

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ К ТРЕХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

В. Н. ШТЕРН

(Новосибирск)

В линейной теории устойчивости параллельных течений вязкой жидкости основное внимание обычно уделяется возмущениям в виде плоских бегущих волн. Это объясняется справедливостью для многих течений теоремы Сквайра о том, что критическое число Рейнольдса R определяется двумерными возмущениями [1].

В данной работе показано, что при больших R область генерации турбулентности на начальном этапе ее развития формируется трехмерными возмущениями. Это касается как генерационного диапазона волновых чисел, так и размера пристенного слоя потока, где производится пульсационная энергия. Анализируются следствия, вытекающие из преобразований Сквайра для параллельных потоков. Изучается роль резонансного нелинейного трехгармонического взаимодействия в быстром росте пульсационной энергии при взрывной неустойчивости затянутого ламинарного режима. Показано, что скорость производства турбулентной энергии обусловлена не декрементами по линейной теории, а нелинейным трехгармоническим взаимодействием нейтральных и нарастающих возмущений, трехмерность которых играет существенную роль.

Рассмотрим параллельное течение с полем скоростей $\{U(y), 0, 0\}$. Уравнения для возмущений v_i, p имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{R} \Delta v_i, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Для амплитуд бесконечно малых возмущений вида $\{u, v, w, q\} \times \times \exp[i\alpha(x-Ct) + i\beta z]$ из (1) следуют уравнения:

$$(2) \quad \begin{aligned} L_1(u) &= i\alpha(U-C)u + U'v + i\alpha q - \frac{1}{R}(u'' - k^2 u) = 0 \\ L_2(v) &= i\alpha(U-C)v + q' - \frac{1}{R}(v'' - k^2 v) = 0 \\ L_3(w) &= i\alpha(U-C)w + i\beta q - \frac{1}{R}(w'' - k^2 w) = 0 \\ i\alpha u + i\beta w + v' &= 0, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad C = X + iY \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по y . Применяя преобразование Сквайра $ku^\circ = \alpha u + \beta w$, $\alpha q^\circ = kq$ и $kR^\circ = \alpha R$ и комбинируя первое и третье уравнения (2), получим систему

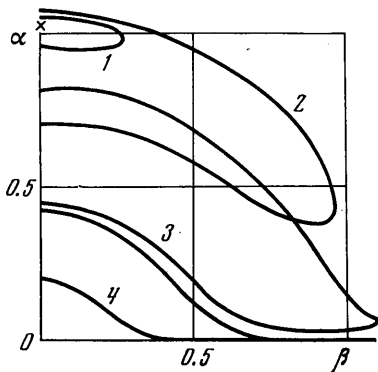
$$(3) \quad \begin{aligned} ik(U-C)u^\circ + vU' + ikq^\circ - \frac{1}{R}(u^\circ - k^2 u^\circ) &= 0 \\ ik(U-C)v + q^{\circ\prime} - \frac{1}{R}(v'' - k^2 v) &= 0, \quad ik u^\circ + v' = 0 \end{aligned}$$

Эта же система следует из (2) при $\beta = w = 0$, т. е. трехмерный случай сводится к эквивалентному двумерному с эффективными значениями α и R . Отсюда кроме известной теоремы Сквайра следуют еще выводы.

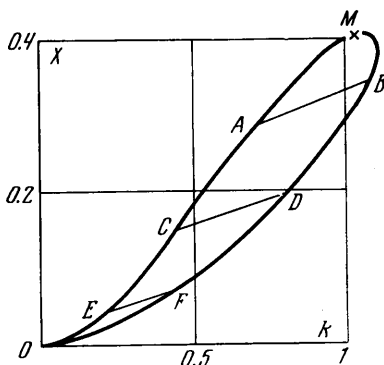
Во-первых, каждому решению двумерной задачи с параметрами α_1, R_1, C_1 отвечает однопараметрическое семейство трехмерных задач

$$(4) \quad \alpha = \alpha_1 R_1 / R, \quad \beta = \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha^2}$$

для которого собственное значение C постоянно и равно C_1 . В предельном случае $R \rightarrow \infty$ имеем $\alpha = 0, \beta = \alpha_1$, при этом возмущение может быть затухающим, нейтральным или нарастающим в зависимости от выбранных значений α_1, R_1 . Ни в одном из этих случаев полученные предельным переходом собственные значения не являются собственными значениями чисто



Фиг. 1



Фиг. 2

невязкой задачи в отличие от известной альтернативы Линя [2] для двумерных возмущений. Это следует из того, что трехмерная задача сводится к уравнению (3) и при $R \rightarrow \infty$ вдоль семейства (4) величина $R^2 = R_1$ остается конечной и, таким образом, вязкие члены остаются существенными.

Во-вторых, из преобразований Сквайра следует, что диапазон неустойчивости по волновым числам конечен и не стягивается в точку при $R \rightarrow \infty$, даже когда нейтральная кривая для двумерных возмущений имеет петлеобразный вид, как, например, в случае течения Пуазейля или Блазиуса. Вдоль обеих ветвей нейтральной кривой $\alpha \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ и диапазон неустойчивости по α действительно стягивается в точку. В книге [3] содержится утверждение, что аналогичная ситуация имеет место и для трехмерных возмущений. Легко убедиться, однако, что это не так. Выберем произвольную точку на двумерной нейтральной кривой α_1, R_1 и рассмотрим отвечающее ей семейство трехмерных возмущений (4). В пределе $R \rightarrow \infty$ получим $\alpha = 0, \beta = \alpha_1$, откуда следует, что при $R = \infty$ существует диапазон неустойчивости $-\alpha_{\max} \leq \beta \leq \alpha_{\max}$, где α_{\max} — максимальное волновое число на нейтральной кривой.

На фиг. 1 нанесены сечения $R = \text{const}$ нейтральной поверхности для трехмерных возмущений в пространстве $\{\alpha, \beta, R\}$ в случае течения Пуазейля $U = 3/2(1 - y^2)$. Крестиком отмечена точка, отвечающая критическим параметрам $\alpha_1 = 1.02, R_1 = 3848$. Линии 1–4 соответствуют значениям $R = 4 \cdot 10^3, 10^4, 10^5, 10^7$ (оси координат являются осями симметрии), они построены на основе расчетов для нейтральных двумерных колебаний [4]. При фиксированном R построение осуществляется последовательным перебором точек двумерной нейтральной кривой α_1, R_1 ($R_1 < R$) и нанесением соответствующих точек на плоскости $\{\alpha, \beta\}$, полученных по формулам (4). Фиг. 1 показывает, что нейтральная поверхность имеет вид шлейфа и

при $R \rightarrow \infty$ ложится на плоскость $\alpha=0$ в виде полосы конечной ширины по β .

Третье следствие преобразований Сквайра — существование единой дисперсионной зависимости фазовой скорости трехмерных нейтральных колебаний от модуля волнового вектора для любых чисел Рейнольдса. Действительно, любое нейтральное колебание с параметрами (α, β, R, C) приводится к эквивалентному двумерному $\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = k$, $R_1 = \alpha R / \alpha_1$, C , а параметры двумерных колебаний связаны на нейтральной кривой соотношениями $\alpha_1 = f(R_1)$, $X = g(R_1)$, откуда, исключая R_1 , получим $X = X(k)$.

На фиг. 2 показана дисперсионная функция $X(k)$ в случае течения Пуазейля. Точка M соответствует критическим параметрам, с ростом R кривая $X(k)$ и заключенная внутри нее область неустойчивости определяются следующим образом: участок AMB отвечает $R=10^4$, $CMD-R=10^5$, $EMF-R=10^7$, $OCMFO-R=\infty$.

Если специально наложенными воздействиями ламинизировать течение при больших числах Рейнольдса, а затем снять эти воздействия, то в первую очередь разовьются пульсации, отвечающие точкам внутри петли на фиг. 2. При этом двумерным возмущениям будет отвечать линия, связывающая граничные точки нейтральной кривой на фиг. 2 при выбранном R . Таким образом, генерационный диапазон волновых чисел определяется именно трехмерными возмущениями. Важную роль играет так называемый критический слой y_c , где $U(y_c) = X$, т. е. фазовая скорость возмущений совпадает с местной скоростью потока. В окрестности y_c достигают максимума рейнольдсовы напряжения и локальная мощность генерации турбулентной энергии. Поскольку для нарастающих возмущений $0 < X < 0.4$, максимум генерации расположен в пристенной области, что вполне согласуется с опытными данными.

Позволяя определить область генерации, линейная теория тем не менее не в состоянии объяснить быстрое развитие турбулентного режима, наблюдаемое при нарушении устойчивости в затянутых ламинарных течениях. Декременты роста αY нарастающих возмущений весьма малы, более того, они стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Максимальное значение αR , например, для течения Пуазейля близко к 0.01, т. е. амплитуда вырастает в e раз пока поток проходит 50 калибров. Оказывается, в этих условиях существует резонансный механизм быстрого роста энергии пульсаций, обусловленный нелинейным взаимодействием нейтральных и нарастающих гармоник, важное условие для существования таких резонансов — трехмерность возмущений.

В силу присущей уравнениям гидродинамики квадратичной нелинейности непосредственно влиять на гармонику с определенным волновым числом α_1 могут лишь такие гармоники, волновые числа которых связаны соотношениями $\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 = 0$. Такие же соотношения должны выполняться для волновых чисел β_j и частот $\omega_j = \alpha_j X_j$. Такие группы волн называют триплетами [5], их взаимодействие является основным в нелинейной теории волн и теории гидродинамической устойчивости [6-9]. Чтобы показать решающую роль резонансных взаимодействий, рассмотрим возмущение в виде суммы трех нейтральных гармонических колебаний

$$v_s = v_{s_j}(y) \exp(i\theta_j) + v_{s_j}^* \exp(-i\theta_j), \quad \theta_j = \alpha_j x + \beta_j z - \alpha_j X_j t$$

Здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Так как нелинейный член в уравнениях (1) имеет форму $K_s = \partial(v_s v_j) / \partial x_j$, подставляя выражение для v_s и проектируя на первую гармонику, получим после несложных преобразований, что часть K_s , дающая

при проектировании ненулевой вклад K_s^1 , имеет вид

$$K_s^1 = \frac{\partial}{\partial x_j} [(v_{s2}^* v_{j3}^* + v_{j2}^* v_{s3}^*) \exp(i\theta_1)]$$

при условии, что θ_j удовлетворяют резонансному соотношению $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$ при любых x, z и t .

В этом случае уравнения для амплитуд первой гармоники имеют вид

$$L_1(u_1) = -2i\alpha_1 u_2^* u_3^* - (u_2^* v_3^* + u_3^* v_2^*)' - i\beta_1 (u_2^* w_3^* + u_3^* w_2^*)$$

$$L_2(v_1) = -i\alpha_1 (u_2^* v_3^* + u_3^* v_2^*) - 2(v_2^* v_3^*)' - i\beta_1 (v_2^* w_3^* + v_3^* w_2^*)$$

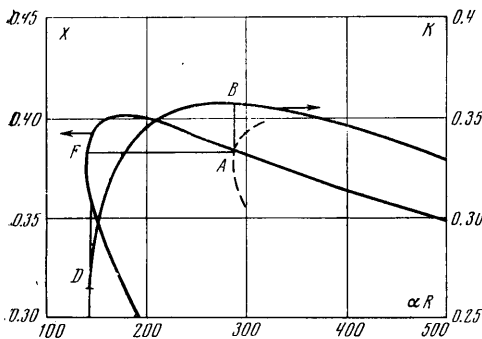
$$L_3(w_1) = -i\alpha_1 (u_2^* w_3^* + u_3^* w_2^*) - (w_2^* v_3^* + w_3^* v_2^*)' - 2i\beta_1 w_2^* w_3^*$$

Уравнения для второй и третьей гармоник получаются при циклической перестановке индексов 1, 2, 3 (исключая операторы L_j).

Если первая гармоника — нейтральное колебание малой амплитуды, то величину K_s^1 можно рассматривать как внешнюю силу, действующую с

резонансной для первой гармоники частотой. Из теории колебаний известно, что действие такой силы на линейный осциллятор приводит к появлению секулярных членов типа $t \exp(i\omega t)$. Отсюда следует, что малые колебания, являясь нейтральными по линейной теории, будут расти по амплитуде в силу нелинейных резонансных взаимодействий. При больших числах Рейнольдса эти нелинейные эффекты будут доминировать уже при весьма малых амплитудах.

Можно убедиться в том, что при достаточно больших числах



Фиг. 3

Рейнольдса среди нейтральных (и нарастающих) колебаний найдутся такие, что их параметры удовлетворяют резонансным условиям. Если известна нейтральная кривая, число Рейнольдса, при котором впервые возможно резонансное взаимодействие, может быть определено с помощью несложного графического построения. Проиллюстрируем это на примере течения Блазиуса. На фиг. 3 представлены X и k для нейтральных колебаний как функции параметра αR (по данным [10]).

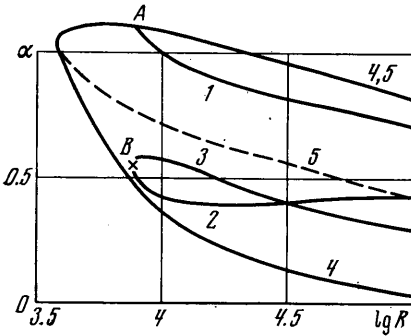
Из соображений симметрии следует, что минимальному числу Рейнольдса должен соответствовать симметричный триплет

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & X \\ -\alpha/2 & \beta & X \\ -\alpha/2 & -\beta & X \end{pmatrix}$$

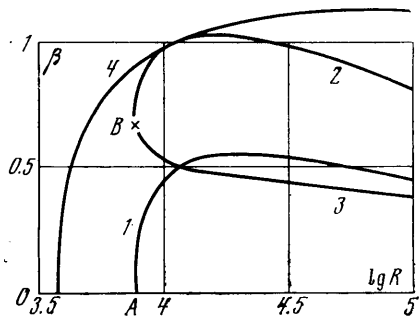
Это подтверждается и численными расчетами. Точки, отвечающие резонансным гармоникам, должны лежать на прямой $X = \text{const}$, а их аргументы αR отличаются вдвое, как это следует из (5) (знак волнового числа не играет роли в силу симметрии относительно оси $\alpha=0$). Соответствующее построение осуществляется следующим образом. Кривая $X(\alpha R)$ сносится в точки с удвоенными абсциссами (пунктир на фиг. 3). Пересечение снесенной и основной кривых определяет точку A , отвечающую первой гармонике ($\beta=0$). Проводя линию $\alpha R = \text{const}$ (AB) до пересечения с зависимостью $k(\alpha, R)$, определим величины X, α, R . Из точки F , полу-

чающейся при пересечении линии $X=\text{const}$ (AF) с кривой $X(\alpha, R)$, проведем линию FD ($\alpha R=\text{const}$) до пересечения с кривой $k(\alpha R)$ и тем самым определим k для второй и третьей гармоник, откуда $\beta=\pm\sqrt{k^2-\alpha^2}/4$. Построенному симметричному триплету отвечают следующие значения параметров: $R=818$, $\alpha=0.356$, $\beta=0.19$, $X=0.383$.

Эти результаты находятся в качественном согласии с опытными данными [11]. При естественном переходе в пограничном слое развитию турбулентного режима предшествует трехмерная структура продольных вихрей с $\beta\approx 0.22$ и $X=0.3\div 0.6$. Хотя такая структура наблюдалась уже при



Фиг. 4



Фиг. 5

значительных интенсивностях $\sim 1\div 2\%$ и при $R=2\,000\div 3\,000$, развиваться она начинает гораздо раньше, что отчетливо проявляется при стимулировании колебаний вибрирующей лентой. При акустическом возмущении [12] интенсивность возникающих пульсаций имеет два резких максимума — на частоте, соответствующей верхней ветви нейтральной кривой, и вдвое меньшей частоте, что согласуется со структурой резонансного триплета (5).

Аналогичные построения и расчеты резонансных триплетов могут быть проведены и для других течений. Так, для течения Пуазейля в канале симметричному триплету отвечают параметры $R=7776$, $\alpha=1.088$, $\beta=0.709$, $X=0.3586$.

На фиг. 4, 5 нанесены линии ответвления резонансных триплетов от течения Пуазейля. Линия 5 на фиг. 4 — классическая нейтральная кривая, кривая 4 — контур нейтральной поверхности (см. фиг. 1) в проекции на плоскость $\beta=0$. Кривые 1–3 отвечают параметрам гармоник триплета. На фиг. 5 все кривые изображены в проекции на плоскость $\alpha=0$. Точки A, B соответствуют симметричному триплету, причем вторая и третья гармоники проектируются в точку B (ось абсцисс является осью симметрии). При $R>7776$ существуют симметричные пары триплетов

$$(6) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \pm \beta_1 & X_1 \\ \alpha_2 & \pm \beta_2 & X_2 \\ \alpha_3 & \pm \beta_3 & X_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 &= 0 \end{aligned}$$

Кривая 1 выделяет область на нейтральной поверхности, где содержится точки, отвечающие первой гармонике триплета, состоящего из нарастающих или нейтральных по линейной теории колебаний. Аналогичные области выделяют кривые 2, 3.

На примерах течений Блазиуса и Пуазейля видно, что трехмерность колебаний существенна для возможности трехгармонического резонанса. Если специальным образом подавлять трехмерные пульсации, как это

происходит при наложении на течение проводящей жидкости трансверсального магнитного поля [13], то область генерации на фиг. 2 будет сокращаться к началу координат, и осуществление трехволнового резонанса неустойчивых гармоник затрудняется. В опытах при наложении такого поля фиксировалась почти двумерная турбулентность с весьма интенсивными пульсациями, но практически ламинарным профилем средней скорости. Как показано в работах [14, 15], такими особенностями обладают периодические автоколебания конечной амплитуды. Слабая «зацепленность» пульсаций обусловлена отсутствием резонансного взаимодействия генерирующих гармоник, для которого, как показано выше, существенна трехмерность структуры возмущений.

Автор признателен М. А. Гольдштуку за внимание к работе и обсуждение результатов.

Институт теплофизики
СО АН СССР

Поступила 4 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Squire H. B.* On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1933, vol. 142, No. 847.
2. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. *Беглов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
4. *Сапожников В. А., Штерн В. Н.* Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля. ПМТФ, 1969, № 4.
5. *Должанский Ф. В., Клячкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
6. *Stuart J. T.* Non-linear effects in hydrodynamic stability. Proc. 10-th Internat. Congress Appl. Mech. Stresa, 1960, Amsterdam — New York, Elsevier, 1962.
7. *Craik A. D. D.* Second order resonance and subcritical instability. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1975, vol. 343, No. 1634.
8. *Герценштейн С. Я., Шмидт В. М.* Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1.
9. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. ЖЭТФ, 1975, т. 69, № 5.
10. *Лихачев О. А., Штерн В. Н.* Автоколебательное течение в пограничном слое. ПМТФ, 1975, № 4.
11. *Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M.* The three-dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid. Mech., 1962, vol. 12, pt 1.
12. *Власов Е. В., Гиневский А. С.* Экспериментальное исследование влияния акустических возмущений на возникновение турбулентности в пограничном слое. В сб. «Пристенное турбулентное течение», ч. 2. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1975.
13. *Колесников Ю. Б., Цинобер А. Б.* Реализация и экспериментальное исследование двумерных турбулентных течений за решеткой и в канале. В кн. «7 Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т. 1. Общие и теоретические вопросы МГД». Рига, «Зинатне», 1972.
14. *Гольдштух М. А., Штерн В. Н.* Модельные автоколебания и турбулентность. В кн. «Проблемы теплофизики и физической гидродинамики». Новосибирск, «Наука», 1974.
15. *Zahn J. P., Toomre J., Spiegel E. A., Gough D. O.* Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow. J. Fluid Mech., 1974, vol. 64, pt 2.