

О ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ВЫТЕСНЕНИЯ
ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНАХ ФИЛЬТРАЦИИ

Я. М. ЗАЙДЕЛЬ, Б. И. ЛЕВИ, А. Г. ШАХМАЕВА

(Уфа)

Предлагается метод расчета многомерного процесса вытеснения водой нефти, обладающей аномальными свойствами, из продуктивных пластов. Получены численные решения, основанные на наиболее общепринятых моделях неньютоновской нефти, в рамках теории двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей.

1. Принимая, что для скоростей фильтрации неньютоновских жидкостей выполнен обобщенный закон Дарси, запишем полную систему уравнений, описывающую двухфазное течение в пористой среде

$$(1.1) \quad v_i = - \frac{k k_i}{\mu_i} \psi_i (\text{grad } p_i) \text{ grad } p_i, \quad \text{div } v_i = - m \frac{\partial s_i}{\partial t} \quad (i=1, 2)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_1 - p_2 = p_k(s_1)$$

Здесь v_i — скорость фильтрации, m — пористость, s_i — насыщенность, p_i — давление, p_k — капиллярное давление, k — абсолютная проницаемость, k_i — относительная фазовая проницаемость, μ_i — вязкость, σ — поверхностное натяжение на границе раздела фаз, θ — краевой угол смачивания. Индекс $i=1$ относится к несмачивающей фазе, $i=2$ — к смачивающей.

Функция $\psi_i=1$, если i -я фаза не обладает аномальными свойствами, в противном случае ее вид определяется реологической моделью. В дальнейшем, подразаеваемая под вытесняющей фазой воду, положим $\psi_2=1$.

Система уравнений (1.1) может быть сведена к двум уравнениям, которые в случае плоского течения при наличии в области фильтрации источников и стоков, моделирующих работу скважин, имеют следующий вид в безразмерных координатах [1]:

$$(1.2) \quad \Delta(p) = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(K \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) +$$

$$+ \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + J_{\text{ист}} = 0$$

$$(1.3) \quad \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(FK \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(FK \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + J_{\text{ист}} = \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

$$\xi = \frac{x}{L_1}, \quad \zeta = \frac{y}{L_2}, \quad K = k^\circ (k_1 \psi_1 + \mu k_2), \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$k^\circ = \frac{k}{\langle k \rangle}, \quad \Lambda_1 = \frac{L_2}{L_1}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_1^{-1}, \quad \Phi = k^\circ k_1 \psi_1$$

$$p = \frac{p_2}{p^*}, \quad \varphi = \frac{Bf(s)}{\sqrt{k^0}}, \quad B = \frac{\sigma \cos \theta \sqrt{m}}{p^* \mu_1 \sqrt{\langle k \rangle}}, \quad s = s_1$$

$$F = \frac{k_1 \psi_1}{k_1 \psi_1 + \mu k_2}, \quad \tau = \frac{\langle k \rangle p^* t}{m \mu_1 L_1 L_2}$$

Здесь L_1 и L_2 — характерные размеры пласта, p^* — характерное значение перепада давления, $\langle k \rangle$ — средняя проницаемость пласта, $f(s)$ — функция Леверетта.

При $\tau=0$ задается распределение насыщенности в пласте.

Для задачи вытеснения нефти водой из слоисто-неоднородных пластов члены $J_{\text{гг}}$ и $J_{\text{сгг}}$ учитывают работу нагнетательного или эксплуатационного ряда при рассмотрении его как эквивалентной галереи с дополнительными внутренними фильтрационными сопротивлениями.

Считая кровлю и подошву пласта непроницаемыми и задавая дебит нагнетаемой воды или забойные давления, а также постулируя отсутствие концевго эффекта [2], получим необходимые дополнительные граничные условия для решения системы (1.2), (1.3).

В двумерной задаче о двухфазной фильтрации в однородном по мощности пласте, вскрытом системой эксплуатационных и нагнетательных скважин, естественно пренебречь капиллярными эффектами ввиду больших характерных размеров области. На скважинах может быть задан либо расход, либо давление.

2. Численный метод интегрирования системы (1.2), (1.3) основан на раздельном определении насыщенности и давления. Разностные аналоги уравнений записываются так же, как это сделано в работе [1]. Расчет поля насыщенности проводится по явной разностной схеме первого порядка точности [1]. Выбор метода решения уравнения для давления зависит от рассмотрения той или иной модели неьютоновской нефти.

Для нефти, обладающей структурно-механическими свойствами [3], $\psi_1 = [1 + \Delta \mu_1 / (1 + \exp M_1 (|\text{grad } p_1| - M_2))]^{-1}$. При этом уравнение (1.2) является сильно эллиптическим и для решения большинства практических задач может быть с успехом применен следующий итерационный процесс:

$$(2.1) \quad a_{i+\frac{1}{2},j}(u^k) (u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) - a_{i-\frac{1}{2},j}(u^k) (u_{i,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}) +$$

$$+ a_{i,j+\frac{1}{2}}(u^k) (u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) - a_{i,j-\frac{1}{2}}(u^k) (u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}) + J_{i,j}^{k+1} = 0$$

$$u_{i,j}^{(0)} = p_{i,j}^{n-1}$$

где $a_{i\pm\frac{1}{2},j}$, $a_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ — значения полной проводимости.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие $\|u^{k+1} - u^k\| < \delta$, после чего полагается $p_{i,j}^n = u_{i,j}^{k+1}$.

Значительные трудности возникают при расчетах процесса вытеснения водой нефти, обладающей предельным градиентом сдвига d_1 [4]. В этом случае $\psi_1 = 0$, если $|\text{grad } p_1| \leq d_1$, $\psi_1 = 1 - d_1 / |\text{grad } p_1|$, если $|\text{grad } p_1| > d_1$, и, как легко заметить, уравнение для давления может вырождаться в области с заранее неизвестной границей.

Для расчета плоских задач теории стационарной нелинейной фильтрации в [5] был применен поланалитический метод, использующий преобразование годографа наряду с прямыми вариационными методами.

Другой возможный подход заключается в регуляризации исходной задачи.

Рассмотрим аппроксимацию функции ψ_1 функцией $\psi_{1\epsilon}$: $\psi_{1\epsilon} = \epsilon$, если $|\text{grad } p_1| \leq d_1 / (1 - \epsilon)$, $\psi_{1\epsilon} = 1 - d_1 / |\text{grad } p_1|$, если $|\text{grad } p_1| > d_1 / (1 - \epsilon)$ ($\epsilon > 0$, малый параметр).

Возникающая при этом корректно поставленная краевая задача может рассматриваться как задача минимизации некоторого функционала, для решения которой используется следующий процесс последовательных приближений:

$$(2.2) \quad \Delta u^{k+1} = \Delta u^k - \lambda \Lambda(u^k)$$

сходящийся в метрике $W_{(2)}^{(1)}$ к обобщенному решению уравнения (1.2) [6]. Здесь Δ — оператор Лапласа, λ — итерационный параметр.

Следует отметить, что закон фильтрации с функцией $\psi_{1\sigma}$ представляет и самостоятельный интерес, являясь кусочно-линейным законом фильтрации, который также может быть применен к описанию течения вязкопластичных жидкостей [7].

Для нахождения распределения давления на каждом временном слое решение уравнения (2.2) осуществляется численно.

Приведем выражения для членов, учитывающих работу скважин.

Если ячейка не содержит скважину, то $J_{i,j}=0$, в противном случае $J_{i,j}=Q_{i,j}^n$ при задании расхода, $J_{i,j}=a_{i,j}^n(p_{3,i,j}-p_{i,j}\pm d_1^*F_{i,j}^n)$ при задании забойного давления $p_{3,i,j}$ (знак плюс соответствует эксплуатационной скважине, минус — нагнетательной)

$$a_{i,j}^n = \frac{2\pi k_{i,j}^0 [k_1(s_{i,j}^n) + \mu k_2(s_{i,j}^n)]}{h_1 h_2 \ln(r/r_c)} \quad r = \sqrt{\frac{L_1 k_1 L_2 h_2}{\pi}}$$

$$F_{i,j}^n = \frac{k_1(s_{i,j}^n)}{k_1(s_{i,j}^n) + \mu k_2(s_{i,j}^n)}, \quad d_1^* = \frac{d_1(r-r_c)}{p^*}$$

где $Q_{i,j}^n$ (безразмерная величина расхода, r_c — радиус скважины).

Член $J_{s,i,j}$ отличен от нуля в ячейках, в которых расположены эксплуатационные скважины, и равен $J_{s,i,j}=F_{i,j}^n [Q_{i,j}^n + a_{i,j}^n d_1^* (1 - F_{i,j}^n)]$ при задании расхода,

$J_{s,i,j}=a_{i,j}^n F_{i,j}^n (p_{3,i,j} - p_{i,j} + d_1^*)$ при задании забойного давления. Эти формулы следуют из предположения о плоскорадialном течении в окрестности скважины.

За начальное приближение $u_{i,j}^{(0)}$ принимается значение давления с предыдущего слоя. При выполнении условия $\|u^{k+1} - u^k\| < \delta$ итерации (2.2) прекращаются и $p_{i,j}^n = u_{i,j}^{k+1}$.

Заметим, что для нахождения $u_{i,j}^{k+1}$ из (2.2) требуется обращение разностного аналога оператора Лапласа. В задаче о фильтрации в слоистом пласте наиболее эффективно оно может быть осуществлено методом верхней линейной релаксации со специальным уточнением на каждой итерации [8]. Для плоской задачи с системой скважин применяется неявный метод переменных направлений со стандартным набором итерационных параметров. Несмотря на отсутствие теоретического обоснования сходимости метода (2.2) при $\epsilon=0$, во всех проделанных вычислениях наблюдалась его сходимость и с этим предельным значением при результатах, практически совпадающих с расчетами для $\epsilon \leq 10^{-5}$.

Итерационный процесс (2.2) может быть также применен вместо (2.1) в случае, когда последний не сходится.

3. Предложенным в работе способом решен ряд задач о вытеснении неьютоновской нефти водой в рамках вышеперечисленных моделей из пятислойных неоднородных пластов и в однородных по мощности пластах, вскрытых эксплуатационными и нагнетательными скважинами.

Относительные фазовые проницаемости и кривая капиллярного давления те же, что и в [1].

При моделировании процесса заводнения пластов с нефтью, обладающей предельным градиентом сдвига, были использованы следующие данные: $\mu_1=20$ *спз*, $\mu_2=1$ *спз*, $\sigma \cos \theta=18$ *дин/см*, $d_1=0.06$ *атм/м*, $\langle k \rangle = 0.5$ *дарси*. Слоисто-неоднородный пласт считался состоящим из пяти прослоев одинаковой мощности с абсолютными проницаемостями: $k_1=0.33$, $k_2=1.38$, $k_3=0.14$, $k_4=0.62$, $k_5=0.01$ *дарси*.

На фиг. 1 приведены графики нефтеотдачи η (т. е. доли извлеченной нефти по отношению к начальным запасам) многослойного пласта как функции количества прокачанного поровых объемов V_p ($L_1=500$ *м*, $L_2=5$ *м*, $p^*=50$ *атм*). Кривые 1 и 2 являются показателями вытеснения

обычной (ньютоновской) нефти с учетом капиллярных перетоков и без них соответственно, а кривые 3 и 4 — неньютоновской нефти.

Из приведенных зависимостей видно, что вязкопластические свойства нефти уменьшают капиллярные перетоки между слоями с различными проницаемостями, тем самым существенно влияют на конечную нефтеотдачу.

Расчет одного варианта на ЭВМ «Минск-32» на сетке 20×10 занимает в среднем 4 час.

Сравнение основных показателей заводнения η , F , k_0 в системе скважин для $1/4$ элемента пятиточечной системы нагнетания приведено на фиг. 2 ($L_1=L_2=600$ м, $p^*=100$ атм), где кривые с четными номерами соответствуют показателям вытеснения обычной нефти, а с нечетными — вязкопластичной.

Полученные численные решения показывают, что при наличии у нефти предельного градиента сдвига основное течение происходит в сравнительно узкой области, примыкающей к прямой линии тока, соединяющей нагнетательную и эксплуатационную скважины. При этом происходит более ранний прорыв воды (относительно объемов закачки) в скважины и последующее обводнение (кривые 1 и 2, показывающие долю нефти F в добываемой жидкости) и уменьшение коэффициента охвата пласта k_0 (кривые 3 и 4), что приводит к значительному снижению нефтеотдачи (кривые 5 и 6). В этом случае характерно образование зон крайне низкой выработки, или застойных зон, таких, что начальная величина насыщенности в них практически не меняется. Об этом свидетельствует распределение нефтенасыщенности, приведенное на фиг. 3, к моменту 95%-ного обводнения эксплуатационной скважины (кривые 1, 2 и 3 — изосаты насыщенности, соответствующие значениям $s=0.5, 0.6$ и 0.8). Изосаты для обычной нефти показаны на фиг. 4 (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям $s=0.4, 0.45, 0.48, 0.5$ и 0.51). Это согласуется с данными о резкой неоднородности одножидкостного стационарного потока при наличии больших целиклов нефти [9].

В этом случае затраты машинного времени составили 7 час для разностной сетки 10×10 узлов.

На фиг. 3 линией 4 обозначена граница застойной зоны ($|\text{grad } p_1| < d_1$), полученная из расчета поля давления в начальный момент времени при постоянном распределении насыщенности (линия 5 — граница той же застойной зоны, приведенная в [10] для стационарного однородного потока). Практическое совпадение кривых свидетельствует о достаточно высокой степени точности решения уравнения (1.2).

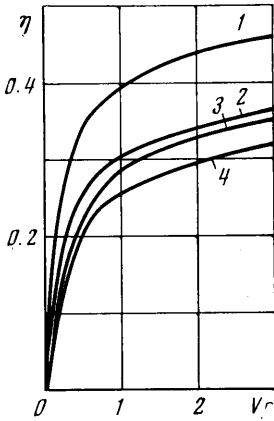
Интересной особенностью двумерных течений, также обнаруженной в результате численного решения, является наличие «воронки» насыщенности у эксплуатационных скважин, т. е. значение нефтенасыщенности в ячейках, содержащих скважины, меньше, чем в близлежащих. Объяснение этому факту может быть дано на основании рассмотрения радиального притока нефти с предельным градиентом и воды к скважине при заданном суммарном расходе.

Выражение для асимптотической величины скорости фильтрации нефти имеет следующий вид:

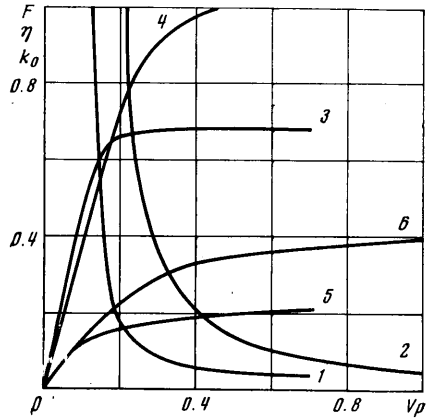
$$(3.1) \quad v_1 = -\frac{kk_1}{\mu_1} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - d_1 \right) = \frac{k_1}{2\pi r (k_1 + \mu k_2)} \left(Q - \frac{2\pi r k k_2}{\mu_2} d_1 \right) = 0$$

где Q — общий расход, r — координата.

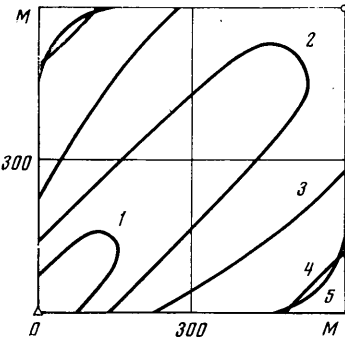
Аналогичное выражение для линейной одномерной задачи получено в работе [11].



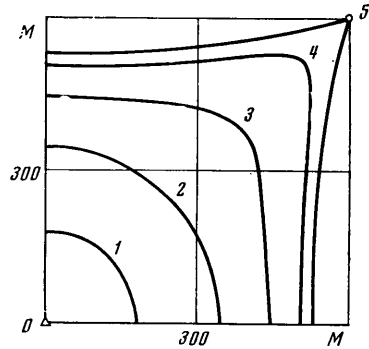
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Введем параметр $D=2\pi k d_1 R / Q \mu_2$, где R — характерный радиус. Из (3.1) следует, что если для всех s $k_2(s)D < 1$, то остаточная насыщенность $s_* = s_0$, в противном случае s_* находится из уравнения $k_2(s_*) = R / Dr$, где s_0 — остаточная насыщенность для обычной нефти. Из того, что r в окрестности скважины сколь угодно мало, следует, что предельное значение нефтенасыщенности увеличивается по мере удаления от скважины.

Таким образом, проведенные расчеты свидетельствуют о возможности прогнозирования процессов разработки месторождений с нефтями, обладающими аномальными свойствами, путем численного решения соответствующих краевых задач нелинейной фильтрации.

Поступила 7 VII, 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Леви Б. И., Сурков Ю. В. О двумерной задаче вытеснения в слоистых пластах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
2. Швидлер, М. И., Леви Б. И. Одномерная фильтрация несмешивающихся жидкостей. М., «Недра», 1970.
3. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А., Кабиров М. М. Аномальные нефти. М., «Недра», 1975.
4. Бернадинер М. Г., Енгов В. М. О вытеснении несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации. ПМТФ, 1968, № 2.
5. Бернадинер М. Г., Енгов В. М., Турецкая Ф. Д. Численное решение стационарных задач нелинейной фильтрации. М., ИПМ АН СССР, 1974.

6. Кошелев А. И. О сходимости метода последовательных приближений. Докл. АН СССР, 1962, т. 142, № 5.
 7. Енгов В. М., Малахова Т. А. Некоторые задачи фильтрации при кусочно-линейном законе сопротивления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
 8. Watts J. W. An iterative matrix solution method suitable for anisotropic problems. Soc. Petrol. Engng J., 1971, vol. 11, No. 1.
 9. Алишаев М. Г., Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Влияние предельного градиента на потери нефти при вытеснении ее водой. В сб. «Вопросы линейной фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефтяных и газовых месторождений». М., 1972.
 10. Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., «Недра», 1975.
 11. Леви Б. И. Об одномерном вытеснении вязкопластичной нефти водой. Тр. Башкирск. науч.-исслед. и проект. ин-та нефт. пром-ти, 1972, вып. 30.
-