

О ТЕЧЕНИЯХ В НАЧАЛЬНЫХ УЧАСТКАХ КАНАЛОВ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

А. А. СВИРИДЕНКОВ, В. И. ЯГОДКИН

(Москва)

На основе полуэмпирических теорий турбулентности проведены расчеты двух типов течений в начальных участках с проницаемыми стенками: при подаче жидкости только через стенки и при взаимодействии внешнего потока с вдуваемым.

Экспериментальному изучению течений первого типа посвящены работы [1-3], в которых показано, что по крайней мере в пределах длин $L/h < 30$, $L/a < 50$ ($2h$ — расстояние между проницаемыми стенками плоского канала, a — радиус трубы) распределения скоростей в ламинарном и турбулентном режимах течения мало отличаются и близки к автомодельным для решений, полученных в [4]. При достаточно больших значениях числа Рейнольдса $Re_0 > 100$ ($Re_0 = v_0 h / \nu$ или $Re_0 = v_0 a / \nu$, где v_0 — скорость вдува) и малом влиянии сжимаемости жидкости распределения осевой составляющей скорости описываются соотношениями для идеального завихренного движения: $u = (\pi/2)x \cos(\pi y/2)$ в плоском канале, $u = \pi x \cos(\pi y^2/2)$ в трубе (за характерные значения координат взяты соответственно h и a).

Измерения указывают на существование участка ламинарного течения, длина которого зависит от числа Рейнольдса вдува [3]. В турбулентном режиме максимум генерации энергии турбулентности располагается значительно дальше от стенки, чем в параллельных потоках.

Течения второго типа в трубах изучались в [5-7], где обнаружено, что для значений числа Рейнольдса потока при входе в пористую часть трубы $Re = u_0 a / \nu < 3 \cdot 10^3$ вдув жидкости с $v_0 / u_0 > 0.01$ приводит к гашению турбулентности в начальном участке трубы. Аналогичное явление наблюдалось в пограничном слое с $v_0 / u_0 > 0.023$ [8, 9].

Ламинарно-турбулентный переход в течениях с вдувом объяснялся в [10, 11] на основе теории гидродинамической устойчивости, учитывающей непараллельный характер этих течений.

Закономерности развития турбулентности и обратный переход в каналах с проницаемыми стенками теоретически не объяснены. Для этого, по-видимому, недостаточно использование простых полуэмпирических теорий турбулентности.

В данной работе приводятся результаты расчетов с использованием двухпараметрических моделей турбулентности, предложенных в [12, 13] для описания сложных течений. Ввиду резких изменений энергии турбулентного движения по длине каналов выполнялось численное решение полной системы уравнений движения. Применялся конечно-разностный метод [14].

1. Постановка задачи. Система уравнений, описывающих стационарное турбулентное движение несжимаемой жидкости может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} (y^j v) = 0 \\
 & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_T + v) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j (v_T + v) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + S_u \\
 & u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_T + v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j (v_T + v) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + S_v \\
 & S_u = \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_T + v) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j (v_T + v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

$$S_v = \frac{\partial}{\partial x} \left[(v_T + v) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j (v_T + v) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \\ - 2(v_T + v) \frac{jv}{y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

где $j=0$ и 1 для плоского и осесимметричного течений соответственно, v_T — коэффициент турбулентной вязкости.

Для вычисления v_T в [12, 13] предложено использовать следующие дифференциальные уравнения для кинетической энергии турбулентности $k = 1/2 \langle u_i'^2 \rangle$ и для среднего квадрата частоты пульсаций скорости $w = 1/2 \langle \omega_i'^2 \rangle$, где ω_i' — составляющие пульсаций вихря скорости, или уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности $\varepsilon = v \langle (\partial u_i' / \partial x_k)^2 \rangle$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{v_T}{\sigma_k} + v \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \left(\frac{v_T}{\sigma_k} + v \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + S_k \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{v_T}{\sigma_w} + v \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \left(\frac{v_T}{\sigma_w} + v \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + S_w \\ u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} + v \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} + v \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + S_\varepsilon \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$S_k = v_T F_k - \varepsilon$$

$$S_w = C_{w1} v_T F_w - C_{w2} w^3 + C_{w3} \frac{w}{k} v_T F_k,$$

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon1} \frac{\varepsilon}{k} v_T F_k - C_{\varepsilon2} \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon3} v v_T F_w$$

$$F_k = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{vj}{y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

$$F_w = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]^2$$

$$\varepsilon = C_D k \sqrt{w}$$

Коэффициент турбулентной вязкости v_T связан с величинами k и ε формулой, аналогичной соотношению Колмогорова — Прандтля: $v_T = C_\mu k^2 / \varepsilon$.

Эмпирические коэффициенты, входящие в (1.2), зависят от числа Рейнольдса турбулентности $Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$ в соответствии с [13, 15]

$$C_D = 0.09 \left(1 + \frac{22.2}{k} \nu \sqrt{w} \right), \quad C_{w1} = 3.5, \quad C_{w3} = 1.04$$

$$C_{w2} = 0.17 \left(1 + \frac{22.2}{k} \nu \sqrt{w} \right) [1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)], \quad C_{\varepsilon1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon3} = 2.0$$

$$C_{\varepsilon2} = 1.92 [1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)]$$

$$C_\mu = 0.09 \exp \left[-2.5 / \left(1 + \frac{Re_T}{50} \right) \right]$$

Значения эмпирических констант σ_k , σ_w и σ_ε приняты согласно [13]: в модели $(k-w)$ — $\sigma_k = \sigma_w = 0.9$, а в модели $(k-\varepsilon)$ — $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

Использование двух моделей турбулентности для исследования течений в начальных участках каналов с проницаемыми стенками связано с существованием перехода от ламинарного течения к турбулентному. Этот переход, как показали расчеты, лучше описывается моделью $(k-w)$. Модель $(k-\epsilon)$, получившая в последнее время наибольшее распространение, используется для расчета более развитых турбулентных течений. Эти модели не эквивалентны при описании пристенных областей течений.

При постановке граничных условий учитывалось слабое изменение градиентов средней и пульсационной скоростей вблизи стенок канала [3, 7]. Это позволяет проводить расчеты турбулентного течения конечно-разностным методом на сравнительно грубой сетке (с шагом 0.01-0.05 по оси y), ставя естественные граничные условия для средней скорости, энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ϵ .

Требование отсутствия пульсаций скорости на стенке приводит к условиям $k = \partial k / \partial y = 0$. Тогда из определения величин ϵ и k можно получить их связь на стенке: $\epsilon = v(\partial^2 k / \partial y^2)$ и $w = (\partial^2 k / \partial y^2) / 2$.

С учетом условий симметрии на оси канала система граничных условий принимает вид

$$u(x, 1) = k(x, 1) = 0, \quad v(x, 1) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$w(x, 1) = 1/2 \frac{\partial^2 k(x, 1)}{\partial y^2}$$

$$\epsilon(x, 1) = v \frac{\partial^2 k(x, 1)}{\partial y^2}, \quad v(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial k(x, 0)}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon(x, 0)}{\partial y} = 0$$

На входе в канал ($x = x_0$) заданы известные распределения независимых переменных, а на правой границе — их аппроксимации из внутренних точек области.

В расчете течения Бермана [4] x_0 выбиралось в пределах участка ламинарного течения: $0 < x_0 < x_*$, а для смешанного течения $x_0 = -4$.

2. Результаты расчета. Основные результаты были получены на сетке $\Delta x = 0.25$, $\Delta y = 0.025$. Для течения Бермана распределение скорости при $x = x_0$ в плоском канале и в трубе задавалось соответственно формулами

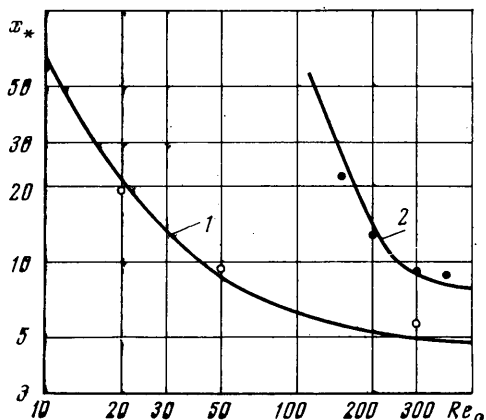
$$u = \frac{\pi x}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \quad v = -\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

$$u = \pi x \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right), \quad v = -\frac{1}{y} \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)$$

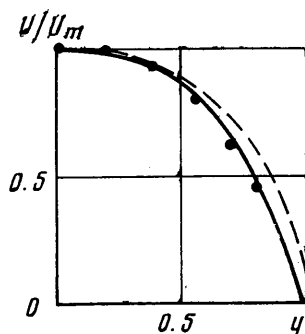
Использовались обе модели турбулентности. Функции $k(x_0, y)$ и $w(x_0, y)$ задавались произвольно, при удовлетворении только граничным условиям при $y = 0$ и 1 ; значение $\epsilon(x_0, y)$ определялось по формуле $\epsilon = 0.09 k^{3/2} / l$, где $k(x_0, y) = k_m \sin^2 \pi y^2$, а l — длина пути смешения для турбулентного течения в непроницаемой трубе.

В этой задаче исследовалось влияние числа Рейнольдса вдува Re_0 на координату точки перехода x_* слабо возмущенного ламинарного режима течения к турбулентному. В интервале $x_0 < x < x_*$ происходило уменьшение энергии возмущений вблизи стенок канала в основном вследствие переноса жидкости к оси. За точку перехода x_* принималась длина, на которой на некотором расстоянии от стенок начиналась заметная гене-

рация турбулентной энергии. Переход завершился на относительной длине от 1 до 0.2 при изменении Re_0 от 20 до 300. Расчетные значения x_* (Re_0) обозначены точками на фиг. 1. Здесь же даны кривая 1 для точки потери устойчивости из работы [10], полученная на основе теории гидродинамической устойчивости симметричного течения Бермана в плоском канале, и кривая 2, аппроксимирующая экспериментальные результаты [3] для течения в трубе.



Фиг. 1



Фиг. 2

Согласование результатов расчета точки перехода и точки потери устойчивости можно объяснить большой скоростью роста возмущений в области неустойчивости и большой скоростью затухания их в области устойчивости в случае непараллельного течения [10].

Для течения в трубе обнаружено, что с ростом относительной амплитуды возмущения $\sqrt{k_m}/u_m$, где $u_m = u(x, 0)$, свыше 4% начинается заметное уменьшение координаты точки перехода. Это объясняет наблюдавшийся в экспериментах значительный разброс величин x_* в тех случаях, когда в плоскости канала $x=0$ помещалась непроницаемая стенка. Отрывы потока от этой стенки могут приводить к значительным возмущениям потока. Кривая 2 на фиг. 1 относится к случаю симметричного растекания жидкости относительно плоскости $x=0$.

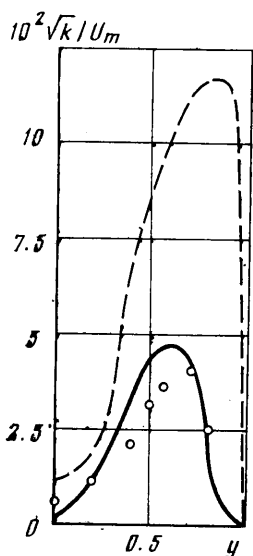
В модели $(k-w)$ характерное значение частоты $f = [w(x_*, y_m)]^{1/2}$, где y_m — координата максимума k в сечении канала $x=x_*$, определяет значение числа Струхала в момент перехода. При $Re_0=300$ для плоского течения $Sh_0 = fh/v_0 \approx 3$, для трубы $Sh_0 = fa/v_0 = 10-12$. Это соответственно близко к значениям числа Струхала для нейтральных колебаний [10] и для наблюдавшихся колебаний в трубах [3].

Однако ниже по потоку за точкой перехода расчеты по этой модели дают результаты, противоречащие наблюдаемым слабым изменениям профиля скорости и низкой интенсивности турбулентности (пунктирные кривые на фиг. 2 и 3 при $Re_0=300$, $x=9$; точки — экспериментальные данные [3]). Расчеты по модели $(k-\varepsilon)$ (сплошные линии на фиг. 2 и 3) лучше согласуются с экспериментами.

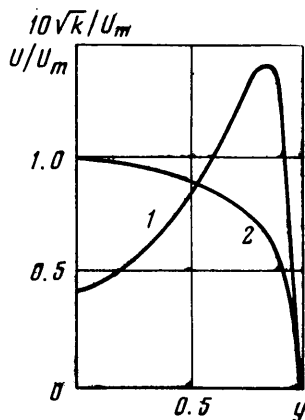
Вблизи стенки трубы располагается слой жидкости с очень низким уровнем энергии турбулентности: турбулентность оттесняется в глубь потока. Возможность такого состояния, при котором в среде может существовать фронт турбулентности, предсказывалась в работе [16]. Из расчетов и измерений следует, что на значительной длине канала этот фронт,

по-видимому, устойчив и поэтому не происходит изменения относительного профиля скорости. Можно предположить, что на большой длине в результате роста энергии турбулентности фронт потеряет устойчивость и начнется наполнение профиля скорости.

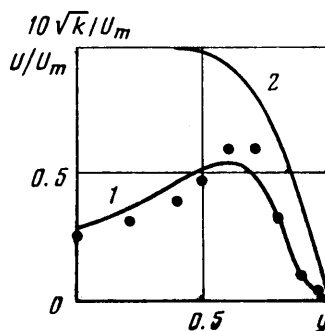
Расчеты смешанного течения в трубе были выполнены по модели (k - ϵ) при указанных на фиг. 4 распределениях скорости и энергии турбулентности в набегающем потоке ($x_0 = -4$). Значения функции $k(x_0, y)$ полагались равными измеренным значениям $\langle u'^2(x_0, y) \rangle$, а $\epsilon(x_0, y) = 0.09 k^{3/2}/l$, где l — длина пути смешения для течения в трубе. Расчеты выполнены для отношения $v_0/u_0 = 0.05$, при котором в [7] наблюдалось наибольшее затухание турбулентности. Число Рейнольдса вдува состав-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ляло $Re_0 = 75$. Для примера можно указать, что на расстоянии $x = 4$ при $y = 0.925$ энергия турбулентности уменьшается почти в 100 раз по сравнению с ее значением в набегающем потоке (фиг. 5). Это связано как со смещением максимума энергии турбулентности в глубь потока, так и с его уменьшением приблизительно в 8 раз. Место расположения k_{max} соответствует зоне смещения потоков, поступающих с торца и со стенок трубы. Ламинаризация потока у стенок приводит к значительному уменьшению наклона профиля средней скорости у стенки трубы, который на длине $x \leq 10$ при $v_0/u_0 \geq 0.05$ становится близким к наклону профиля идеального течения Бермана $[(\partial u/\partial y)/u(x, 0)]_{y=1} = -\pi$. Ниже по течению появляется второй максимум генерации энергии турбулентности в области вдуваемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G.* Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1956, vol. 234, No. 1199.
2. *Wageman W. E., Guevara F. A.* Fluid flow through a porous channel. Phys. Fluids, 1966, vol. 3, No. 6.
3. *Ягодкин В. И.* Применение каналов с пористыми стенками для исследования течений, образующихся при горении твердых топлив. In: 18-th Internat. Astronaut. Congr. Belgrade, 1967. Proc. Vol. 3. Propuls., and Re-entry. Oxford, et al., 1968.
4. *Berman A. S.* Laminar flow in channels with porous walls. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9.
5. *Olson R. M., Eckert E. R. G.* Experimental studies of turbulent flow in a porous circular tube with uniform fluid injection through the tube wall. Trans. ASME, J. Appl. Mech., Ser. E, 1966, vol. 33, No. 1.
6. *Eckert E. R. G., Rodi W.* Reverse transition turbulent-laminar for flow through a tube with fluid injection. Trans. ASME, J. Appl. Mech., Ser. E, 1968, vol. 35, No. 4.
7. *Pennell W. T., Eckert E. R. G., Sparrow E. M.* Laminarization of turbulent pipe flow by fluid injection. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 3.
8. *Ерошенко В. М., Ермаков А. Л., Климов А. А., Мотулевич В. П., Терентьев Ю. П.* Экспериментальное исследование влияния интенсивного вдува различных газов на турбулентный пограничный слой. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
9. *Глазков В. В., Гусева М. Д., Жестков Б. А.* О турбулентном течении над проницаемыми пластинами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
10. *Варапаев В. Н., Ягодкин В. И.* Об устойчивости течения в канале с проницаемыми стенками. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
11. *Варапаев В. Н., Курильская Н. А., Свириденков А. А., Ягодкин В. И.* Об устойчивости неавтономных течений в каналах с проницаемыми стенками. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1973, № 102.
12. *Spalding D. V.* A two-equation model of turbulence. UDI-Forschungs Heft, 1972, No. 549.
13. *Lauder B. E., Spalding D. V.* The numerical computation of turbulent flows. Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng, 1974, vol. 3, No. 2.
14. *Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М.* Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
15. *Глушко Г. С.* Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
16. *Климов А. М.* Об эрозийном горении порохов. Физика горения и взрыва, 1975, т. 11, № 5.