$ пз, точкам 3, 4, 5 — $\mu_0 = 0.96 \cdot 10^5$ пз. В этих опытах $h_* = 2.5 \cdot 10^{-3}$ см, $V = 2.5 \cdot 10^{-3}$ см³, $\sigma = 21$ дн/см. Зависимость $\mu(\gamma^*)$ для полидисперсного полидиметилсилоксана, используемого в [6], здесь взята согласно [7, 8]. Величина $h_m \sim 10^{-5}$ см, исходя из оценки по известным формулам невозмущенного размера молекулы $\approx 5 \cdot 10^{-6}$ см. Заметим, что в [6] применялся слишком грубый косвенный способ определения наибольшей вязкости μ_0 испытуемых образцов и вязкость очень сильно зависела от измеряемой величины. В данной работе проведено устранение систематической погрешности путем введения поправочного коэффициента, не зависящего от μ_0 и определяемого из условия совпадения теории и эксперимента только в одной точке и для одной твердой поверхности. Значения μ_0 в [6] завышены в 1.65 раза. Выше приведены правильные значения.

На фиг. 2 пунктиром показан также результат расчетов по (4.4) выполненных для ньютоновской жидкости, $\mu = \mu_0$. Относительная близость двух кривых указывает, что роль аномалии вязкости не слишком велика и, по-видимому, в данном случае наличие сверх этого упруговязких свойств у полимера не должно заметно сказываться на результате. Расчеты с учетом силы тяжести показывают, что в приведенном случае влияние силы тяжести изменяет ход кривой на фиг. 2 не более чем на 1–2%, причем точки должны сместиться вниз.

Построенная гидродинамическая теория объясняет ранее непонятный [6] факт, что на различных гладких поверхностях растекание жидкости одной и той же вязкости происходит одинаково. Кроме того, важно, что экспериментальные данные при различных вязкостях укладываются на одну и ту же кривую в безразмерных координатах.

5. Движение межфазной границы в капилляре. В канале кругового сечения движется вязкая жидкость с постоянной скоростью v в направлении части канала, заполненной газом. Необходимо найти форму межфазной границы. Эта задача для некоторых конкретных значений параметров исследовалась путем численных расчетов на ЭВМ в работе [10]. Недостатком расчетов [10] является то, что авторы обрывали их произвольно на некоторой макроскопической высоте.

Отношение вязких и капиллярных сил на свободной границе вблизи оси трубы имеет порядок $\mu v/\sigma$. Как и в задаче растекания капель, эта величина мала. Поэтому форма межфазной границы около оси близка к сфере. Продолжая эту сферу до твердой поверхности, получим при их пересечении краевой угол α_0 . Если скорость v мала, то угол α_0 мал, $\alpha_0 \ll 1$. Угол α_0 определяется срачиванием сферической поверхности с радиусом R_0 (мениск) и решения (2.6) при $h \sim 1/2 \alpha_0^2 R_0$

$$(5.1) \quad \alpha_0^3 = \alpha_m^3 + \frac{9\mu v}{\sigma} \left[\ln \frac{h_k}{2h_m} + \frac{2}{3} \ln \ln \frac{h_k}{2h_m} + \frac{2}{3} \ln \frac{9\mu v}{\sigma} \right]$$

Здесь h_k — радиус капилляра, $h_k \sim R_0$. Формула (5.1) в равной мере применима как к плоскому, так и к круглому капилляру. Область применимости (5.1) ограничена условием, что высота перехода от решения (2.6), справедливого вблизи твердой границы, к мениску достаточно мала $1/2 \alpha_0^2 R_0 \ll h_k$. Это выполняется, если угол α_0 мал. Когда угол $\alpha_0 \sim \pi/2$, то решение (2.6) в краевой области свободной границы также справедливо, а величина h в (2.6), соответствующая α_0 , равна по порядку величины h_k . Представляет интерес приближенно определить эту величину h . При малой кривизне мениска, $R_0 \gg 1$, распределение нормального напряжения p_n вблизи свободной границы можно найти с достаточной точностью, если продолжить плавно асимптотику (2.6), справедливую на краю до оси капилляра, причем так, чтобы на оси были выполнены условия равенства нормального напряжения его точному значению и равенства нулю производной dp_n/dh , вытекающее из симметрии задачи. Этому требованию удовлетворяет функция

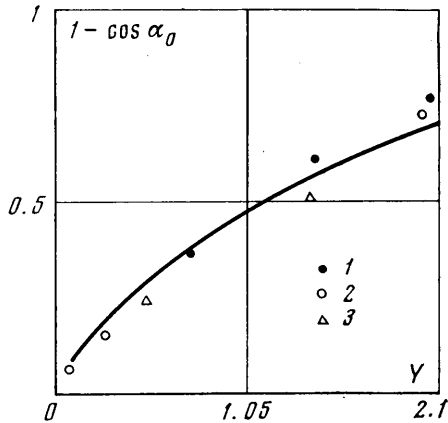
$$(5.2) \quad p_n = p_n|_{h=h_k} + 3\mu v \alpha_0^{-2} h^{-1} \sin \alpha_0 (1 - h/h_k)^2$$

Подставляя формулу (5.2) в граничное условие $2H\sigma = \text{const} + p_n$, где H — средняя кривизна поверхности, и выражая H через угол α , получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\cos \alpha$. Срачивание решения этого уравнения с решением (2.6), справедливым при $h \rightarrow 0$, позволяет найти

$$(5.3) \quad \alpha_0^3 = \alpha_m^3 + 9\mu v \sigma^{-1} [\ln (h_k/h_m) - c_1]$$

Входящая в (5.3) постоянная $c_1 = 1.5$ в случае плоского капилляра, $c_1 = 1.83$ в случае круглого капилляра. Различие между круглым и плоским капиллярами здесь незначительно.

Благодаря слабой зависимости α_0 от высоты h , на которой α_0 определяется согласно (2.6), формула (5.3) применима в большом диапазоне уг-



Фиг. 3

лов $\pi/6 \leq \alpha_0 < \pi/4$. При $\alpha_0 \sim 30-40^\circ$ формулы (5.1) и (5.3) дают практически совпадающие результаты.

Построенная теория согласуется с опытами [11, 12].

Сравнение теории с экспериментом [12] по движению глицерина в кварцевых капиллярах представлено на фиг. 3 для различных значений радиусов капилляров и различных скоростей. Приведена зависимость $\cos \alpha_0$, согласно (5.3), от параметра

$$Y = (9\mu v / \sigma) (\ln(h_k/h_m) - 1.83).$$

Экспериментальным точкам 1, 2, 3 на фиг. 3 соответствуют радиусы капилляра $h_k = 0.0053, 0.0093, 0.03$ см. Значение предельного масштаба $h_m \sim 10^{-7}$ см выбрано в соответствии с размером молекул глицерина. Как видно из фиг. 3, теория согласуется с экспериментом в пределах ошибки последнего.

Поступила 3 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Dussan V. E. B., Davis S. H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 65, pt 1.
2. Ablett R. An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water. *Philos. Mag.*, Ser. 6, 1923, vol. 46, No. 272.
3. Elliot G. E. P., Riddiford A. C. Dynamic contact angles. *J. Colloid Interface Sci.*, 1967, vol. 23, No. 3.
4. Blake T. D., Haynes J. M. Kinetics of liquid/liquid displacement. *J. Colloid Interface Sci.*, 1969, vol. 30, No. 3.
5. Moffat H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, 1954, vol. 18, pt 1.
6. Ogarev V. A., Timonina T. N., Arslanov V. V., Trapeznikov A. A. Spreading of polydimethylsiloxane drops on solid horizontal surfaces. *J. Adhesion*, 1974, vol. 6, No. 4.
7. Kataoka T., Ueda S. Viscosity - molecular weight relationship for polydimethylsiloxane. *J. Polymer Sci.*, pt B, *Polymer Letters*, 1966, vol. 4, No. 5.
8. Мидлман С. Течение полимеров. М., «Мир», 1971.
9. Флори П. Статистическая механика цепных молекул. М., «Мир», 1971.
10. Hansen R. J., Toong T. Y. Dynamic contact angle and its relationship to forces of hydrodynamic origin. *J. Colloid Interface Sci.*, 1974, vol. 37, No. 1.
11. Rose W., Heins R. W. Moving interfaces and contact angle rate - dependency. *J. Colloid Sci.*, 1962, vol. 17, No. 1.
12. Железный Б. В. Экспериментальное исследование динамического гистерезиса краевого угла. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 3.