

**О ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ**

В. И. РАСЩУПКИН, А. Н. СЕКУНДОВ

(Москва)

Расчет слоя смешения — классической задачи теории струйных течений — обычно проводится в приближении пограничного слоя. Если скорость одного из потоков мала, то даже в случае несжимаемой жидкости угол расширения слоя смешения достигает 20° , а в случае смешения разноплотностных потоков этот угол оказывается еще больше. Поэтому возникают сомнения в малости отбрасываемых членов, содержащих дифференцирование в направлении истечения потоков.

В данной работе задача о смешении двух полубесконечных потоков решена как в приближении пограничного слоя, так и с использованием полной системы уравнений Рейнольдса (молекулярная вязкость считается малой по сравнению с турбулентной, это соответствует $Re \rightarrow \infty$).

Рассмотрим течение в плоском турбулентном слое смешения двух полубесконечных потоков несжимаемой жидкости, стекающих с клина, имеющего угол γ (фиг. 1). Угол клина заранее не известен. Течение в этом случае (без использования приближения пограничного слоя) в предположении малости молекулярной вязкости по сравнению с турбулентной будет описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ (1) \quad & U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} \\ & U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \end{aligned}$$

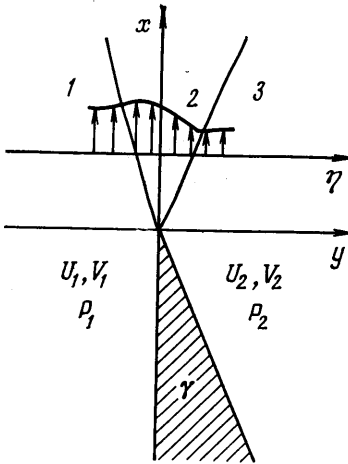
Все переменные берутся в безразмерном виде. Скорости отнесены к U_1 , давление — к ρU_1^2 (турбулентная вязкость будет отнесена к $U_1(x)$). Поскольку в течение такого типа при $Re \rightarrow \infty$ отсутствует характерный линейный размер, будем искать автомодельное решение. Перейдем в уравнении (1) к переменной $\eta = y/x$. Тогда после преобразований система примет вид

$$\begin{aligned} (2) \quad & V_\eta' - \eta U_\eta' = 0 \\ & (V - \eta U) U_\eta' = \eta P_\eta' + \eta \langle u'^2 \rangle_\eta' - \langle u'v' \rangle_\eta' \\ & (V - \eta U) V_\eta' = -P_\eta' + \eta \langle u'v' \rangle_\eta' - \langle v'^2 \rangle_\eta' \end{aligned}$$

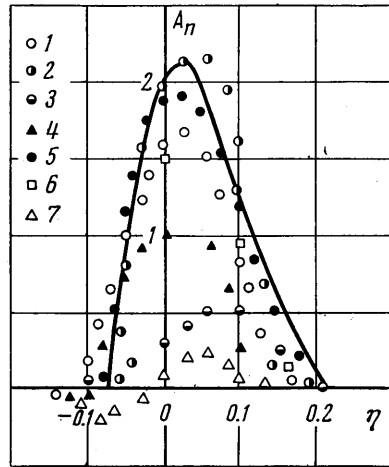
Умножив третье уравнение на η и сложив со вторым, можно исключить из этой системы градиент давления P_η' , а используя уравнение неразрывности, можно исключить V_η' . Тогда уравнения (2) сведутся к следующему уравнению:

$$(3) \quad (V - \eta U) U_\eta' (1 + \eta^2) = (\eta^2 - 1) \langle u'v' \rangle_\eta' + \eta (\langle v'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)_\eta'$$

В (3) входят три характеристики турбулентности: $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'^2 \rangle$ и $\langle v'^2 \rangle$, причем две последние — только в виде разности. Описание только продольных или только поперечных пульсаций надо знать лишь для нахождения давления, например, из третьего уравнения системы (2). Для замыкания системы уравнений недостаточно простейших моделей турбулентности, разрабатываемых обычно применительно к течениям типа пограничного слоя, когда уравнения содержат только одну неизвестную величину $\langle u'v' \rangle$. Известно несколько подходов [1-4], в которых модель турбулентности опи-



Фиг. 1



Фиг. 2

сывает все компоненты тензора напряжений Рейнольдса $\langle u'_i u'_j \rangle$. В большинстве указанных работ используется вся система уравнений с большим числом приближенных связей и эмпирических постоянных. В данной работе используется более простой подход. Все компоненты тензора напряжений Рейнольдса $\langle u'_i u'_j \rangle$ выражаются алгебраическими формулами через энергию турбулентности e , турбулентную вязкость ϵ и градиенты средней скорости $\partial U_i / \partial x_j$. Такой подход аналогичен использованному в работе [4], но несколько проще.

Рассмотрим некоторые соображения, позволяющие получить выражения для компонент тензора $\langle u'_i u'_j \rangle$ с учетом анизотропии. Представим все пульсации в виде суперпозиции

$$(4) \quad u_i = u_i^{\circ} + u_i^{*}$$

где u_i° — изотропная пульсационная компонента, а u_i^{*} — неизотропная добавка к ней, связанная с наличием в потоке градиентов скорости. Эту добавку можно представить в виде

$$(5) \quad u_i^{*} = -c \tau u_{\alpha}' \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}}$$

где c — эмпирическая постоянная, τ — лагранжев временной масштаб турбулентности. Используя (4) и (5), запишем для i и j компонент скорости следующие равенства:

$$(6) \quad u_i' = u_i^{\circ} - c \tau u_{\alpha}' \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}}, \quad u_j' = u_j^{\circ} - c \tau u_{\alpha}' \frac{\partial U_j}{\partial x_{\alpha}}$$

Умножим эти равенства на u_j' и u_i' , осредним и сложим

$$(7) \quad 2\langle u_i' u_j' \rangle = (\langle u_i' u_j' \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle) - c\tau \langle u_j' u_\alpha' \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - c\tau \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x}$$

Предположим, что изотропная составляющая коррелирует с полной пульсацией скорости только своего направления, в этом случае выражение в скобках отлично от нуля, только если $i=j$. Если предположить также, что $\langle u_i' u_i' \rangle + \langle u_i' u_i' \rangle = A$ ($i=1, 2, 3$, суммирование по i нет), получим

$$(8) \quad 2\langle u_i' u_j' \rangle = A\delta_{ij} - c\tau \langle u_j' u_\alpha' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} - c\tau \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}$$

Положив в этом выражении $i=j$ и проведя суммирование по i , найдем

$$(9) \quad 2\langle u_i' u_i' \rangle = 4e = 3A - c\tau 2\langle u_k' u_m' \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_m}$$

Определив отсюда A и подставив его в (8), получим

$$(10) \quad \langle u_i' u_j' \rangle = \left(\frac{2}{3} e + \frac{c\tau}{3} \langle u_k' u_m' \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} - \frac{c\tau}{2} \langle u_j' u_\alpha' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} - \frac{c\tau}{2} \langle u_i' u_\alpha' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_\alpha}$$

Временной масштаб τ можно в соответствии с известным соотношением [5] выразить через энергию турбулентности и турбулентную вязкость

$$(11) \quad \tau = \epsilon / e$$

В уравнении (10) компоненты тензора $\langle u_i' u_j' \rangle$ входят как в левую, так и в правую части, поэтому для их нахождения необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений. Продемонстрируем результат этих операций для плоского течения. Будем считать, что существенна только производная $\partial U_1 / \partial x_2$, а остальные производные от средней скорости малы. Тогда система (10), с учетом (11) примет вид

$$(12) \quad \begin{aligned} \langle u_1' u_2' \rangle &= -\frac{c}{2} \frac{\epsilon}{e} \langle u_2'^2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x}, & \langle u_1'^2 \rangle &= \frac{2}{3} e - \frac{2c}{3} \frac{\epsilon}{e} \langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \\ \langle u_2'^2 \rangle &= \frac{2}{3} e + \frac{c\epsilon}{3e} \langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, & \langle u_3'^2 \rangle &= \frac{2}{3} e + \frac{c\epsilon}{3e} \langle u_1' u_2' \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Из (12) можно получить

$$\begin{aligned} \langle u_1' u_2' \rangle &= -\frac{c}{3} \frac{\epsilon}{e} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \times \left[1 + \frac{c^2}{6} \left(\frac{\epsilon}{e} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{-1} \\ \langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle &= \frac{c^2}{3} e \left(\frac{\epsilon}{e} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 \times \left[1 + \frac{c^2}{6} \left(\frac{\epsilon}{e} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{-2} \end{aligned}$$

Здесь следует обратить внимание на то, что выражение для $\langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle$ существенно положительно. Это хорошо согласуется с результатами измерений в слое смешения (фиг. 2). На фиг. 2 приведены экспериментальные данные по разности $A_n = (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle) 10^2 / U_1^2$ в слое смешения затопленных струй ($m = U_2 / U_1 = 0$) и для сравнения показан расчетный профиль этой характеристики турбулентности. На этой фигуре точки 1—7 соответствуют экспериментальным данным из работ [6—11], точки 3 — эксперимент данной работы.

Дальнейшие упрощения возможны благодаря тому, что $|\varepsilon/e(\partial U_1/\partial x_2)| \ll \ll 1$. Тогда вместо (13) можно записать

$$(14) \quad \langle u_1' u_2' \rangle = -\frac{c}{3} \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

$$(15) \quad \langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle = \frac{c^2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{e} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

Положим теперь $c=3$, чтобы выражение (14) совпадало с общепринятым определением турбулентной вязкости ε . Используем также известные опытные данные работы [12], согласно которым

$$(16) \quad \left| \frac{\varepsilon}{e} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right| \approx 0.3$$

В результате получим нужные формулы в окончательном виде

$$(17) \quad \langle u_1' u_2' \rangle = -\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \quad \langle u_1'^2 \rangle - \langle u_2'^2 \rangle = -k\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

где $k \approx 1$, а знак во втором выражении выбран с учетом направления осей системы координат так, чтобы правая часть его была положительна. С учетом формул (17) из уравнения (3) получим

$$(18) \quad (V - \eta U) U_{\eta}' (1 + \eta^2) = (1 - \eta^2 - k\eta) (\varepsilon^{\circ} U_{\eta}')_{\eta}', \quad \varepsilon = \varepsilon^{\circ} x$$

Для замыкания системы уравнений используется уравнение для турбулентной вязкости, являющееся обобщением на случай двумерного течения модели турбулентности Коважного [13]

$$(19) \quad U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \alpha \varepsilon G$$

$$G^2 = \frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{i\alpha} \right)$$

$$\kappa = 2, \quad \alpha = 0.2$$

В переменных $\eta = y/x$ с учетом уравнения неразрывности и $\varepsilon = \varepsilon^{\circ} x$ уравнение (19) будет иметь вид

$$(20) \quad \varepsilon_{\eta}^{\circ'} (V - \eta U + 3\kappa \varepsilon^{\circ} \eta) = (1 + \eta^2) (\kappa \varepsilon^{\circ} \varepsilon_{\eta}^{\circ'})_{\eta}' + \alpha \varepsilon^{\circ} |U_{\eta}'| (1 + \eta^2) - U \varepsilon^{\circ} + \kappa \varepsilon^{\circ 2}$$

Таким образом, течение в плоском слое смешения описывается следующей системой уравнений:

$$(21) \quad \begin{aligned} V_{\eta}' - \eta U_{\eta}' &= 0 \\ (V - \eta U) U_{\eta}' (1 + c_1 \eta^2) &= (1 - c_3 \eta^2 - k\eta) (\varepsilon^{\circ} U_{\eta}')_{\eta}' \\ \varepsilon_{\eta}^{\circ'} (V - \eta U + c_2 3\kappa \varepsilon^{\circ} \eta) &= (1 + c_1 \eta^2) (\kappa \varepsilon^{\circ} \varepsilon_{\eta}^{\circ'})_{\eta}' + \\ &+ \alpha \varepsilon^{\circ} |U_{\eta}'| (1 + c_1 \eta^2) - U \varepsilon^{\circ} + c_3 \kappa \varepsilon^{\circ 2} \\ P_{\eta}' &= -(V - \eta U) V_{\eta}' - \eta (\varepsilon^{\circ} U_{\eta}')_{\eta}' + k_{\nu} (\varepsilon^{\circ} U_{\eta}')_{\eta}', \end{aligned}$$

где k_{ν} — коэффициент в выражении $\langle v'^2 \rangle = -k_{\nu} \varepsilon^{\circ} \partial U / \partial \eta$.

В систему введены коэффициенты $c_1 - c_3$. Если эти коэффициенты положить равными единице, выведенная система уравнений не изменится.

Если же положить $c_1 - c_3 = 0$ и $k = 0$, то система уравнений будет соответствовать применяемому обычно для слоя смешения приближению пограничного слоя.

Рассмотрим теперь течение во всей плоскости xy . Разобьем все поле течения на три области (фиг. 1). В области 2 течение описывается системой уравнений (21), в областях 1 и 3 вне слоя смешения $\varepsilon^\circ = 0$. При этом в областях 1 и 3 система имеет только тривиальное решение

$$U = \text{const}, \quad V = \text{const}, \quad P = \text{const}, \quad \varepsilon^\circ = 0$$

На границах областей 1 и 2, 2 и 3 эти тривиальные решения должны сплываться с решениями системы (21). Выберем теперь систему координат так, чтобы в области 1 имело место $V_1 = 0$, т. е. направим ось x параллельно левой стенке клина. Зададимся некоторыми значениями скоростей U_1 и U_2 в областях 1 и 3 соответственно, а также зададим P_1 в области 1. Тогда из условий спивки для левой и правой границ слоя смешения получим следующие граничные условия:

$$(22) \quad U = U_1, \quad V = 0, \quad P = P_1, \quad \varepsilon^\circ = 0; \quad U = U_2, \quad \varepsilon^\circ = 0.$$

Решая систему уравнений (21) с граничными условиями (22), получим распределение параметров поперек слоя смешения, и в частности значения V_2 и P_2 на правой границе, зависящие от соотношения скоростей U_2/U_1 и уровня турбулентной вязкости ε_{max} , определяемого двумя эмпирическими постоянными в третьем уравнении (21). В области 3 V_2 и P_2 должны быть постоянны, но на правой стенке клина должно также выполняться условие непротекания, которое можно представить в следующей форме:

$$(23) \quad V_2(U_2/U_1, \varepsilon_{\text{max}}^\circ)/U_2 = \text{tg } \gamma$$

Таким образом, при сделанных выше предположениях автомодельное решение для зоны смешения двух полубесконечных потоков несжимаемой жидкости при заданном отношении скоростей U_2/U_1 и заданном уровне турбулентной вязкости ε_{max} существует при определенном значении угла клина, определяемого соотношением (23). Это решение находится единственным образом. В частном случае $U_2 = 0$ получаем из (23) $\gamma = \pi/2$ (истечение полубесконечной струи из твердой стенки). При $m = U_2/U_1 \rightarrow 1$, $V_2 \rightarrow 0$ и $\gamma \rightarrow 0$. Это соответствует оттеканию бесконечно тонкой пластины двумя потоками с равными скоростями. Аналогичный результат для этих предельных случаев был получен в [14].

Следует отметить, что при использовании приближения пограничного слоя для задания граничных условий нет необходимости рассматривать внешнее по отношению к слою смешения течение, и ограничений на угол клина не возникает. В этом случае граничные условия на V выбираются из других соображений. Обычно используется условие Кармана $U_1 V_1 = -U_2 V_2$, обоснованное в работе [15].

Из эксперимента известно, что вне зоны смешения турбулентные пульсации быстро затухают. Кроме того, уравнение (19) является уравнением типа температурной волны. Для уравнений такого типа известно [16], что его решение обращается в нуль на конечном расстоянии и подходит к нулю с конечной производной. Если вести расчет на отрезке, большем ширины зоны смешения, то внутри этого отрезка будет разрыв производной от ε° . Как известно, при численном счете всегда лучше выделять разрыв, поэтому расчет проводился в так называемой «плавающей» системе координат, совмещающей отрезок численного интегрирования с границами слоя

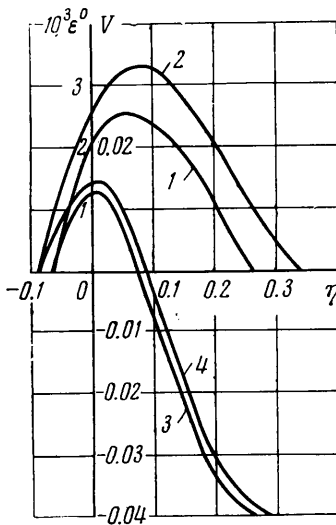
смешения. Это осуществлялось переходом к переменной

$$t = (\eta - \eta_1) / (\eta_2 - \eta_1)$$

где η_1 и η_2 — границы слоя смешения (фиг. 1), определенные как точки, в которых ε° обращается в нуль. Расчеты в η -координатах показали, что максимальная ширина слоя смешения получается по профилю ε° . Значения η_1 и η_2 заранее не известны, поэтому сначала они задаются произвольно, а затем проводится интегрирование по η_1 и η_2 . При подстановке разложений U , V и ε° по $\Delta\eta$ в окрестности точек η_1 и η_2 получаются следующие соотношения на разрывах:

$$(24) \quad V_1 - \kappa \varepsilon_{\eta_1}^{\circ\prime} |_{\eta_1} - \eta_1 U_1 = 0, \quad V_2 - \kappa \varepsilon_{\eta_2}^{\circ\prime} |_{\eta_2} - \eta_2 U_2 = 0$$

На основе этих соотношений построены итерационные формулы для нахождения новых значений η_1 и η_2



Фиг. 3

$$(25) \quad \eta_{1H} = \eta_1 + k_1 (V_1 - \kappa \varepsilon_{\eta_1}^{\circ\prime} |_{\eta_1} - \eta_1 U_1)$$

$$\eta_{2H} = \eta_2 + k_2 (V_2 - \kappa \varepsilon_{\eta_2}^{\circ\prime} |_{\eta_2} - \eta_2 U_2)$$

Коэффициенты k_1 и k_2 зависят от шага разбиения и подбирались экспериментально. Их значения лежат в диапазоне 0.1—0.03.

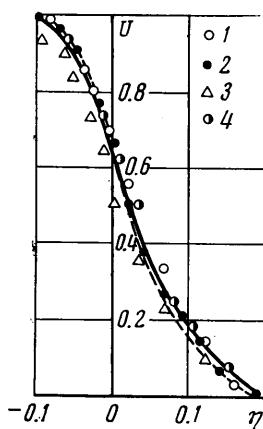
Уравнения в t -координатах аппроксимировались по неявной разностной схеме первого порядка точности. Первые производные в левой части уравнений расписаны «против потока». Получающиеся разностные уравнения решались методом прогонки. Вследствие нелинейности разностных уравнений приходилось делать несколько итераций. В качестве начального приближения задавались некоторые произвольные, близкие к ожидаемым профили U и ε° . После каждой итерации по полученному профилю U из первого уравнения (21) находилось распределение V , затем из четвертого уравнения (21) определялось распределение давления. Коэффициент k_1

был подобран так, чтобы значение максимального разрежения в слое смешения совпадало с экспериментальными данными. Окончательно было выбрано $k_v = 2.2$. По составленной таким образом программе было найдено автомодельное решение для плоского турбулентного слоя смешения как в приближении пограничного слоя, так и с использованием системы уравнений (1) (уравнения Рейнольдса). Сравнение результатов расчета показало, что добавление новых членов к уравнениям (30) (коэффициенты c_1 , c_2 , c_3 поочередно полагались равными единице) действует в одну сто-

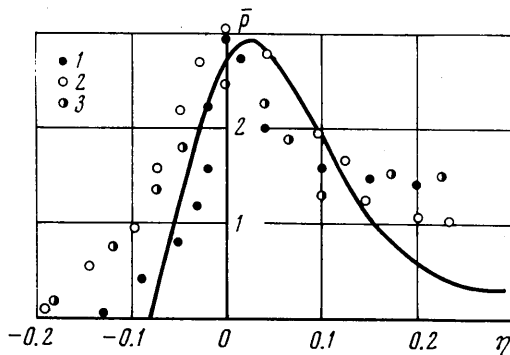
c_1, c_2, c_3	k	η_1	η_2	b	$\varepsilon_{\max}^\circ 10^3$	$\Delta \varepsilon_{\max}^\circ \%$
0 0 0	0	-0.0745	0.2534	0.3279	2.629	0
0 0 0	0	-0.0663	0.2708	0.3372	2.795	6.5
0 1 0	0	-0.0675	0.2590	0.3339	2.695	2.7
0 0 1	0	-0.0782	0.2561	0.3343	2.659	1
1 1 1	1	-0.0823	0.3258	0.4082	3.358	28

рону — в сторону увеличения ширины слоя смешения и уровня турбулентной вязкости (таблица).

В таблице приведены значения границ слоя смешения η_1 и η_2 , его ширины b , максимального значения турбулентной вязкости ε_{\max}^* и увеличения ε_{\max}^* по сравнению с приближением пограничного слоя $\Delta \varepsilon_{\max}^*$ для случая $m=0$. Из таблицы видно, что увеличение турбулентной вязкости при отказе от приближения пограничного слоя может достигать 30%. Происходящее при этом изменение профиля турбулентной вязкости показано на фиг. 3, где кривая 1 соответствует приближению пограничного слоя ($c_1, c_2, c_3, k=0$), а кривая 2 — использованию полной системы уравнений Рейнольдса ($c_1, c_2, c_3, k=1$). На фиг. 3 показаны также профили поперечной скорости, полученные в приближении пограничного слоя (кривая 3) и без использования этого приближения (кривая 4). Несмотря на



Фиг. 4



Фиг. 5

существенное изменение турбулентной вязкости, профили скорости меняются незначительно, разница в значениях продольной скорости не превышает 3% (на фиг. 4 штриховая кривая соответствует $c_1, c_2, c_3, k=0$, сплошная — $c_1, c_2, c_3, k=1$). На фиг. 4 для сравнения приведены экспериментальные данные, полученные в результате измерений в слоях смешения круглых и плоских затопленных струй. На этой фигуре точки 1 — эксперимент данной работы, точки 2—4 соответствуют экспериментальным данным из работ [11, 16, 17]. Совпадение профилей продольной скорости с экспериментальными данными в основном хорошее.

В отличие от приближения пограничного слоя, где давление считается постоянным поперек слоя смешения, в случае использования уравнений Рейнольдса получается существенное разрежение внутри слоя смешения, достигающее 3% ρU_1^2 (фиг. 5), кроме того, давление справа от слоя смешения не совпадает с давлением слева. Разница достигает 0.5% ρU_1^2 . На фиг. 5 представлены также экспериментальные данные по распределению статического давления ($\bar{P} = (P_1 - P) / \rho U_1^2$) поперек слоя смешения затопленной струи ($m=0$). Точки 2 — эксперимент данной работы, точки 1, 3 — данные работ [18, 19].

Таким образом при переходе от приближения пограничного слоя к уравнениям Рейнольдса профиль продольной скорости меняется мало ($\approx 3\%$), несколько больше меняется профиль поперечной скорости (12%). Появляется существенное отличие статического давления от постоянной величины (разрежение достигает 3% ρU_1^2). Существенно меняются ха-

рактеристики турбулентности, увеличение турбулентной вязкости составляет $\sim 30\%$.

Авторы благодарят Г. Г. Черного и В. Р. Кузнецова за полезные обсуждения, а также Г. Ю. Степанова, смотревшего статью в рукописи и сделавшего ряд ценных замечаний.

Поступила 6 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rotta J.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Z. Phys., 1951, Bd 129, H. 6, Bd 131, H. 1.
2. *Hanjalic K., Launder B. E.* Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 4.
3. *Daly B. J., Harlow F. H.* Transport equations in turbulence. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 11.
4. *Koosinlin M. L., Lockwood F. C.* The prediction of axisymmetric turbulent swirling boundary layers. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 4.
5. *Хинце И. О.* Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
6. *Wygnanski I., Fiedler H. E.* The two-dimensional mixing region. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, pt 2.
7. *Liepmann H. W., Laufer J.* Investigation of free turbulent mixing. NACA Techn. Note No. 1257, 1947.
8. *Власов Е. В.* Исследование турбулентности в связи с определением акустических характеристик струи. Инж.-физ. ж., 1965, т. 8, № 5.
9. *Bradbury L. J. S.* The structure of a self-preserving turbulent plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
10. *Власов Е. В., Гиневский А. С.* Акустическое воздействие на аэродинамические характеристики турбулентной струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
11. *Bradshaw P., Ferriss D. H., Johnson R. F.* Turbulence in the noise-producing region of a circular jet. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, pt 4.
12. *Харша, Ли.* Связь между турбулентным напряжением трения и кинетической энергией турбулентного движения. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 8.
13. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н.* Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности. М., «Машиностроение», 1975.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
15. *Lu Ting.* On the mixing of two parallel streams. J. Math. and Phys., 1959, vol. 38, No. 3.
16. *Зельдович Я. Б., Компанец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
17. *Laurence J. C.* Intensity, scale and spectra of turbulence in mixing region of free subsonic jet. NACA Rept 1292, 1956.
18. *Miller D. R., Comings E. W.* Static pressure distribution in the free turbulent jet. J. Fluid Mech., 1957, vol. 3, pt 1.
19. *Barat M. M.* Variations de pression statique dans jet libre subsonique. Compt. Rend. Acad. Sci., vol. 238, No. 4.